信号処理

～第 1 部 フーリェ変換を中心に～

Matlab, Maple **対応版**

横田 康成

平成 16 年 6 月 7 日

目 次

第1章　フーリエ級数展開，フーリエ変換

1.1　信号の分解，合成

図 1.1 は，音声を電気信号に変換し，その波形を描いたものである．声には，低い声やかん高い声，また，よく通る声などと形容される声もあろう．こうした声質は，声帯の形状や顎の骨格などの影響を受けることが分かっている．実際，人の顎や咽の形状などを詳細に調べれば，その人の声質をある程度推測することが可能である．では，逆に，図 1.1 に示したような実際に計測された音声信号の波形から，その声質を推測することはできないだろうか.

仮に，発声された声が,「低い声の要素」,「かん高い声の要素」,「よく通る声の要素」に分解でき，かつ

$$\text{発声された声} \simeq a(\text{低い声の要素}) + b(\text{かん高い声の要素}) + c(\text{よく通る声の要素})$$

と近似的に表現できたとする．ただし，a, b, c は，実数をとる係数である．この時，もし，a が b, c に比べて大きい値をとるならば，発声された声は，低い声であると推測できるし，c が a, b に比べて大きい値をとるならば，発声された声は，よく通る声であると推測できるであろう．このように，信号をいくつかの要素の和で表現することを**信号の分解** (signal decomposition) という．信号を分解できれば，信号の性質が分かりやすくなるのである．

信号の分解を数式を用いて表現してみよう．元の信号を時刻 t の関数とみて $x(t)$ と書き,「低い声の要素」,「かん高い声の要素」などの要素を $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_N(t)$ と書くことにすれば，信号 $x(t)$ は,

$$x(t) \simeq \sum_{k=1}^{N} c_k g_k(t) \tag{1.1}$$

と近似できる．これにより，信号 $x(t)$ は要素 $g_1(t), \ldots, g_N(t)$ を $c_1, \ldots, c_N$ だけ含んでいると解釈することができる．すなわち，要素 $g_1(t), \ldots, g_N(t)$ をそれぞれ $c_1, \ldots, c_N$ 倍して加え合わせることにより，信号 $x(t)$ を合成できることになる．また，式 (1.1) 右辺の表現を，係数 $c_1, \ldots, c_N$ を重みとする要素 $g_1(t), \ldots, g_N(t)$ の**線形結合** (linear combination) という．

さて，式 (1.1) において，右辺で左辺 $x(t)$ を最も良く近似できるようにするためには，どのような係数 c_k，$k = 1, \ldots, N$ を選べば良いのだろうか．最も良くという基準は曖昧であるから，右辺で左辺を近似した場合の 2 乗誤差

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k(t) \right)^2 dt \tag{1.2}$$

で近似の良し悪しを測ることにしよう[1]．2 乗誤差 E が小さいほど，式 (1.1) の右辺で $x(t)$ を精度よく近似できることになる．つまり，E を最小にするような係数 c_k，$k = 1, \ldots, N$ を求めれば，2 乗誤差の意味で最も精度良く $x(t)$ を近似できることになる．そこで，E を各 c_k で偏微分し，0 とおいた連立方程式

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, N \tag{1.3}$$

[1] ここでは，積分の範囲を $[-\infty, \infty]$ としたが，信号の範囲が定められている場合には，その範囲で積分すればよい．

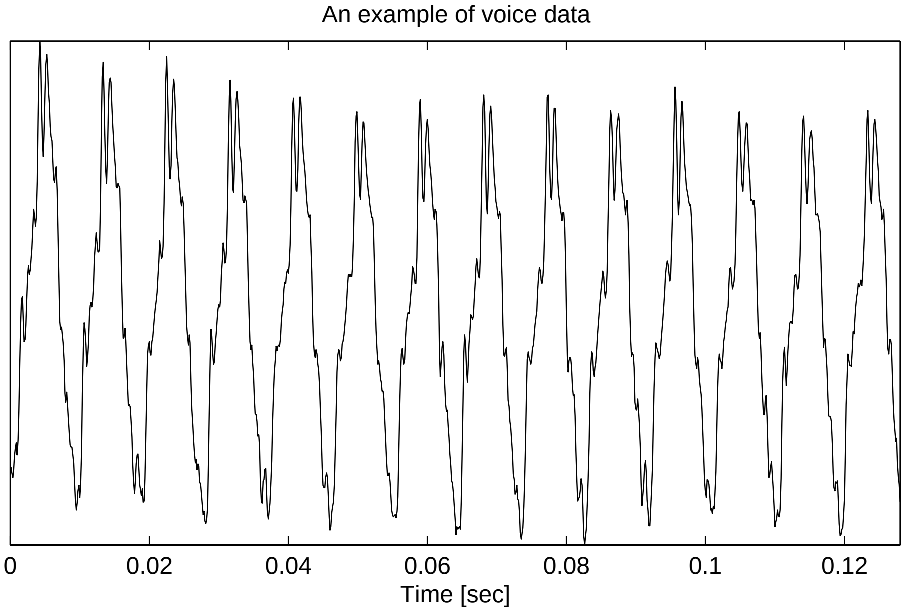

図 1.1: 音声波形の例 ex1.m

を解くことにしよう．この連立方程式の解を $\hat{c}_j$ と表すことにし，実際に偏微分すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\Big(x(t) - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k g_k(t)\Big)(-g_j(t))\ dt = 0, \quad j = 1, \ldots, N \tag{1.4}$$

となり，整理すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_j(t)\ dt = \sum_{i=1}^{N} \hat{c}_k \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) g_j(t)\ dt, \quad j = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

となる．ここで，信号 $x(t)$ と $y(t)$ の積の積分を

$$\langle x, y \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)\ dt$$

と内積の記号を用いて表現することにすれば[2]，

$$\begin{aligned} \langle x, g_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_j(t)\ dt, \quad j = 1, \ldots, N \\ \langle g_k, g_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) g_j(t)\ dt, \quad k, j = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{1.6}$$

となり，以下のように行列表現可能である．

$$\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{r} \tag{1.7}$$

ただし，

$$\boldsymbol{R} \equiv \begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_2, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_N, g_1 \rangle \\ \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_N, g_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_1, g_N \rangle & \langle g_2, g_N \rangle & \cdots & \langle g_N, g_N \rangle \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{c}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \vdots \\ \hat{c}_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} \equiv \begin{pmatrix} \langle x, g_1 \rangle \\ \langle x, g_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, g_N \rangle \end{pmatrix}$$

[2] $x(t), y(t)$ は，t が無限の値をとることから，無限次元ベクトル空間中の元（ベクトル）とみなすことができる．したがって，この内積は，無限次元ベクトル空間での内積ということになる．

である．式 (1.7) において，$\boldsymbol{R}$ が正則であれば，その逆行列が存在するから，上式の両辺に左から $\boldsymbol{R}^{-1}$ を乗じ，

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r} \tag{1.8}$$

として線形結合の係数が推定されることになる．

演習　式 (1.2) では，2 乗誤差をすべての時刻 t で等しく評価していたが，t により異なる重要度で評価することが要求されることもある．そこで，この重要度に応じた重み $w(t)$ を設定し，式 (1.2) の代わりに，

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k(t) \right)^2 w(t)\ dt \tag{1.9}$$

とした場合には，係数 $c_k,\ k = 1, \ldots, N$ はどのようになるだろうか．各自求めてみよう．■

先ほど,「低い声の要素」,「かん高い声の要素」,「よく通る声の要素」の例を用いて信号の分解の概念を説明したが，実際に，このような要素が存在し，しかもこれらの要素の線形結合ですべての声を表現できる保証はない．それでは，信号 $x(t)$ を要素に分解するためには，どのような要素 $g_k(t),\ k = 1, \ldots, N$ を用いれば良いのだろうか．要素として要求される性質には以下に列挙するものが考えられる．

- 第一に，当然のことながら，対象とする信号をきちんと一次結合で表現できることである．すなわち，式 (1.1) において等号が成立する，もしくは項数 N を増やせば，式 (1.2) で示した 2 乗誤差 E が減少してゆくなど，右辺は左辺になんらかの形で収束することである．
- 第二に，各要素が「低い声」,「かん高い声」というように我々がある程度意味を理解できる要素である必要がある．解釈できない要素に分解したとしても，分解した結果から元の信号の性質を知ることはできない．
- 第三に，それらの要素が含まれている量を表す係数 c_k が一意に定められることである．一意に決められなければ，それぞれの要素がどの程度含まれているかという判断に迷うことになる．
- 第四に，できれば要素同士が互いの要素の成分を共有していない方がよい．要素同士が互いの成分を共有している場合，例えば，声から「低い声の要素」,「かん高い声の要素」をそのままにし,「よく通る声の要素」だけを抽出するといった操作ができなくなるからである．

このような要素として要求される性質を念頭に置きながら，実際に最も広く用いられている要素について考えてみることにしよう．

1.2　フーリエ級数展開

図 1.1 に示した音声の波形をよくみれば，おおよそ，ある一定の周期で繰り返されている波形であることが分かるであろう．こうした信号を**周期信号** (periodic signal) という．もっとも短い周期を**基本周期**といい[3]，それを T と書くことにすれば，周期信号 $x(t)$ は

$$x(t) = x(t + nT), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

を満たすことになる．

[3]周期 T の周期信号は，周期 $2T, 3T, 4T, \ldots$ の周期信号でもある．そこで，曖昧さをなくすため，もっとも短い周期を基本周期とするのである．

信号は，時間を変数とする関数と見なせるから，本書では，信号と関数を特に区別せずに使用することにしよう．さて，周期性を持つ関数として思い出される一般的な関数としては三角関数がある．そこで，先に述べた要素として望まれる性質の条件はさておき，とりあえず，直流成分と周期 $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$ の正弦波と余弦波を要素として周期信号 $x(t)$ を分解することにしよう．すなわち，信号 $x(t)$ を

$$x(t) \simeq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl\{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \bigr\} \tag{1.10}$$

と近似しようというわけである．この表現は，式 (1.1) の $g_k(t),\ k = 1, 2, \ldots$ を

$$g_1(t) = 1, \quad g_2(t) = \cos(\omega t), \quad g_3(t) = \sin(\omega t), \quad g_4(t) = \cos(2\omega t), \quad g_5(t) = \sin(2\omega t), \ldots$$

とおいたことに相当し，式 (1.10) の右辺を**三角級数** (trigonometrical series) という．但し，$\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$ とした[4]．

さて，与えられた $x(t)$ を，周期 N までの三角級数

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \}$$

を用いて 2 乗誤差 E の意味で最も精度よく近似できるような係数 a_n, b_n の値を求めよう．$x(t)$ が周期信号であるから，2 乗誤差の評価範囲をその基本周期に限定しても構わない．また，基本周期のとり方は，$[0, T]$ でも，$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ でも構わない．ただし，$T = \frac{2\pi}{\omega}$ である．式 (1.6) の $g_k(t)$ に $\cos(n\omega t), \sin(n\omega t)$ などを代入し，また，三角関数の性質

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \cos(n\omega t) dt = 0 \qquad \int_0^T \sin(n\omega t) dt = 0 \\
&\int_0^T \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \\
&\int_0^T \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \\
&\int_0^T \cos(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = 0 \\
&n, m = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

を利用すれば，三角級数を $g_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, N$ に用いた場合には，式 (1.7) に示した行列 $\boldsymbol{R}$，ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \int_0^T x(t) dt \\ \int_0^T x(t) \cos(\omega t) dt \\ \int_0^T x(t) \sin(\omega t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T x(t) \cos(N\omega t) dt \\ \int_0^T x(t) \sin(N\omega t) dt \end{pmatrix}$$

[4] $\omega = 2\pi/T$ を角周波数といい，工学ではこうした表現を用いることが一般的である．一方，数学では，周波数 $f = 1/T$ として定義することが多いようである．

となることが分かる．対角行列 $\boldsymbol{R}$ の逆行列は，単に，$\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \ldots, \frac{2}{T}$ を対角要素に持つ対角行列となるから，結局，式 (1.10) において，2 乗誤差を最小にする a_n, b_n は，

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

として求められる．このように与えられた a_n，b_n を**フーリエ係数** (Fourier coefficient)，フーリエ係数を式 (1.10) に代入した三角級数を**フーリエ級数** (Fourier series) という．また，フーリエ級数による $x(t)$ の分解された表現を**フーリエ級数展開** (Fourier series expansion) という．

式 (1.11) から，フーリエ係数は一意に定められることが分かる．すなわち，信号の分解において望まれる要素としての第三の条件を満たすことになる．また，第一条件は，三角級数 $S_N(t)$ で $x(t)$ を精度良く近似できることであった．この条件を満たすことを保証する次の定理を紹介しよう．この定理により，三角級数の項数 N を十分に大きくとれば，信号の連続な点においては，一様にいくらでも元の信号の値に近付けられることが保証される．

定理：フーリエ級数展開　信号[5]$x(t)$ が周期 T を持ち，区間 $[0, T]$ で，区分的に連続であるとする[6]．そして，その区間内での各点で，左微分係数と右微分係数を持つとする．このとき，周期信号 $x(t)$ のフーリエ級数展開展開は，$N \to \infty$ に対し，$x(t)$ が連続な t では，フーリエ級数は $x(t)$ に収束し，$x(t)$ が不連続な t では，左極限値と右極限値の平均値 $\dfrac{1}{2}\{x(t-0)+x(t+0)\}$ に収束する[7]．■

三角級数については，式 (1.7) に示した行列 $\boldsymbol{R}$ が対角行列になるため，行列 $\boldsymbol{R}$ の逆行列を計算する必要がなくなり，フーリエ係数は容易に求められる．三角級数の持つこうした性質を考えてみよう．式 (1.7) より，行列 $\boldsymbol{R}$ の対角部分は各要素 $g_k(t)$，$k = 1, 2, \ldots$ の大きさ，非対角部分は各要素 $g_k(t)$，$k = 1, 2, \ldots$ の間の内積を表していることがわかる．内積が 0 であるということは，各要素が直交し，各要素間で共有する成分を持たないことを意味している．これは，信号の分解において望まれる第四の条件を満たすに他ならない．こうした要素の組 $\{g_k(t) \mid k = 1, 2, \ldots\}$ を**直交関数系** (orthogonal function system) と呼ぶ．また，直交関数系による関数の展開，あるいは信号の分解を**直交展開** (orthogonal expansion) といい，直交展開における展開係数を**スペクトル** (spectrum) という．

その他，直交性から導かれる利点を紹介しよう．各要素が互いの成分を共有しないということは，$S_N(t)$ で信号 $x(t)$ を近似した後，$M > N$ なる $S_M(t)$ で，再び信号 $x(t)$ を近似する場合には，追加された係数 $a_n, b_n, N < n \le M$ のみを新たに決定すればよく，既に求められた係数 $a_n, b_n, n \le N$ については新たに求め直す必要がないことを意味する．すなわち，フーリエ係数を求める式 (1.11) は，任意の M に対して成立することになる．また，

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) + e(t)$$

とおき，この式に式 (1.11) を代入し，両辺を 2 乗して t で積分すれば，三角級数の直交性から次の不等式が得られる．

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt \ge a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \tag{1.12}$$

[5]数学の教科書では，信号は関数と書いてある．

[6]$x(t)$ が有限区間 $[a, b]$ で区分的に連続であるとは，その有限区間を部分区間に分割すると，各部分区間で $x(t)$ が連続で，かつ t を部分区間の内部から両端点に近づけたとき，$x(t)$ が有限な極限値を持つことである．

[7]$x(t-0)$ は，t での $x(t)$ の左側極限値，$x(t+0)$ は，t での $x(t)$ の右側極限値を表す

N は，任意の自然数であるから，$N \to \infty$ として，

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt \geq a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

となる．この不等式は，**ベッセルの不等式** (Bessel's inequality) と呼ばれている．また，信号 $x(t)$ が連続かつ区分的に滑らか[8]であるとすれば，定理:フーリェ級数展開より，$S_N(t)$ は，$N \to \infty$ に対し $x(t)$ に一様に収束する．すなわち，

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

となる．その場合，ベッセルの不等式は，等式

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

となる．この等式を**パーセバルの等式** (Parseval's equation) といい，連続かつ区分的に滑らかな信号の単位時間あたりの平均パワーは，フーリェ係数の 2 乗和に等しいことを意味している．パーセバルの等式を満たす性質を，直交関数系の**完備性** (completeness) という．

演習　不等式 (1.12) を証明せよ．■

1.3　複素形式のフーリェ級数展開

式 (1.10) に示したフーリェ級数展開

$$x(t) \simeq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right\}$$

は，オイラー (Euler) の関係式

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega t &= \frac{\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2} \\ \sin\omega t &= \frac{\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i} \end{aligned}\right\}$$

を用い，

$$\left.\begin{aligned} a_{-n} &= a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ b_{-n} &= -b_n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

とおけば，次式に書き直すことができる．ただし，$i \equiv \sqrt{-1}$ である．

$$x(t) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{in\omega t} \tag{1.14}$$

また，式 (1.11) は，

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\, dt \tag{1.15}$$

と書ける．式 (1.14) を**複素形式のフーリェ級数展開**という．また，$|c_n|$，$\tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n}$ をそれぞれ**振幅スペクトル**，**位相スペクトル**という．

以下，フーリェ級数展開の性質を述べよう．

[8] 信号 $x(t)$ が区分的に滑らかとは，$x(t)$ の一次導関数が区分的に連続であることを意味する．

線形性

$ax(t)+by(t)$ を式 (1.15) の $x(t)$ に代入すれば，

$$c_n = a\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}dt + b\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}dt$$

となり，$ax(t)+by(t)$ のフーリェ係数は，$x(t), y(t)$ のフーリェ係数をそれぞれ a 倍，b 倍したものの和に等しいことが分かる．$ac_n + bd_n$ を式 (1.14) の c_n に代入すれば，同様に，積分が線形変換であることから，

$$x(t) \simeq a\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{in\omega t} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\mathrm{e}^{in\omega t}$$

となり，フーリェ係数 $ac_n + bd_n$ を持つフーリェ級数は，c_n, d_n をそれぞれフーリェ係数に持つフーリェ級数の和として表現できることが分かる．これらの性質をフーリェ級数展開の線形性という．

時間軸推移

信号 $x(t-\tau)$ を式 (1.15) の $x(t)$ に代入し，$s = t-\tau$ とおけば，

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{e}^{-in\omega s}ds \ \cdot \ \mathrm{e}^{-in\omega\tau}$$

となる．これより，信号 $x(t)$ を τ だけ遅れさせた信号 $x(t-\tau)$ のフーリェ係数は，元の信号 $x(t)$ のフーリェ係数に $\mathrm{e}^{-in\omega\tau}$ を乗じた値になることが分かる．

時間軸の反転

信号 $x(-t)$ を式 (1.15) の $x(t)$ に代入し，$s = -t$ とおけば，

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(-t)\mathrm{e}^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{e}^{-i(-n)\omega s}ds = c_{-n}$$

となる．

実奇関数，実偶関数のフーリェ係数

信号 $x(t)$ が実奇関数，あるいは実偶関数である場合のフーリェ係数を調べてみよう．基本周期を T として，奇関数を $-T/2$ から $T/2$ まで，あるいは 0 から T まで積分すれば，その積分値はゼロになることから，式 (1.11) より，$x(t)$ が奇関数ならば，$a_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$，偶関数ならば，$b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$ となる．したがって，式 (1.13) より，フーリェ係数 $c_n,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ は，$x(t)$ が奇関数ならば，$\mathrm{Re}[c_n] = 0$，偶関数ならば，$\mathrm{Im}[c_n] = 0$ となる．

線形性，時間軸推移，時間軸の反転，奇関数と偶関数のフーリェ係数などの各性質を利用することにより，信号のフーリェ係数を算出する際の手間を削減することができる．

信号の分解に三角関数を用いることの利点

周期信号に対するフーリェ係数 c_n は，その周期信号に含まれている周期 T/n の三角関数 $\mathrm{e}^{in\omega t}$ の大きさを表している．周期の逆数は，単位時間あたりに繰り返される波の数であり，これを**周波数** (frequency) という．時間を秒で測る場合には，周波数の単位はヘルツ (Hz) になる．したがって，c_n は，周波数 n/T[Hz]

の三角関数 $e^{in\omega t}$ の大きさを表しており，これを周波数 n/T の**周波数成分** (frequency component) という．三角関数以外にも周期性を持つ関数は多数存在し，それらの中には，ウオルッシュ関数のように直交性を持つものも存在するが，周波数成分といった場合，厳密には，三角関数で展開した際の係数，すなわちフーリェ係数を指す.

最後になったが，信号の分解のための要素として望まれる第二の条件について考えてみよう．この条件は，分解する要素が我々の理解できる要素であることである．三角関数は誰もが知っている関数だから，当然，理解できるに決まっていると思われるかも知れない．では，三角関数は，なぜ多くの人に知られるようになったのだろうか．それは，三角関数がこれまで述べてきたように，定理:フーリェ級数展開が成立し，直交性をはじめとする数多くの有用な性質を満たし重要であるがために，古くから物理学，工学で利用されてきたからである.

本節の冒頭の例で述べた「低い声」,「かん高い声」,「よく通る声」とは，おおよそ，それぞれ,「低い周波数成分を多く含む声」,「高い周波数成分を多く含む声」,「人の聴覚系の感度が最も高くなる 2kHz 付近の周波数成分を多く含む声」と言い替えることができる．多く含むという言い方に曖昧な点は残るが，周波数成分という考え方は，我々にとって，信号の理解に非常に有用なのである.

1.4 フーリェ変換

フーリェ級数展開は，周期信号に対する直交展開であるため，周期性を持たない信号に対して適用することができない．しかしながら，非周期信号に対しても三角関数を基本とした直交展開を行いたいという要求も起こりうる．こうした要求を満たすためには，フーリェ級数展開において，基本周期 T を $T \to \infty$ とした際の極限を求めれば良いと考えられる．そのため，まず，複素形式のフーリェ級数を求める式 (1.15) において，t を τ に置き換え，それを複素形式のフーリェ級数：式 (1.14) に代入し，$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ とおき，基本区間を $[-T/2, T/2]$ にとり直すことにより次式を得る.

$$x(t) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau \right\} e^{in\omega t}$$

ここで，周期 $T \to \infty$ では，$\omega = \dfrac{2\pi}{T} \to 0$ なので，ω を $\Delta\omega$ とおけば，上式は,

$$x(t) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau)n\Delta\omega} \Delta\omega \right\} d\tau \tag{1.16}$$

となる．ここで，定積分の定義が

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) \Delta x$$

であることを思い出そう．式 (1.16) において，$T \to \infty$，すなわち $\Delta\omega \to 0$ とすれば，括弧 $\{\cdot\}$ 内は,

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau)n\Delta\omega} \Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau)\omega} d\omega$$

となるので，結局，式 (1.16) は,

$$x(t) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} e^{i\omega t}\ d\omega \tag{1.17}$$

となる．式 (1.17) の右辺を**フーリェ積分** (Fourier integral) という．この時点で，T が基本周期を意味するのではなくなるので，同様に $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ が基本角周波数を表わすのではなくなることに注意しよう.

さて，$x(t)$ が絶対可積分，かつ全区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に連続ならば，次の定理が成り立つことが知られている[9]．

定理:フーリエ積分　絶対可積分，かつ全区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に連続な信号 $x(t)$ のフーリエ積分は，$x(t)$ が連続な t では $x(t)$ に一致し，不連続な t では $\frac{1}{2}\{x(t-0)+x(t+0)\}$ に一致する．

定理:フーリエ積分より，$x(t)$ が絶対可積分かつ全区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に連続であり，$x(t)$ の不連続点 t_0 については，左側極限値 $x(t_0-0)$ と右側極限値 $x(t_0+0)$ の中間値 $\frac{1}{2}\{x(t_0-0)+x(t_0+0)\}$ を新たに $x(t_0)$ と定義しなおせば，$x(t)$ のフーリエ積分は，$x(t)$ に一致する．そこで，便宜上，以後，こうした信号 $x(t)$ を仮定し，式 (1.17) が等号で結ばれるものとする．ここで，フーリエ積分は，絶対可積分な信号でないと定義できないことに注意しよう．つまり，無限の時間にわたり続く周期信号は，フーリエ積分不可能である．超関数など特殊なケースを除き，フーリエ級数展開とフーリエ積分の両方の表現が可能な信号は存在しないことになる．

ところで，式 (1.17) の｛　｝内を

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\ dt \tag{1.18}$$

とおけば，式 (1.17) は,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega \tag{1.19}$$

と書ける．式 (1.18) を $x(t)$ の**フーリエ変換** (Fourier transform)，式 (1.19) を $X(\omega)$ の**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transform) といい，それぞれ $X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$，$x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$ と表すことにする．$X(\omega)$ は $x(t)$ の**フーリエスペクトル** (Fourier spectrum) とも呼ばれる．フーリエスペクトル $X(\omega)$ の実部，虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}[X(\omega)]$，$\mathrm{Im}[X(\omega)]$ と書くものとして，$|X(\omega)|^2 = X^*(\omega)X(\omega)$ を**パワースペクトル** (power spectrum)，$|X(\omega)|$ を**振幅スペクトル** (amplitude spectrum)，$\phi(\omega) \equiv \tan^{-1}(\mathrm{Im}[X(\omega)]/\mathrm{Re}[X(\omega)])$ を**位相スペクトル** (phase spectrum) という．また，$X(\omega)$ を $x(t)$ の**周波数軸での表現**という．フーリエ変換を行うことを**時間軸から周波数軸に移す**という言い方をすることもある．

1.5　フーリエ変換の性質

フーリエ係数とフーリエ変換の関係

周期 T の周期信号の基本区間以外を 0 とおいた信号 $x(t)$ のフーリエ変換は，式 (1.18) より

$$X(\omega) = \int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt$$

となる．ω はすでに基本角周波数を表すものではないので，新たに，$\zeta \equiv \frac{2\pi}{T}$ を基本角周波数として，$\omega \equiv n\zeta$ とおけば

$$X(n\zeta) = \int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-in\zeta t}dt$$

となり，これを，式 (1.15) の ω を ζ と置き換えた式

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-in\zeta t}dt$$

[9] $x(t)$ が絶対可積分であるとは，$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\ dt < \infty$ を満たすことをいう．

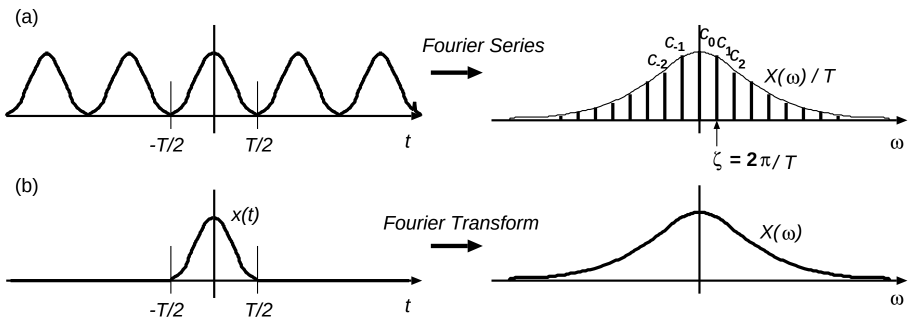

図 1.2: フーリエ級数とフーリエ変換の関係 ser_trn.eps

に代入することにより，フーリエ係数とフーリエ変換の関係式

$$c_n = \frac{1}{T}X(n\zeta) \tag{1.20}$$

が得られる．すなわち，周期信号のフーリエ係数は，周期信号の基本区間のみを取り出した信号のフーリエ変換の間隔 $\zeta(=\frac{2\pi}{T})$ 毎の値の $1/T$ 倍となる．式 (1.20) を式 (1.14) に代入すれば，周期信号 $x(t)$ をその基本区間のフーリエ変換 $X(\omega)$ の飛び飛びの値を用いて次式で表現することができる (図 1.2)．

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\zeta)\mathrm{e}^{in\zeta t} \tag{1.21}$$

線形性

時間軸における 2 つの信号の線形結合 $ax(t)+by(t)$ のフーリエ変換は，式 (1.18) の $x(t)$ に $ax(t)+by(t)$ を代入することにより

$$\mathcal{F}[ax(t)+by(t)] = a\mathcal{F}[x(t)] + b\mathcal{F}[y(t)]$$

となる．つまり，フーリエ変換は，線形変換である．

時間軸の反転

信号 $x(t)$ の時間軸を反転した信号 $x(-t)$ のフーリエ変換は，式 (1.18) に代入し，$\tau=-t$ と変数変換すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega(-\tau)}(-1)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-i(-\omega)\tau}d\tau = X(-\omega)$$

となるので，周波数軸でも反転したものとなる．

時間軸の伸縮

信号 $x(t)$ の時間軸を $a(>0)$ 倍した信号 $x(at)$ のフーリエ変換は，式 (1.18) の $x(t)$ に $x(at)$ を代入し，$\tau=at$ と変数変換すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{a}X\Big(\frac{\omega}{a}\Big), \quad a>0$$

となる．同様に，$x(at)$，$a<0$ のフーリエ変換は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = -\frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a<0$$

となるので，以上をまとめると，

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0$$

となり，時間軸を a 倍した信号のフーリエ変換は，元の信号のフーリエ変換に対し，周波数軸を $1/a$ 倍し，振幅を $1/|a|$ 倍したものとなることがわかる．

対称性

式 (1.19) において，t と ω の記号を交換し，ω を新たに $-\omega$ とすれば，

$$x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt$$

となる．上式と式 (1.18) と比較すれば，次の関係式が得られる．

$$\mathcal{F}[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$$

すなわち，信号 $x(t)$ を 2 度フーリエ変換したものは，もとの信号の軸の正負を反転し，2π を乗じたものとなる．これを時間軸と周波数軸の対称性 (双対性) という．

時間軸，周波数軸の推移

信号 $x(t)$ に対し，時刻 τ だけ推移した信号 $x(t-\tau)$ のフーリエ変換を考える．式 (1.18) の $x(t)$ を $x(t-\tau)$ に置き換えれば，

$$\mathcal{F}[x(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt$$

となり，右辺について，変数変換 $t-\tau=\xi$ を行えば

$$\mathcal{F}[x(t-\tau)] = X(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}$$

となる．したがって，時間軸を τ だけ推移させた信号のフーリエ変換は，もとの信号をフーリエ変換した結果に，$\mathrm{e}^{-i\omega\tau}$ を乗じたものとなる．

周波数軸においても同様に，$X(\omega)$ を ζ だけ推移させた $X(\omega-\zeta)$ の逆フーリエ変換は，

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega-\zeta)] = x(t)\mathrm{e}^{i\zeta t}$$

となる．したがって，周波数軸を ζ だけ推移させた信号の逆フーリエ変換は，元の信号を逆フーリエ変換した結果に，$\mathrm{e}^{i\zeta t}$ を乗じたものとなる．

時間微分

微分は，線形演算であることから，式 (1.19) の両辺を t で微分すると，

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega$$

となる．上式をフーリエ変換することにより，次の関係が得られる．

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = i\omega X(\omega)$$

すなわち，$x(t)$ を微分した信号のフーリエ変換は，元の信号をフーリエ変換した結果に，$i\omega$ を乗じたものとなる．

共役

信号 $x(t)$ に対する複素共役信号 $x^*(t)$ のフーリエ変換は，式 (1.18) において，$x(t)$ を $x^*(t)$ に置き換えることにより，

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega) \tag{1.22}$$

となる．すなわち，元の信号 $x(t)$ のフーリエ変換に対し，軸の正負を反転し，複素共役をとったものとなる．

信号 $x(t)$ が実関数である場合の性質

信号 $x(t)$ が実関数である場合，$x^*(t) = x(t)$ であることから，式 (1.22) より，$X(\omega) = X^*(-\omega)$ が成立することになる．この式の両辺の実部，および虚部をとれば，$\mathrm{Re}[X(\omega)] = \mathrm{Re}[X(-\omega)]$，$\mathrm{Im}[X(\omega)] = -\mathrm{Im}[X(-\omega)]$ となる．つまり，信号 $x(t)$ が実関数である場合，そのフーリエ変換は，実部が偶関数，虚部が奇関数になる．

信号 $x(t)$ が実偶関数，あるいは実奇関数である際の性質

信号 $x(t)$ が実数値をとる偶関数，つまり実偶関数である場合には，オイラーの公式 $\mathrm{e}^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[X(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt \\ &= 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt \\ \mathrm{Im}[X(\omega)] &= -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt = 0\end{aligned}$$

となる．つまり，実偶関数のフーリエ変換は，実部が偶関数，虚部が 0 になる．同様に，実奇関数のフーリエ変換は，実部が 0，虚部が奇関数になる．

パーセバルの等式

絶対可積分，かつ全区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に滑らかな信号 $x(t)$ に対しては，パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

が成立する．

畳み込み積分

信号 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ のそれぞれのフーリエ変換を $X(\omega)$，$Y(\omega)$，$Z(\omega)$ とする．周波数軸では，これらに以下の関係があるものとする．

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

これらの時間軸での関係を調べてみよう．上式の右辺を $x(t), y(t)$ を使って

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt$$

と表し，両辺を逆フーリェ変換すれば,

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y(t_1)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt_2\Big\}\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2)\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\omega(t-(t_1+t_2))}d\omega\Big\}dt_1dt_2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

となる．さて，時間軸推移の性質と，次節で述べるが，インパルス信号 $\delta(t)$ のフーリェ変換が 1 となることを利用すれば,

$$\mathcal{F}[\delta(t-(t_1+t_2))] = 1 \cdot \mathrm{e}^{-i\omega(t_1+t_2)}$$

であり，これを逆フーリェ変換すれば,

$$\delta(t-(t_1+t_2)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\omega(t_1+t_2)}\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega$$

となるので，式 (1.23) 右辺の { · } に代入すると,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2)\delta(t-(t_1+t_2))dt_1dt_2$$

となる．ここで，$t_1+t_2=\tau$ と変数変換することにより，周波数軸で積で表される信号の時間軸での表現

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t-t_1)dt_1$$

が得られる．一般に，上式右辺の演算を**畳み込み積分** (convolutional integral) といい，次式のように表記される．

$$x(t) * y(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{1.24}$$

同様に，時間軸における 2 つの信号の積 $z(t)=x(t)y(t)$ のフーリェ変換は,

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$$

となる．

式 (1.24) において，$t-\tau=\sigma$ と変数変換すれば,

$$x(t) * y(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} y(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma$$

となることから，畳み込み積分は，可換，すなわち変数の交換が可能な演算であることがわかる．また，$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ とおけば，式 (1.24) は,

$$z(t) = a\big\{x_1(t) * y(t)\big\} + b\big\{x_2(t) * y(t)\big\}$$

となることから，畳み込み演算は，$x(t)$ に関して，線形変換であることがわかる．また，可換であることから，$y(t)$ に関しても同様に線形性が成り立つ．

表 1.1: フーリェ変換の重要な性質

説明	時間軸での表現	周波数軸での表現
線形性	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
時間軸の反転	$x(-t)$	$X(-\omega)$
時間軸の伸縮	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
対称性	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
時間軸推移	$x(t-\tau)$	$X(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}$
周波数軸推移	$x(t)\mathrm{e}^{i\zeta t}$	$X(\omega-\zeta)$
時間微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$i\omega X(\omega)$
共役	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
畳み込み積分	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
積	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$

$X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$, $Y(\omega)=\mathcal{F}[y(t)]$ とする.

フーリェ変換の重要な性質のまとめ

これまで，説明したフーリェ変換の重要な性質を表 1.1 にまとめて示しておこう．ただし，$x(t), y(t)$ のフーリェ変換をそれぞれ $X(\omega), Y(\omega)$ とする.

演習 3　次式に示す二つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ の畳み込み積分 $x(t)*y(t)$ を求め，図示しなさい．ただし，$T_1 < T_2$ とする.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T_1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \\
y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T_2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}
\end{aligned}
$$

■

1.6　フーリェ変換の例

基本的な信号のフーリェ変換の例をいくつか示そう.

インパルス信号

実数の全区間で定義され, $t \neq 0$ に対しては常に $\delta(t)=0$ であり, また 0 を含むある区間で連続な任意の信号 $x(t)$ に対して,

$$
\left.
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt &= x(0) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1
\end{aligned}
\right\}
$$

となる信号 $\delta(t)$ をインパルス信号という．数学では，Dirac のデルタ関数と呼んでいる．インパルス信号 $\delta(t)$ のフーリェ変換は，定義式 (1.18) より,

$$
\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = 1
$$

となる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> int(Dirac(t)*exp(-I*w*t),t=-infinity..infinity);
                                        1
```

あるいは，積分変換のパッケージを利用して，

```
> with(inttrans):
> fourier(Dirac(t),t,w);
                                        1
```

としてもよい．ただし，パッケージの読み込みは，最初に一度だけ行えばよい．

直流信号

直流信号，すなわちすべての時刻 t において値 1 を持つ信号のフーリェ変換は，インパルス信号に対するフーリェ変換の結果とフーリェ変換の性質 (対称性) より，

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

となる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> fourier(1,t,w);
                                  2 Pi Dirac(w)
```

インパルス列信号

周期 τ を持つインパルス列信号 $\delta_\tau(t)$ を

$$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$$

と表すことにする．このとき, $\delta_\tau(t)$ のフーリェ変換は，以下のようにして求められる．インパルス列信号は，基本周期 τ の周期信号であることから，まず，そのフーリェ級数展開を考える．$\xi \equiv \dfrac{2\pi}{\tau}$ とすれば，インパルス列信号 $\delta_\tau(t)$ は，次のようにフーリェ級数展開される．

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{in\xi t}$$

直流信号のフーリェ変換，および周波数軸推移の性質を利用し，上式の両辺をフーリェ変換すれば，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta_\tau(t)] &= \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{in\xi t}\mathrm{e}^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\mathrm{e}^{-i(\omega - n\xi)t}\ dt \\
&= \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\xi) \\
&= \xi\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\xi) \\
&= \xi\delta_\xi(\omega) \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

となる．結局，インパルス列信号のフーリェ変換は，再び，周期 $\xi = \dfrac{2\pi}{\tau}$ のインパルス列となる．

矩形波

次式に示す値を持つ信号 $P_\tau(t)$ を矩形波，あるいは方形波という．

$$P_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{for} \quad |t| \le \tau \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

この矩形波 $P_\tau(t)$ のフーリェ変換は，フーリェ変換公式に代入し計算することにより，

$$\mathcal{F}[P_\tau(t)] = 2\frac{\sin(\tau\omega)}{\omega} = 2\tau\mathrm{sinc}(\tau\omega)$$

となる．ただし，上式中の $\mathrm{sinc}(x)$ は，**標本化関数** (sampling function)，あるいはシンク関数と呼ばれる．

$$\mathrm{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}$$

Maple では，以下のようになる．

```
> x:=Heaviside(t+tau)-Heaviside(t-tau);
            x := Heaviside(t + tau) - Heaviside(t - tau)


> simplify(fourier(x,t,w));
                              sin(tau w)
                            2 ----------
                                  w
```

シンク関数

シンク関数

$$x(t) = \frac{\xi}{\pi}\mathrm{sinc}(\xi t), \qquad \xi > 0$$

のフーリェ変換は，矩形関数

$$X(\omega) = P_\xi(\omega)$$

になる．Maple では，以下のようになる．

```
> simplify(fourier(sin(xi*t)/(t*Pi),t,w)) assuming xi>0;
            -1 + Heaviside(-w + xi) + Heaviside(w + xi)
```

1 次遅れ系

1 次遅れ系の応答は，

$$x(t) = \exp(-at)u(t), \qquad a > 0$$

として与えられる．この信号のフーリェ変換は，

$$X(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}$$

となる．Maple では，以下のようになる．

```
> fourier(exp(-a*t)*Heaviside(t),t,w) assuming a>0;
                                 1
                              -------
                              a + I w
```

2 次遅れ系

2 次遅れ系の応答は,

$$x(t) = t\exp(-at)u(t), \qquad a > 0$$

として与えられる．この信号のフーリェ変換は,

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + i\omega)^2}$$

となる．Maple では，以下のようになる．

```
> fourier(t*exp(-a*t)*Heaviside(t),t,w) assuming a>0;
                                          1
                                      ----------
                                               2
                                      (a + I w)
```

対称な減衰指数関数

対称な減衰指数関数

$$x(t) = \exp(-a|t|), \qquad a > 0$$

のフーリェ変換は,

$$X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

となる．Maple では，以下のようになる．

```
> fourier(exp(-a*abs(t)),t,w) assuming(a>0);
                                           a
                                      2 -------
                                          2    2
                                         a  + w
```

2 次減衰振動系

2 次減衰振動系の応答は,

$$x(t) = \exp(-at)\sin(\xi t)u(t), \qquad a > 0$$

あるいは,

$$x(t) = \exp(-at)\cos(\xi t)u(t), \qquad a > 0$$

として与えられる．この信号のフーリェ変換は,

$$X(\omega) = \frac{\xi}{(a + i\omega)^2 + \xi^2}$$

あるいは,

$$X(\omega) = \frac{a + i\xi}{(a + i\omega)^2 + \xi^2}$$

となる．Maple では，それぞれ，以下のようになる．

```
> simplify(fourier(exp(-a*t)*sin(xi*t)*Heaviside(t),t,w)) assuming(a>0,xi>0);
                                    xi
                      --------------------------------
                      (a - I xi + I w) (a + I xi + I w)
```

```
> simplify(fourier(exp(-a*t)*cos(xi*t)*Heaviside(t),t,w)) assuming(a>0,xi>0);
                                  a + I w
                      --------------------------------
                      (a - I xi + I w) (a + I xi + I w)
```

2 乗の速度で減衰する指数関数

2 乗の速度で減衰する指数関数

$$x(t) = \exp(-at^2), \qquad a > 0$$

のフーリェ変換は,

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-\omega^2/4a)$$

となる．Maple では，以下のようになる．

```
> fourier(exp(-a*t^2),t,w) assuming a>0;
                                            2
                          Pi               w
                     sqrt(----) exp(- 1/4 ----)
                          a                a
```

n 次遅れ系

$n-1$ 次遅れ系の応答

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at^2) u(t), \qquad a > 0, \;\; \xi > 0$$

のフーリェ変換は,

$$X(\omega) = \frac{1}{(a+i\omega)^n}$$

となる．Maple では，以下のようになる．

```
> simplify(fourier(t^(n-1)/(n-1)!*exp(-a*t)*Heaviside(t),t,w)) assuming(n::posint,a>0);
                                       (-n)
                            (a + I w)
```

その他

$$x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

のフーリェ変換は,

$$X(\omega) = \frac{\pi}{a} \exp(-a|\omega|)$$

表 1.2: 基本的な信号のフーリェ変換の例

$x(t)$	$F(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta_\tau(t)$	$\xi\delta_\xi(\omega),\quad(\xi=2\pi/\tau),\quad \tau>0$
$P_\tau(t)$	$2\dfrac{\sin(\tau\omega)}{\omega}=2\tau\mathrm{sinc}(\tau\omega),\quad \tau>0$
$\dfrac{\xi}{\pi}\mathrm{sinc}(\xi t)$	$P_\xi(\omega),\quad \xi>0$
$\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+i\omega},\quad a>0$
$t\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(a+i\omega)^2},\quad a>0$
$\mathrm{e}^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2},\quad a>0$
$\mathrm{e}^{-at}\sin(\xi t)u(t)$	$\dfrac{\xi}{(a+i\omega)^2+\xi^2},\quad a>0$
$\mathrm{e}^{-at}\cos(\xi t)u(t)$	$\dfrac{a+i\xi}{(a+i\omega)^2+\xi^2},\quad a>0$
e^{-at^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\omega^2/4a},\quad a>0$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(a+i\omega)^n},\quad a>0,\ n\in Z_+$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a\|\omega\|},\quad a\neq 0$
$\dfrac{\cos(bt)}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2a}(\mathrm{e}^{-a\|\omega-b\|}+\mathrm{e}^{-a\|\omega+b\|}),\quad a\neq 0$
$\dfrac{\sin(bt)}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2ai}(\mathrm{e}^{-a\|\omega-b\|}-\mathrm{e}^{a\|\omega+b\|}),\quad a\neq 0$

となる．Maple では，以下のように求められる．

```
> fourier(1/(a^2+t^2),t,w) assuming(a>0);
        exp(a w) Pi Heaviside(-w)   exp(-a w) Pi Heaviside(w)
        ------------------------- + -------------------------
                    a                           a

> fourier(1/(a^2+t^2),t,w) assuming(a<0);
         exp(-a w) Pi Heaviside(-w)   exp(a w) Pi Heaviside(w)
       - -------------------------- - ------------------------
                     a                           a
```

以上で述べた基本的な信号とそのほかいくつかの信号について，そのフーリェ変換をまとめて，表 1.2 に示しておこう．

第2章　ラプラス変換

2.1　ラプラス変換

フーリェ変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\ dt$$

では，変換先の変数 $i\omega$ は純虚数であった．これを複素数 $s = \sigma + i\omega$ とし，信号 $x(t)$ を $t \geq 0$ で定義されるものとして，

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\ dt \tag{2.1}$$

なる変換を考える．この変換が存在するならば，この変換を**ラプラス変換** (Laplace transform) といい，$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ で表す．ラプラス変換は，s の値によっては存在しない場合がある．一般に，信号 $x(t)$, $t \geq 0$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[x(t)]$ が，ある $s = s_0$ で存在するならば，$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ なる任意の s に対しても存在する．したがって，ラプラス変換が $\mathrm{Re}(s) > a$ で存在し，$\mathrm{Re}(s) < a$ では存在しないような実数 a が一意に定まる．この値 a を $x(t)$ のラプラス変換の収束座標といい，$\mathrm{Re}(s) > a$ をその収束領域とよぶ．ラプラス変換は，$x(t)$, $t \geq 0$ から $X(s)$ への変換であることから，関数空間から関数空間への変換である．こうしたことから，$x(t)$ を $X(s)$ の原像，$X(s)$ を $x(t)$ の像という．

次に，信号 $x(t)$ のフーリェ変換 $X(\omega)$ とラプラス変換 $X(s)$ の関係を考えてみよう．もし，ラプラス変換 $X(s)$ の収束領域に虚軸 ($i\omega$, $-\infty < \omega < \infty$) が含まれる場合には，$s = i\omega$ とおいたもの，つまり，$X(s)$ を虚軸で切り出したものがフーリェ変換 $X(\omega)$ ということになる．ラプラス変換 $X(s)$ の収束領域に虚軸が含まれない場合，$x(t)$ のフーリェ変換は存在しない．また，$x(t)$ のフーリェ変換 $X(\omega)$ が存在する場合，収束領域 $\mathrm{Re}(s) > 0$ においてラプラス変換 $X(s)$ が存在し，解析的である．

さて，$x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \geq 0$ のそれぞれのラプラス変換が存在し，

$$\mathcal{L}[x_1(t)] = \mathcal{L}[x_2(t)] \tag{2.2}$$

ならば，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ は，その不連続点を除いて完全に一致することが証明されている．すなわち，任意の $X(s)$ に対して，$x(t)$ を一意に決定できることになる．この変換を**逆ラプラス変換** (inverse Laplace transform) といい，$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ で表す．逆ラプラス変換は，Bromwich 経路の積分を用いて

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} X(s)\mathrm{e}^{st} ds \tag{2.3}$$

と与えられる．ただし，σ は，収束領域に含まれるように選ばれる．逆ラプラス変換は，留数積分法を用いて行うことが可能であるが，一般的には，次に述べるいくつかの信号に対するラプラス変換の例とラプラス変換の性質を使って，部分分数分解などを利用して行うことが多い．

2.2 ラプラス変換の性質

線形性

$x(t)$, $y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s)$, $Y(s)$ とする．このとき，$ax(t)+by(t)$ のラプラス変換は，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[ax(t)+by(t)] &= \int_0^\infty (ax(t)+by(t))\exp(-st)dt \\
&= a\int_0^\infty x(t)\exp(-st)dt + b\int_0^\infty y(t)\exp(-st)dt \\
&= aX(s)+bY(s)
\end{aligned}
$$

となる．つまり，ラプラス変換には線形性が成立する．

時間軸の伸縮

信号 $x(t)$ の時間軸を $a(>0)$ 倍した信号 $x(at)$ ラプラス変換は，$at=\tau$ と変数変換すれば，

$$
\mathcal{L}[x(at)] = \int_0^\infty x(at)\exp(-st)dt = \int_0^\infty x(\tau)\exp(-s\tau/a)\frac{1}{a}d\tau = \frac{1}{a}X(s/a)
$$

となる．

s 軸上の移動則

$x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ とする．つまり，

$$
X(s) = \int_0^\infty x(t)\exp(-st)dt
$$

が成立する．この式で s を $s-a$ で置き換えると，

$$
X(s-a) = \int_0^\infty x(t)\exp(-(s-a)t)dt = \int_0^\infty \big(\exp(at)x(t)\big)\exp(-st)dt = \mathcal{L}[\exp(at)x(t)]
$$

となる．

t 軸上の移動則

信号 $x(t)$ を時間軸で右に a だけシフトすることを考える．このように右にシフトした場合，$x(t)$, $-a \le t < 0$ の部分が時間シフトにより，$t \ge 0$ の範囲に出てくるが，ラプラス変換は，$t \ge 0$ で定義されている信号を対象にするので，この部分をゼロとおくことにする．つまり，信号 $x(t)$ を時間軸で右に a だけシフトした信号を

$$
x(t-a)u(t-a)
$$

と考える．ただし，$u(t)$ は，Heaviside 関数であり，

$$
u(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}
$$

である．$x(t-a)u(t-a)$ のラプラス変換は，$\tau = t-a$ と変数変換することにより，

$$
\mathcal{L}[x(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty x(t-a)u(t-a)\exp(-st)\ dt
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-a}^{\infty} x(\tau)u(\tau)\exp(-s(\tau+a))\ d\tau \\
&= \exp(-as)\int_0^{\infty} x(\tau)\exp(-s\tau)d\tau \\
&= \exp(-as)X(s)
\end{aligned}
$$

となる．つまり，$x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ に $\exp(-as)$ を乗じたものとなる．

微分則

信号 $x(t)$ を微分した信号 $x'(t)$ のラプラス変換は,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[x'(t)] &= \int_0^{\infty} x'(t)\exp(-st)dt \\
&= [x(t)\exp(-st)]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} x(t)\exp(-st)dt \\
&= -x(0) + sX(s)
\end{aligned}
$$

となる．2 階微分 $x''(t)$ については,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[x''(t)] &= -x'(0) + s(\mathcal{L}[x'(t)]) \\
&= -x'(0) + s(-x(0) + sX(s)) \\
&= -x'(0) - sx(0) + s^2X(s)
\end{aligned}
$$

となる．同様にして，n 階微分 $x^{(n)}(t)$ のラプラス変換は,

$$
\mathcal{L}[x^{(n)}(t)] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)
$$

となる．

積分則

$x(t) = y'(t)$ とすると，$y(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau$，$y(0) = 0$ である．これらを微分則

$$
\mathcal{L}[y'(t)] = s\mathcal{L}[y(t)] - y(0)
$$

に代入すると,

$$
\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[x(t)]
$$

となる．

像の微分則

ラプラス変換の定義式

$$
X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\exp(-st)dt
$$

の両辺を s で偏微分すると,

$$
X'(s) = \int_0^{\infty} x(t)(-t)\exp(-st)dt
$$

となるので，

$$\mathcal{L}[-tx(t)] = X'(s)$$

なる関係が得られる．同様に n 階微分すると，

$$X^{(n)}(s) = \int_0^\infty x(t)(-t)^n \exp(-st)dt$$

となるので，

$$\mathcal{L}[(-t)^n x(t)] = X^{(n)}(s)$$

なる関係が得られる．

像の積分則

$x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ を s から $+\infty$ まで積分したものは，

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty X(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty \int_0^\infty x(t)\exp(-\sigma t)\ dt\ d\sigma \\
&= \int_0^\infty x(t) \int_s^\infty \exp(-\sigma t)\ d\sigma\ dt \\
&= \int_0^\infty \exp(-st)\frac{x(t)}{t}dt \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{x(t)}{t}\right]
\end{aligned}$$

と $x(t)/t$ をラプラス変換したものに等しい．

畳み込み

$x(t)$，$y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s)$，$Y(s)$ とするとき，何をラプラス変換したら $X(s)Y(s)$ になるのだろうか．t 軸上の移動則より，任意の $\tau > 0$ に対し，

$$\exp(-\tau s)X(s) = \int_0^\infty x(t-\tau)u(t-\tau)\exp(-st)dt = \int_\tau^\infty x(t-\tau)\exp(-st)dt$$

である．また，

$$X(s)Y(s) = X(s)\int_0^\infty y(\tau)\exp(-s\tau)d\tau$$

に，先ほどの式を代入すると，

$$X(s)Y(s) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty y(\tau)x(t-\tau)\exp(-st)dt\ d\tau$$

となる．積分範囲に注意しながら，積分の順序を交換すると，

$$X(s)Y(s) = \int_0^\infty \exp(-st)\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau\ dt = \mathcal{L}\left[\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau\right]$$

となる．ここで，

$$x(t) * y(t) \equiv \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

は，$t \geq 0$ で定義された畳み込み積分である．

以上で述べたラプラス変換の重要な性質を表 2.1 にまとめた．

表 2.1: ラプラス変換の重要な性質

	$x(t)$	$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$
線形性	$ax(t)+by(t)$	$aX(s)+bY(s)$
相似	$x(at)$	$\dfrac{1}{a}X\left(\dfrac{s}{a}\right),\quad a>0$
s 軸上の移動則	$\mathrm{e}^{at}x(t)$	$X(s-a)$
t 軸上の移動則	$x(t-a)$	$\mathrm{e}^{-as}X(s),\ a\geq 0$
	$x(t+a)$	$\mathrm{e}^{as}X(s)-\mathrm{e}^{as}\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{-st}x(t)dt,\ a\geq 0$
微分則	$x^{(n)}(t)$	$s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x^{(1)}(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$
積分則	$\displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{s}X(s)$
像の微分則	$(-t)^nx(t)$	$X^{(n)}(s)$
像の積分則	$\dfrac{x(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty X(\sigma)d\sigma$
畳み込み	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$

2.3 ラプラス変換の例

代表的な信号のラプラス変換を求めてみよう．以下では，すべて，$x(t),\ t\leq 0$ を仮定する．

インパルス信号

インパルス信号

$$x(t)=\delta(t)$$

のラプラス変換は，

$$X(s)=\int_0^\infty \delta(t)\exp(-st)dt=1$$

となる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> int(Dirac(t)*exp(-s*t),t=0..infinity);
                                        1
```

インパルス信号は，数学では，Dirac のデルタ関数と呼ばれており，Maple では，Dirac(t) と書かれる．あるいは，積分変換のパッケージを利用して，

```
> with(inttrans):
> laplace(Dirac(t),t,s);
                                        1
```

としてもよい．ただし，パッケージの読み込みは，最初に一度だけ行えばよい．

直流信号

直流信号

$$x(t)=1$$

のラプラス変換は，$s>0$ に対して，

$$X(s)=\int_0^\infty \exp(-st)dt=-\frac{1}{s}[\exp(-st)]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

となる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> int(1*exp(-s*t),t=0..infinity) assuming s>0;
                                1/s
```

$s>0$ を仮定しないとラプラス変換が求まらないことに注意しよう．

線形に増加する信号

線形に増加する信号

$$x(t)=t$$

のラプラス変換は，$s>0$ に対して，

$$\begin{aligned}X(s) &= \int_0^\infty t\exp(-st)dt=\int_0^\infty t\Big(-\frac{1}{s}\exp(-st)\Big)'dt \\ &= \Big[-\frac{1}{s}t\exp(-st)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty -\frac{1}{s}\exp(-st)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{s}\exp(-st)dt=\frac{1}{s}\int_0^\infty \exp(-st)dt \\ &= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

となる．あるいは，直流信号に対するラプラス変換に対し，ラプラス変換の微分則を使っても求めることができる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> int(t*exp(-s*t),t=0..infinity) assuming s>0;
                                1
                               ----
                                 2
                                s
```

べき乗で増加する信号

n 乗で増加する信号

$$x(t)=t^n$$

のラプラス変換は，線形に増加する信号のラプラス変換を求めたプロセスを繰り返して起用することにより，

$$X(s)=\frac{n!}{s^{n+1}},\qquad s>0$$

と求められる．あるいは，直流信号，もしくは線形に増加する信号に対するラプラス変換に対し，ラプラス変換の微分則を使っても求めることができる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> simplify(int(t^n*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming n::posint, s>0;
                      (-n - 1)
                     s          GAMMA(n + 1)
```

ただし，GAMMA は，ガンマ関数であり，正の整数 n に対し，$\Gamma(n+1)=n!$ である．

1 次遅れ系の応答

信号

$$x(t) = \exp(at)$$

のラプラス変換は，$s > a$ に対して，

$$X(s) = \int_0^\infty \exp(at)\exp(-st)dt = \int_0^\infty \exp(-(s-a)t)dt = \frac{1}{s-a}$$

となる．あるいは，直流信号に対するラプラス変換に対し，s 軸上の移動則を使っても求めることができる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> int(exp(a*t)*exp(-s*t),t=0..infinity) assuming s>a;
                              1
                            -----
                            s - a
```

$s > a$ を仮定しないとラプラス変換が存在しないことに注意しよう．

2 次遅れ系の応答

信号

$$x(t) = t\exp(at)$$

のラプラス変換は，$s > a$ に対して，

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty t\exp(at)\exp(-st)dt = \int_0^\infty t\Big(-\frac{1}{s-a}\exp(-(s-a)t)\Big)'dt \\ &= \Big[-\frac{1}{s-a}t\exp(-(s-a)t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s-a}\exp(-(s-a)t)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{s-a}\exp(-(s-a)t)dt = \frac{1}{s-a}\int_0^\infty \exp(-(s-a)t)dt \\ &= \frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2} \end{aligned}$$

となる．あるいは，1 次遅れ系の応答に対するラプラス変換に対し，ラプラス変換の微分則を適用することにより，もしくは，線形に増加する信号に対するラプラス変換に対し，s 軸上の移動則を使っても求めることができる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> int(t*exp(a*t)*exp(-s*t),t=0..infinity) assuming s>a;
                              1
                           --------
                                  2
                           (s - a)
```

$n+1$ 次遅れ系の応答

信号

$$x(t) = t^n\exp(at)$$

のラプラス変換は，2 次遅れ系の応答のラプラス変換を求めたプロセスを繰り返して適用することにより，$s > a$ に対して，

$$X(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

と求められる．あるいは，ラプラス変換の微分則，もしくは，s 軸上の移動則を使っても求めることができる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> simplify[power](int(t^n*exp(a*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>a, n::posint;
                         (-n - 1)
                  (s - a)         GAMMA(n + 1)
```

2 次振動系：余弦波，正弦波

余弦波と正弦波に対するラプラス変換は，オイラーの関係式

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$$

と，ラプラス変換の線形性を使うことにより，$s > 0$ に対して，それぞれ

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

と求められる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> simplify(int(cos(w*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>0;
                                  s
                               -------
                                2    2
                               s  + w

> simplify(int(sin(w*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>0;
                                  w
                               -------
                                2    2
                               s  + w
```

双曲線余弦波，双曲線正弦波

双曲線余弦波と双曲線正弦波に対するラプラス変換は，オイラーの関係式

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$$

と，ラプラス変換の線形性を使うことにより，それぞれ

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2-a^2}, \qquad \mathcal{L}[\sinh(at)] = \frac{a}{s^2-a^2}$$

と求められる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> simplify(int(cosh(a*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>a, a>0;
                                  s
```

```
           --------
              2    2
           -a   + s
```

```
> simplify(int(sinh(a*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>a, a>0;
                                   a
                                --------
                                  2    2
                                -a   + s
```

2 次減衰振動系

減衰する余弦波と正弦波に対するラプラス変換は，余弦波と正弦波に対するラプラス変換とラプラス変換の s 軸上の移動則を適用することにより，それぞれ

$$\mathcal{L}[\exp(at)\cos(\omega t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}[\exp(at)\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

と求められる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> simplify(int(exp(a*t)*cos(w*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>a;
                                 s - a
                          --------------------
                           2            2    2
                          s  - 2 s a + a  + w
```

```
> simplify(int(exp(a*t)*sin(w*t)*exp(-s*t),t=0..infinity)) assuming s>a;
                                   w
                          --------------------
                           2            2    2
                          s  - 2 s a + a  + w
```

インパルス列信号

$t \geq 0$ で無限に続く間隔 τ のインパルス列信号

$$\delta_\tau(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau)$$

のラプラス変換は，インパルス信号に対するラプラス変換と t 軸上の移動則を用いて，

$$\mathcal{L}[\delta_\tau(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\tau s) = \frac{1}{1-\exp(-\tau s)}$$

と求められる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> laplace(sum('Dirac(t-n*tau)','n'=0..infinity),t,s) assuming s>0, tau>0;
                               undefined
                            ---------------
                            1 - exp(-s tau)
```

表 2.2: ラプラス変換対

$x(t)$	$X(s)$	収束領域
$\delta(t)$	1	all s
1	$\dfrac{1}{s}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
$t^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(s)$
$t\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	$\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(s)$
$t^n\mathrm{e}^{at} \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(s)$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$a < \mathrm{Re}(s)$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$a < \mathrm{Re}(s)$
$\mathrm{e}^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$a < \mathrm{Re}(s)$
$\mathrm{e}^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$a < \mathrm{Re}(s)$
$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t))$	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
$\dfrac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$0 < \mathrm{Re}(s)$
$\delta_\tau(t), \quad t \geq 0$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}$	all s

undefined となるが，これは，本来，デルタ関数 $\delta(t)$ は，

$$\int_{-a}^{+a} \delta(t) = 1, \qquad a > 0$$

なる性質を持っているのに対し，ラプラス変換では，0 から無限大まで積分を行うことによるものである．

以上紹介した代表的な信号のラプラス変換の例を表 2.2 に示す．

2.4 逆ラプラス変換

逆ラプラス変換は，前述したように，Bromwich 経路の積分を用いて

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)\exp(st)ds \tag{2.4}$$

と与えられる．ただし，σ は，収束領域に含まれるように選ばれる．逆ラプラス変換は，留数積分法を用いて行うことが可能であるが，一般的には，これまでに述べてきたいくつかの信号に対するラプラス変換とラプラス変換の性質を組み合わせて，部分分数分解などを利用して行うことが多い．こうした方法については，後述するとして，留数積分法により逆ラプラス変換を行う例を示す．

まず，複素関数論における留数積分法を思い出そう．複素関数 $f(z)$ を単純閉路 C に沿って反時計回りに

周回積分すると，

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\ f(z)$$

となる．ただし，Res $f(z)$ は，$f(z)$ の留数を表し，右辺の総和は，単純閉路 C に囲まれた内部にある $f(z)$ のすべての留数に対して行うことを意味する．$X(s)\exp(st)$ を経路 $\sigma + R\exp(it), t = \pi/2 \to 3\pi/2$ での線積分が $R \to \infty$ に対して 0 になるならば，式 (2.4) は，

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)\exp(st)ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(s)\exp(st)ds \tag{2.5}$$

と周回積分を用いて表現することができる．ただし，経路 C は，

$$\sigma + it, t = -\infty \to \infty, \quad \sigma + R\exp(it), t = \pi/2 \to 3\pi/2$$

を表す．したがって，留数積分法によって，式 (2.5) は，経路 C 内にあるすべての留数を足し合わせた

$$x(t) = \sum \mathrm{Res}\ X(s)\exp(st) \tag{2.6}$$

となる．一例を示そう．$X(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ の逆ラプラス変換を求めてみよう．その前に，複素関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で m 位の極を持つ場合の $z = z_0$ での留数を求める公式

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)}$$

を思い出そう．$X(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ は，$s = a$ で $n+1$ 位の極を持つから，この公式を利用することにより，

$$x(t) = \mathrm{Res}_{s=a}\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\exp(st) = \lim_{s\to a}\frac{1}{n!}(n!\exp(st))^{(n)} = t^n\exp(at)$$

として逆変換が求められる．これは，表 2.2 に示したラプラス変換対と一致している．

一方，留数積分法によらない逆ラプラス変換は，これまでに述べてきたいくつかの信号に対するラプラス変換とラプラス変換の性質を組み合わせて，部分分数分解などを利用して行う．そのための基本戦略は，与えられた s の関数に対し，表 2.2 に示したように既にその逆ラプラス変換が分っている形の和の形式に直すことである．和の形式に直せれば，ラプラス変換の線形性により，各項ごとに対応する t の関数を求め，それらの和を求め，式を整理することにより，逆ラプラス変換が求められる．

一例を示そう．

$$X(s) = \frac{3s}{s^2+2s-8}$$

の逆ラプラス変換 $x(t)$ を求めてみよう．分母を因数分解することにより，

$$X(s) = \frac{3s}{(s-2)(s+4)}$$

となる．この式の右辺を部分分数分解するため，

$$\frac{3s}{(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+4}$$

とおこう．A, B を求めるための手段は，2 つある．この場合，最も簡単な手法は，両辺に $s-2$ を乗じて得られる

$$\frac{3s}{s+4} = A + \frac{B(s-2)}{s+4}$$

に，$s = 2$ を代入することにより，

$$A = 1$$

を得，同様に，$s+4$ を乗じて，$s=-4$ とおけば，

$$B = 2$$

が得られるという手法である．もう一方の方法は，分母を通分して，

$$\frac{3s}{(s-2)(s+4)} = \frac{A(s+4)}{(s-2)(s+4)} + \frac{B(s-2)}{(s-2)(s+4)} = \frac{(A+B)s+4A-2B}{(s-2)(s+4)}$$

とし，s の各べきの係数で左辺と右辺のそれぞれの分子を比較することにより，

$$A+B=3, \qquad 4A-2B=0$$

なる連立方程式を得，これを解くことにより，

$$A=1, \qquad B=2$$

を得るものである．ゆえに，

$$X(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+4}$$

であるから，表 2.2 により，

$$x(t) = \exp(2t) + 2\exp(-4t)$$

が得られる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> x:=invlaplace(3*s/(s-2)/(s+4),s,t);
              x := 3 exp(-t) (cosh(3 t) - 1/3 sinh(3 t))


> simplify(expand(convert(x,exp)));
                    exp(2 t) + 2 exp(-4 t)
```

逆ラプラス変換を行うためには，invlaplace を使う．また，双曲線関数を用いて結果が表示されたものを指数関数を用いて表現しなおしている．

もう一つ，例を与えよう．

$$X(s) = \frac{-4s+10}{(s-2)^2}$$

の逆ラプラス変換 $x(t)$ を求めてみよう．部分分数分解するため，

$$\frac{-4s+10}{(s-2)^2} = \frac{A}{(s-2)^2} + \frac{B}{s-2}$$

とおく．両辺に $(s-2)^2$ を乗じて，$s=2$ とおけば，

$$A = 2$$

が得られる．両辺に $(s-2)^2$ を乗じて，s で微分すれば，

$$B = -4$$

が得られる．つまり，

$$X(s) = \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{-4}{s-2}$$

となる．第一項については，t のラプラス変換が $1/s^2$ であることと，s 軸上の移動則を組み合わせることにより，

$$x(t) = 2t\exp(2t) - 4\exp(2t) = (2t-4)\exp(2t)$$

として逆ラプラス変換を求められる．Maple を使うと，以下のようになる．

```
> x:=invlaplace((-4*s+10)/(s-2)^2,s,t);
                         x := (2 t - 4) exp(2 t)
```

部分分数分解においては，分子多項式のおき方に注意しなければならない．分母多項式が以下のように因数分解できたとしよう．

$$\prod_{m=1}^{N} P_m(k_m)^{n_m}$$

ただし，$P_m(k_m)$ は，最大次数 k_m の s の多項式を表すものとする．$P_m(k_m)^{n_m}$ は，その n_m 乗を表す．このような分母多項式を持つ場合，部分分数分解における各項は，以下のようにおかなければならない．

$$X(s) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{h=1}^{n_m} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{k_m-1} A_{m,h,j} s^j}{P_m(k_m)^{n_m}}$$

ただし，$A_{m,h,j}$ は，多項式の係数である．連立方程式により，これらの係数を求めなければならないので，手計算すると大変であるが，現在では，計算機を使えば，たちどころに求められる．

2.5 ラプラス変換を利用した線形常微分方程式の求解

信号 $x(t)$ が n 回微分可能であるとすれば，表 2.1 に示したラプラス変換の微分に関する性質より，$\dfrac{d^n}{dt^n}x(t)$ のラプラス変換は，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n X(s) - x(+0)s^{n-1} - \frac{d}{dt}x(+0)s^{n-2} - \cdots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(+0) \tag{2.7}$$

となり，s の多項式で表現される．そのため，常微分方程式は，一度，ラプラス変換し，s に関する代数方程式を解いた後，逆ラプラス変換することにより，比較的容易にその解を得ることが可能になる．いくつか例を紹介しよう．

バネに付けたおもりの変位を $x(t)$，おもりの質量を m，バネの弾性係数を k として，外力が全くないものとすれば，$x(t)$ は，常微分方程式

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \tag{2.8}$$

を満たす．この微分方程式をラプラス変換を用いて解いてみよう．$x(t)$ のラプラス変換を $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ とすると，上式のラプラス変換は

$$m\Big\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\Big\} + kX(s) = 0 \tag{2.9}$$

となり，$X(s)$ について陽に表現し直せば

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x(0)s + x'(0)}{s^2 + \dfrac{k}{m}} \\ &= x(0)\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)^2} + \frac{x'(0)}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}\frac{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}{s^2 + \left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)^2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる．上式を逆ラプラス変換すると，$x(t)$ は，

$$x(t) = x(0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{x'(0)}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{2.11}$$

として得られる．これは，角周波数 $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動となることを表している．Maple で微分方程式を解くためには，パッケージ DEtools をロードした後，微分方程式を定義し，dsolve で解く．結果は，

```
> with(DEtools):
> ode:={m*diff(x(t),t$2)+k*x(t), x(0)=a, D(x)(0)=b};
                                        / 2        \
                                        |d         |
        ode := {x(0) = a, D(x)(0) = b, m |--- x(t)| + k x(t)}
                                        |  2       |
                                        \dt        /


> dsolve(ode);
                              1/2
                     1/2     k    t
                  b m    sin(------)
                               1/2             1/2
                              m               k    t
           x(t) = ------------------ + a cos(------)
                          1/2                   1/2
                         k                     m
```

となる．

次に，質量 m を持つある物体に，外力 $y(t)$ が与えられたときのその物体の変位 $x(t)$ を求めてみよう．物体に働く粘性摩擦係数を k とすれば，微分方程式

$$mx''(t) + kx'(t) = y(t) \tag{2.12}$$

が成り立つ．両辺をラプラス変換すれば

$$m\Big\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\Big\} + k\Big\{sX(s) - x(0)\Big\} = Y(s) \tag{2.13}$$

となり，$X(s)$ に関して陽に表現すれば

$$X(s) = \frac{mx(0)s + mx'(0) + kx(0) + Y(s)}{ms^2 + ks} \tag{2.14}$$

となる．ここで，分子を初期値に依存する項と $Y(s)$ に分け，分母を部分分数に分解して表せば

$$X(s) = \Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda}\Big)\frac{x'(0)}{\lambda} + \frac{x(0)}{s} + \Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda}\Big)\frac{Y(s)}{k} \tag{2.15}$$

となる．ただし，$\lambda = \dfrac{k}{m}$ とする．上式を逆ラプラス変換すれば，次式で示すようにこの物体の変位 $x(t)$ が得られる．

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\lambda}x'(0)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) + x(0) + (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) * \frac{y(t)}{k} \\ &= \frac{1}{\lambda}x'(0)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) + x(0) + \frac{1}{k}\int_0^t (1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)})y(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.16}$$

ここで示した力学系のみならず，物理学，工学，生物学，経済学などで現れる微分方程式で表現された系，システムの解析には，ラプラス変換が非常に有効である．

第 3 章　線形時不変システムの表現

3.1　線形時不変システム

第 2 章では，信号が様々な周波数の複素指数関数の和で表現できることを学んだ．次に，ある信号がシステムに入力され，なんらかの作用を受けてシステムから出力される場合，システムでこの信号はどのような作用を受けているのか，その作用をどのように表現したら良いのかについて考えてゆくことにしよう．一般的に，システムとは，組織，制度，体系，方法などを指すことが多いが，これらに限定せず，ありとあらゆるものをシステムとみなすことができる．システムに入る信号を**入力信号**，あるいは単に**入力**といい，システムから出てくる信号を**出力信号**，あるいは単に**出力**という．入力，出力としては，電気信号や化学物質，光，音，数字，命令，人，動物など，あらゆるものが対象になりうる．もちろん，入力や出力を持たない場合もシステムの特殊な場合として考えうる．

システムへの入力を x，システムからの出力を y とすれば，それらの関係は，関数 $f(\cdot)$ を用いて

$$y = f(x)$$

と表現される．また，入力と出力がなんらかの変数，例えば時刻 t の関数，すなわち信号 $x(t)$ ならば，出力 $y(t)$ は，関数の関数，すなわち汎関数 $F[\cdot]$ を用いて，

$$y(t) = F[x(t)]$$

と表現される．ここで，

$$y(t+\tau) = F[x(t+\tau)], \qquad \forall\tau$$

が成り立つ場合，汎関数 $F[\cdot]$ は，時刻 t に依存しないことになり，こうしたシステムを**定常** (stationary) あるいは**時不変** (time invariant) **システム**という．一方，上式を満たさないシステム，つまり，時刻 t で汎関数 $F[\cdot]$ が変化するシステムを**非定常** (non-stationary) **システム**という．

システムは，その作用，すなわち汎関数 $F[\cdot]$ が線形的である場合とそうでない場合に分けられる．作用が線形的であるとは，その入出力関係において重ね合わせの原理が成立する，すなわち，任意の定数 a, b と入力 $x_1(t), x_2(t)$ に対し，

$$F[ax_1(t) + bx_2(t)] = aF[x_1(t)] + bF[x_2(t)]$$

が成立することである．こうした重ね合わせの原理が成立するシステムを**線形** (linear) **システム**といい，成立しないシステムを**非線形** (nonlinear) **システム**という．線形，かつ時不変なシステムを**線形時不変** (Linear Time Invariant ; LTI) **システム**といい，本章では，時刻を変数とする一組の入力 $x(t)$ と出力 $x(t)$ を持つ線形時不変なシステムを対象とする．線形システム，非線形システムを問わず，汎関数 $F[\cdot]$ が定まれば，入力 $x(t)$ から出力 $y(t)$ は一意に求められるが，一般に出力 $y(t)$ から入力 $x(t)$ への変換は一意的ではない．

3.2　線形時不変システムの表現

我々の目的は，あるシステムが与えられ，その入力 $x(t)$，出力 $y(t)$ を観測し，それらからシステムの振る舞い，特徴，特性などを知ることである．システムの振る舞いを知るとは，システムに任意の入力 $x(t)$

を与えた際の出力 $y(t)$ を予測できることである．これにより，システムに具体的な入力を与えずに，システムの動作を計算機などによりシミュレートできるようになり，様々な利用が期待されることになる．また，システムの特徴，特性が表現できれば，ある目的でシステムを設計した場合，その目的にどれだけ適したシステムであるかを表現し，評価することが可能になる．

システムにある入力 $x(t)$ を与えた際の出力 $y(t)$ を知るためには，汎関数 $F[\cdot]$ をなんらかの手段で記述しなければならない．汎関数 $F[\cdot]$ が定められれば，その入出力に関してシステムを表現したことになる．本章では，線形時不変システムの汎関数 $F[\cdot]$ の表現，及びその特徴，特性の表現について学ぶことにする．

まず，もっとも簡単なインパルス信号 $\delta(t)$ をシステムに入力した際の出力

$$h(t) = F[\delta(t)]$$

を考えることにしよう．$h(t)$ は，インパルスに対する応答であるから，**インパルス応答** (impulse response)，もしくは，**線形インパルス応答** (linear impulse response) と呼ばれる．連続な信号 $x(t)$ は，デルタ関数の性質より，

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta)\delta(t-\zeta)d\zeta$$

と表現することが可能であるから，この $x(t)$ を入力した際のシステムの出力 $y(t)$ は，次式で表現される．

$$y(t) = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta)\delta(t-\zeta)d\zeta\right]$$

今，システムは線形と仮定しているから，上式は，

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta)F[\delta(t-\zeta)]d\zeta$$

となり，さらに，時不変であるとする仮定から，

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta)h(t-\zeta)d\zeta$$

となる．あるいは，$t-\zeta$ を改めて τ とおく変数変換を行えば，結局，システムの出力 $y(t)$ はインパルス応答 $h(t)$ と入力 $x(t)$ の畳み込み積分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{3.1}$$

として書くことができる．式 (3.1) から分かるように，線形時不変システムにおいては，そのインパルス応答 $h(t)$ が分かれば，任意の入力 $x(t)$ に対する出力 $y(t)$ を完全に知ることができる．つまり，システムは式 (3.1) で表現できることになる．こうしたシステムの表現を**積分表記**という．また，インパルス応答 $h(\tau)$ を積分表記の**核**という．

インパルス応答 $h(t)$ を用いたシステムの表現を直感的に理解するために，インパルス応答が $h(t) = c\delta(t)$ である場合を考えよう．この場合，システムの出力 $y(t)$ は，

$$y(t) = cx(t)$$

と表現できる．これは，時刻 t で，その時点での入力 $x(t)$ が c 倍されて出力されることを表し，t 以外の時刻の入力 $x(t_0), t_0 \neq t$ には依存しないことを意味する．これに対し，時刻 t での出力 $y(t)$ が $\tau = t - t_0$ だけ過去の入力 $x(t_0) = x(t-\tau)$ に依存する，つまり，$h(\tau)$ 倍されて出力されることを表現したものが，式 (3.1) である．つまり，インパルス応答 $h(\tau)$ は，システムの τ 秒前の入力に対する記憶，あるいは出力に対する寄与を表すと考えることができる．仮に，インパルス応答が

$$h(\tau) = 0, \qquad \forall \tau > R$$

を満たすならば，システムの出力は，R 時刻以前の入力には依存しないことになる．この式を満たす最小の R をシステムの**記憶長** (record length) という．また，インパルス応答 $h(\tau)$ が

$$h(\tau) = 0, \qquad \forall \tau < 0 \tag{3.2}$$

を満たさない場合には，時刻 t での出力 $y(t)$ は，未来の入力 $x(t_0), t_0 > t$ に依存する，具体的には，時刻 $t = 0$ でのインパルス入力 $\delta(t)$ に対し，$t < 0$ で先行して出力が発生することになる． こうしたシステムは，**因果律**を満たさない，あるいは**因果的** (causal) でないという．逆に，式 (3.2) を満たすシステムを，因果律を満たす，あるいは因果的なシステムという．因果的なシステムでは，システムの入出力関係は，式 (3.1) の代わりに，次式で表現される．

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{3.3}$$

本章では，始めに，因果的な線形時不変システムに限定してその表現法，特徴の表現について学び，本章の最後で，因果律を満たさない線形時不変システムについて触れる．

最後に，システムの安定性を定義しておこう．有界な入力に対し，出力も有界となるシステムを**安定** (stable) であるという．システムが安定であるための必要十分条件は，

$$\int_{-\infty}^\infty |h(t)|dt < \infty \tag{3.4}$$

を満たすことである．

3.3 伝達関数

因果律を満たす線形時不変システムの入出力関係は，式 (3.3) で表現することができた．システムへの入力 $x(t)$ のラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ が存在するならば，システムの出力 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ は，

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty y(t)\ \mathrm{e}^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau\ \mathrm{e}^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty h(\tau) \int_0^\infty x(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}dt\ d\tau \end{aligned} \tag{3.5}$$

となり，ラプラス変換の性質を利用すれば，$\displaystyle\int_0^\infty x(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}dt$ は $x(t-\tau)$ のラプラス変換 $X(s)\mathrm{e}^{-\tau s}$ になるから，

$$Y(s) = X(s)\int_0^\infty h(\tau)\mathrm{e}^{-\tau s}d\tau \tag{3.6}$$

となる．ここで，インパルス応答 $h(t)$ のラプラス変換を

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^\infty h(t)\mathrm{e}^{-st}dt \tag{3.7}$$

とおけば，システムの出力 $Y(s)$ は，$H(s)$ と $X(s)$ の積

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{3.8}$$

で表現できることになる．インパルス応答 $h(t)$ のラプラス変換 $H(s)$ を**伝達関数** (transmission function) という．式 (3.7) の代わりに，ラプラス変換可能なある入出力対が存在するならば，伝達関数を

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{3.9}$$

として求めることもできる．

次に，伝達関数の意味を考えてみよう．前章で述べたように，物理的なシステムは，常微分方程式で記述できることが多い．特に 2 つの変量 $x(t), y(t)$ があり，それらの間に線形時不変性があるものとすれば，次式のような線形定係数常微分方程式で表現できることが多い．

$$y(t) + \sum_{k=1}^{M} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

この式は，$x(t)$ がシステムへの入力，$y(t)$ がシステムの出力であるものとすれば，システムの入出力関係を微分方程式で表現したものである．式 (3.1) の積分表記に対して，こうしたシステムの表現を**微分表記**という．積分表記は，システムの出力が入力とインパルス応答の畳み込み積分で表現されるため，与えられた入力に対するシステムの出力を算出する際に有用である．一方，微分表記は，システムの物理的な機構に密着した表現であり，システムの物理構造を理解するために有用である．我々の次の目的は，これら 2 種類のシステムの表現の間の関係を理解し，相互に変換できるようになることである．

入出力信号 $x(t), y(t)$ のそれぞれのラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)], Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ が存在するならば，上式のラプラス変換は，

$$Y(s)\Big(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k s^k\Big) = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k + I(s) \tag{3.10}$$

とかける．ただし，$I(s)$ は，初期値に依存する s の多項式を表す．したがって，システムの出力 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ は，

$$Y(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k s^k} X(s) + \frac{I(s)}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k s^k}$$

と書ける．仮に初期値がゼロ，すなわち $I(s) = 0$ ならば，式 (3.8) より，伝達関数は，

$$H(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k s^k} \tag{3.11}$$

となる．つまり，インパルス応答 $h(t)$ のラプラス変換を上記のように s の有理式で表現できれば，システムの物理的な構造を直接反映する微分表記が得られる．

一方，先にシステムの微分表記が与えられた場合，それから積分表記を得る場合には，どのようにしたらよいのだろうか．式 (3.11) を因数分解すれば，

$$H(s) = A \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{M} (s - \beta_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{N} (s - \alpha_k)} \tag{3.12}$$

と書ける．ただし，A は実定数である．式 (3.12) において，複素定数 α_k は，伝達関数 $H(s)|_{s=\alpha_k}$ が絶対値無限大になることから，s 平面における**極** (pole) と呼ばれ，また，複素定数 β_k は，伝達関数 $H(s)|_{s=\beta_k}$ が 0 になることから，s 平面における**零点** (zero) と呼ばれている．式 (3.11) における多項式の係数 a_k, b_k が実数であることから，実数ではない極 α_k が存在する場合には，必ず，その共役の位置に極 $\alpha_l = \alpha_k^*$，$l \neq k$ が存在する．互いに共役の位置にある極の組 α_k, α_k^* により，$(s - \alpha_k)(s - \alpha_k^*) = s^2 - 2\mathrm{Re}[\alpha_k]s + 1$ と多項式の係数が実数であるという制約を満たすことができる．零点 β_k についても同様である．

3.4　システムの安定性と周波数特性

式 (3.12) は，分母多項式に重根が存在しない，すなわち等しい位置に複数の極が存在していなければ，

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - \alpha_k} \tag{3.13}$$

と部分分数展開できる．これを表 2.2 に従って，逆ラプラス変換することにより，インパルス応答は，

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \mathrm{e}^{\alpha_k t} \tag{3.14}$$

と求められる．また，α_k が m 重根である場合には，$\dfrac{1}{(s-\alpha_k)^m}$ の項は，

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{A_{k,n}}{(s-\alpha_k)^n} \tag{3.15}$$

と部分分数展開が可能なので，インパルス応答 $h(t)$ には，その逆ラプラス変換

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{A_{k,n}}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{\alpha_k t} \tag{3.16}$$

が加わることになる．式 (3.14),(3.16) を見れば分かるように，極 a_k を含む項は，時間軸では $\mathrm{e}^{\alpha_k t}$ を含む項となる．したがって，極 α_k が s 平面の虚軸よりも右半面に存在する場合，その項は時間軸では $t \to \infty$ で（振動）発散し，s 平面の左半面に存在する場合，$t \to \infty$ で（振動）減衰し，虚軸上にある場合，直流的，あるいは持続振動することが分かる．これらより，システムが安定であるための必要十分条件：式 (3.4) は，伝達関数の極が一つも s 平面の虚軸を含む右半面に存在しないことであると言い換えることができる．

第 1 章で，音声データ，電磁波あるいは機械振動などの周期信号は，種々の周波数 $n\omega$ の複素指数関数 $\mathrm{e}^{in\omega t}$ の線形和で表現できることを述べた．次に，因果的な線形時不変システムに複素指数関数 $\mathrm{e}^{i\omega t}$ を入力した際の出力を考えることにしよう．式 (3.3) に，$x(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$ を代入すれば，

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty h(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty h(\tau) \mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \mathrm{e}^{i\omega t} \int_0^\infty h(\tau) \mathrm{e}^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \mathrm{e}^{i\omega t} H(s)|_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．上式は，周波数 ω の複素指数関数 $\mathrm{e}^{i\omega t}$ を因果的な線形時不変システムに入力した場合，その出力は，入力と同じ周波数 ω の複素指数関数になるが，振幅および位相は $H(s)|_{s=i\omega}$ により変化することを表している．こうした周波数 ω の複素指数関数を入力した際の出力の振幅，位相の変化を**周波数伝達関数**，あるいは**周波数特性** (frequency property) という．線形時不変システムの周波数伝達関数は，伝達関数 $H(s)$ を虚軸に沿って切り出したものであるが，システムが安定ならば，伝達関数と周波数伝達関数は 1 対 1 に対応する．したがって，周波数伝達関数 $H(s)|_{s=i\omega}$ は，混同の恐れがない場合，単に，$H(i\omega)$ あるいは $H(\omega)$ と書く．また，周波数伝達関数の絶対値 $|H(\omega)|$ は**振幅特性** (gain)，位相 $\angle H(\omega)$ は**位相特性** (phase) と呼ばれる．周波数伝達関数は，こうした振幅特性と位相特性で完全に表現される．

第 4 章　離散時間信号とその表現

4.1　信号の標本化

これまでは，連続な値を取りうる時刻 t の関数としての信号 $x(t)$ を扱った．任意の時刻 t について，$x(t)$ を記録しておくためには，無限の記憶容量が必要なことは明らかであり，実際には離散的な t についてしか $x(t)$ を記録することができない．ここで，離散的な t についてのみ定義される $x(t)$ を $\check{x}(t)$ と書くことにする．定義されない t については，便宜上，$\check{x}(t) = 0$ とする．このような $\check{x}(t)$ を $x(t)$ の**標本化信号**，あるいは**離散時間信号** (discrete time singal) といい，$x(t)$ から $\check{x}(t)$ を得る操作を**標本化**，**サンプリング** (sampling) という．次に，離散時間信号 $\check{x}(t)$ に対する三角関数による分解，すなわちフーリエ変換を考えることにしよう．

さて，こうした標本化を行った場合，離散時間信号 $\check{x}(t)$ から元の信号 $x(t)$ を復元することが可能なのだろうか，あるいはむやみに標本化しても元の信号 $x(t)$ の特徴を失わないのか疑問が湧いてきたことであろう．直感的に，$x(t)$ が滑らかに変化するならば，荒い間隔で $x(t)$ を標本化すればよく，一方 $x(t)$ が急峻に変化するならば，細かい間隔で標本化しなければならないことが推測できるであろう．本章では，$x(t)$ の標本化が一定間隔で行われるものと仮定する．また，この間隔を**標本間隔**，あるいは**サンプリング間隔** (sampling period)，その逆数を**標本化周波数**，あるいは**サンプリング周波数** (sampling rate) という．本節では，離散時間信号 $\check{x}(t)$ から元の信号 $x(t)$ を復元可能な標本間隔の選び方を与える定理を紹介しよう．

信号 $x(t)$ を標本間隔 τ で標本化して得られる離散時間信号を $\check{x}_\tau(t)$ と書くことにする．離散時間信号 $\check{x}_\tau(t)$ は，$x(t)$ と間隔 τ のインパルス列信号 $\delta_\tau(t)$ の積

$$\check{x}_\tau(t) = x(t)\delta_\tau(t) \tag{4.1}$$

で表現することができる．また，間隔 τ のインパルス列信号 $\delta_\tau(t)$ のフーリエ変換は，表 1.2 より，$\frac{2\pi}{\tau}\delta_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega)$ であり，周波数軸でもインパルス列になる．信号 $x(t)$，離散時間信号 $\check{x}_\tau(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $X(\omega)$，$\check{X}_\tau(\omega)$ とする．時間軸での 2 つの信号の積は，表 1.1 で示したとおり，周波数軸では畳み込み積分で表現できるから，上式は，

$$\begin{aligned}
\check{X}_\tau(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\Big\{X(\omega) * \frac{2\pi}{\tau}\delta_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega)\Big\} \\
&= \frac{1}{\tau}X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{\tau}n) \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega')\Bigg\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{\tau}n - \omega')\Bigg\}d\omega' \\
&= \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega - \frac{2\pi}{\tau}n)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

となる．したがって，離散時間信号 $\check{x}_\tau(t)$ のフーリエ変換 $\check{X}_\tau(\omega)$ は，元の信号 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を $\frac{1}{\tau}$ 倍し，$\frac{2\pi}{\tau}$ づつずらして加えたものとなる．

4.2　標本化定理

離散時間信号のフーリエ変換 $\check{X}_\tau(\omega)$ は，式 (4.2) に示したように，$x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を間隔 $2\pi/\tau$ づつずらして $1/\tau$ 倍して足し合わせたものである．標本間隔 τ が大きくなる，つまり，インパルス列信号 $\delta_\tau(t)$ のインパルスの間隔 τ が広がると，そのフーリエ変換であるインパルス列信号 $\dfrac{2\pi}{\tau}\delta_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega)$ のインパルスの間隔 $2\pi/\tau$ は狭くなるので，標本間隔 τ を大きくしてゆくと，離散時間信号 $\check{x}_\tau(t)$ のフーリエ変換 $\check{X}_\tau(\omega)$ は，$x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ とそれを間隔 $2\pi/\tau$ の整数倍でずらしたものとが次第に重なり合うようになる．このような重なり合いは，信号 $x(t)$ が周波数 π/τ[rad]，すなわち $1/2\tau$[Hz] 以上の成分を含まなければ発生しない．したがって，こうした重なり合いが発生していなければ，$\check{X}_\tau(\omega)$ の基本区間 $(-\pi/\tau, \pi/\tau)$ のみを切り出す，つまり，

$$P_{\pi/\tau}(\omega) \equiv \begin{cases} 1, & \text{for} \quad |\omega| < \dfrac{\pi}{\tau} \\ 0, & \text{others} \end{cases} \tag{4.3}$$

と $\check{X}_\tau(\omega)$ の積 $P_{\pi/\tau}(\omega)\check{X}_\tau(\omega)$ を求め，τ 倍することにより $X(\omega)$ が得られ，それを逆フーリエ変換すれば $x(t)$ が復元できることになる．

以上をまとめよう．信号 $x(t)$ を標本間隔 τ，標本化周波数 $1/\tau$[Hz] で標本化する場合，離散時間信号 $x_\tau(t)$ から元の信号 $x(t)$ を復元できる，言い換えれば，標本化により元の信号 $x(t)$ の性質を失わないための十分条件は，$x(t)$ に，標本化周波数の 1/2 以上の周波数の成分を含んでいないことである．これを時間軸における**標本化定理**，あるいは**サンプリング定理** (Sampling theorem) といい，標本化周波数 $1/\tau$ の 1/2 の周波数 $1/2\tau$ を**ナイキスト周波数** (Nyquist rate) という．逆に，$x(t)$ にナイキスト周波数以上の成分が含まれる場合，$\check{X}_\tau(\omega)$ における $X(\omega)$ の重なり合いが生じるため，一般に $X(\omega)$ を切り出すことができず，$x(t)$ を復元することはできない．つまり，$x(t)$ の性質の一部が標本化により失われることになる．これを**エイリアジング** (aliasing) という．

標本化定理を満足する離散時間信号 $\check{x}_\tau(t)$ から元の信号 $x(t)$ が，具体的にどのように復元されるか考えてみよう．$X(\omega) = \tau P_{\pi/\tau}(\omega)\check{X}_\tau(\omega)$ であり，周波数軸での 2 つの信号の積は時間軸では畳み込み積分で表現されるので，$\tau P_{\pi/\tau}(\omega)$ の逆フーリエ変換と $\check{x}_\tau(t)$ を畳み込み積分したものが元の信号 $x(t)$ ということになる．$P_{\pi/\tau}(\omega)$ の逆フーリエ変換は $\dfrac{1}{\tau}\mathrm{sinc}\Big(\dfrac{\pi}{\tau}t\Big)$ であるから，

$$\begin{aligned} x(t) &= \tau \cdot \frac{1}{\tau}\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\tau}t\Big) * \check{x}_\tau(t) \\ &= \mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\tau}t\Big) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-n\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\tau}s\Big)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-s)\delta(t-n\tau-s)ds \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\tau}(t-n\tau)\Big)x(n\tau) \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．この式は，離散時間信号 $\check{x}_\tau(t)$ の各標本点に標本化関数 sinc を乗じ，すべての標本点について足し合わせることにより元の信号 $x(t)$ が復元されることを意味している．

時間軸の標本化定理と同様に，$X(\omega)$ を標本間隔 ζ で標本化したものから $X(\omega)$ が復元できるための十分条件は，$x(t)$ の非ゼロの値をとる範囲が時間長 $2\pi/\zeta$ 以下，すなわち，$x(t)$ が時間幅 $2\pi/\zeta$ 以下に局在していることである．これを**周波数軸の標本化定理**という．

4.3　離散フーリエ変換

前節で示した（時間軸の）標本化定理と周波数軸の標本化定理により，信号 $x(t)$ とそのフーリエ変換 $X(\omega)$ が共にそれぞれの軸で局在しているならば，$x(t), X(\omega)$ のそれぞれの離散表現の間で，相互に変換が可能であると考えられる．本節では，こうした変換を考えることにしよう．

信号 $x(t)$ が範囲 $[0, 2\pi/\zeta)$ に局在しており，かつそのフーリエ変換 $X(\omega)$ もまた $(-\pi/\tau, \pi/\tau)$ に局在しているとしよう．こうした $x(t)$ と $X(\omega)$ から，それぞれ次式で与えられる周期信号 $\tilde{x}(t), \tilde{X}(\omega)$ を定義しよう．

$$\tilde{x}(t) \equiv x(t) * \delta_{\frac{2\pi}{\zeta}}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + \frac{2\pi}{\zeta} m) \tag{4.5}$$

$$\tilde{X}(\omega) \equiv X(\omega) * \delta_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(\omega + \frac{2\pi}{\tau} r) \tag{4.6}$$

さて，周期信号は，その基本区間のフーリエ変換の飛び飛びの値を用いて式 (1.21) で表現された．したがって，基本区間の長さが $2\pi/\zeta$ である $\tilde{x}(t)$ は，

$$\tilde{x}(t) = \frac{\zeta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\zeta) \mathrm{e}^{im\zeta t} \tag{4.7}$$

と表現できる．ここで，$N \in \boldsymbol{Z}_+$[1]を

$$N \equiv \frac{2\pi}{\zeta\tau} \tag{4.8}$$

として定義しよう．N が正の整数にならない場合には，ζ，もしくは τ をより小さな値にすることにより，N を整数にすることができる．ζ，もしくは τ をより小さな値に設定しても，元々，$x(t), X(\omega)$ は，時間軸，及び周波数軸でそれぞれ $[0, 2\pi/\zeta)$，$(-\pi/\tau, \pi/\tau)$ に局在しているのであるから，その範囲を広げても局在していることには変わりはない．この場合，時間軸，あるいは周波数軸での標本間隔を短く，つまり密に標本化することになる．

さらに，$m = k + rN$ とおけば，$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}$ は，$\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty}$ とかける．さらに，$t = n\tau,\ n \in \boldsymbol{Z}$ とおけば，式 (4.7) は，

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(n\tau) &= \frac{\zeta}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X((k + rN)\zeta) \mathrm{e}^{i(k+rN)\zeta n\tau} \\
&= \frac{1}{N\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(k\zeta + \frac{2\pi}{\tau} r) \mathrm{e}^{i2\pi(\frac{nk}{N} + nr)}
\end{aligned}$$

と書き直せる．上式は，式 (4.6) を代入し，複素指数関数の周期性 ($\mathrm{e}^{i2\pi(\frac{nk}{N}+nr)} = \mathrm{e}^{i2\pi\frac{nk}{N}}$，$n, k \in \boldsymbol{Z}$) を利用すれば，

$$\tilde{x}(n\tau) = \frac{1}{N\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k\zeta) \mathrm{e}^{i\frac{2\pi nk}{N}} \tag{4.9}$$

と書ける．ここで，

$$W_N \equiv \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}} \tag{4.10}$$

とおけば，式 (4.9) は，

$$\tilde{x}(n\tau) = \frac{1}{N\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k\zeta) W_N^{-nk} \tag{4.11}$$

[1] $\boldsymbol{Z}_+$ は，正の整数からなる集合を表す．

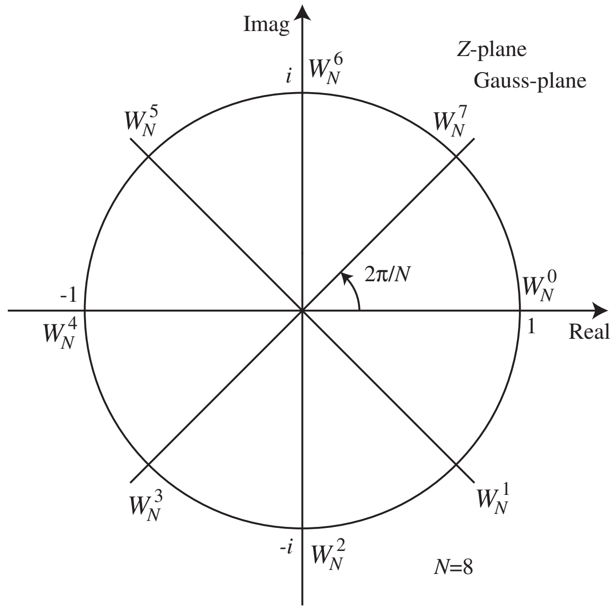

図 4.1: 回転因子 W_N 回転因子.eps

と書ける．これは，周期信号 $\tilde{x}(t)$ の間隔 τ 毎の値は，周期信号 $\tilde{X}(\omega)$ の間隔 ζ 毎の値を用いて表現できることを意味している．また, W_N は, 回転因子と呼ばれており，$W_N^n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ は，ガウス平面において，原点を中心とする単位円の円周を N 等分した点を表す．$N = 8$ の場合の例を図 4.1 に示す．また，回転因子には，図 4.1 からも直感的に理解できるように，$n, m \in \boldsymbol{Z}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
W_N^{n+mN} &= W_N^n && (4.12)\\
\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{mn} &= \begin{cases} 1, & \text{for } m = 0 \\ 0, & \text{for } m \neq 0 \end{cases} && (4.13)
\end{aligned}
$$

なる性質がある．

さて，式 (4.11) の両辺に τW_N^{mn} を乗じて $n = 0, \ldots, N-1$ で総和をとれば,

$$
\begin{aligned}
\tau \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n\tau) W_N^{mn} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k\zeta) W_N^{-kn} \right] \tau W_N^{mn} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\tilde{X}(k\zeta) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(m-k)n} \right]
\end{aligned}
$$

となり，式 (4.13) で示される回転因子の性質を利用すれば,

$$
\tau \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n\tau) W_N^{mn} = \tilde{X}(m\zeta) \qquad (4.14)
$$

となる．この式は，式 (4.11) とは逆に， $\tilde{X}(\omega)$ の間隔 ζ 毎の値は，$\tilde{x}(t)$ の間隔 τ 毎の値, すなわち $\tilde{x}(n\tau)$ を用いて表現されることになる．式 (4.11),(4.14) において,

$$
\begin{cases}
x_n & \equiv \tilde{x}(n\tau) \\
X_k & \equiv \dfrac{1}{\tau} \tilde{X}(k\zeta)
\end{cases}
$$

とおけば，周期を持つ離散時間信号の時間軸と周波数軸の間の関係

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn} \tag{4.15}$$

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-kn} \tag{4.16}$$

が得られる．式 (4.15) を**離散フーリェ変換** (discrete Fourier transform ; DFT)，式 (4.16) を**逆離散フーリェ変換** (inverse discrete Fourier transform ; IDFT) という．離散フーリェ変換，逆離散フーリェ変換をそれぞれ $X_k = \mathrm{DFT}[x_n]$，$x_n = \mathrm{IDFT}[X_k]$ と書く．離散フーリェ変換，および逆離散フーリェ変換は，時間軸，周波数軸でともに周期性をもち，標本化された信号に対するフーリェ変換と逆フーリェ変換に他ならない．したがって，フーリェ変換が持つ，線形性，時間軸の伸縮，時間軸と周波数軸の対称性，時間軸の推移，周波数軸の推移，共役，パーセバルの等式などの基本的な性質は，離散フーリェ変換においてもすべて成立する．また，X_k，$|X_k|^2, \angle X_k$ は，同様に，それぞれフーリェスペクトル，パワースペクトル，位相スペクトルといわれる．

さて，式 (4.15) は，x_n の周期性と回転因子の性質 (式 (4.12)) より，任意に定義された x_n の基本区間を利用することができ，例えば，

$$X_k = \sum_{n=2}^{N+1} x_n W_N^{kn}$$

などが成立する．同様に，式 (4.16) に対しても，任意に定義された X_k の基本区間を利用することができる．ここでは，慣習に従い，$x_n,\ n = 0, \ldots, N-1$，$X_k,\ k = 0, \ldots, N-1$ を基本区間とすることにしよう．負の周波数成分 $X_k,\ k = -1, -2, -3, \ldots$ は，それぞれ $X_{N-1}, X_{N-2}, X_{N-3}, \ldots$ に対応することに注意しよう．

また，

$$\boldsymbol{X} \equiv \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W} \equiv \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

とおけば，式 (4.15)，式 (4.16) は，それぞれ

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{X} \tag{4.17}$$

と表される．ただし，$\boldsymbol{W}^*$ は，$\boldsymbol{W}$ の各要素の複素共役をとった行列を表す．また，

$$(\boldsymbol{W}^T)^*\boldsymbol{W} = N\boldsymbol{I}_N$$

であることから，$\dfrac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{W}$ は，ユニタリ行列である．ただし，$\boldsymbol{I}_N$ は $N \times N$ の単位行列を表す．

演習 4　離散フーリェ変換，逆離散フーリェ変換を行う関数があるとする．これらの関数を利用して，sin 関数と cos 関数を描くにはどうしたらよいかを説明しなさい．■

4.4　高速フーリェ変換アルゴリズム

離散フーリェ変換，あるいは逆離散フーリェ変換を行うためには，式 (4.15)，あるいは式 (4.17) から分かるように，データ点数を N とすれば，N^2 回の複素数の積の演算が必要である．したがって，データ点数

N の増加と共に，N の 2 乗のオーダーで演算量が増加することになる．こうしたことから，離散フーリエ変換の計算を高速に行うアルゴリズムが開発された．こうしたアルゴリズムによる離散フーリエ変換を**高速フーリエ変換** (Fast Fourier transform ; FFT) という．高速フーリエ変換には，時間間引きアルゴリズムと周波数間引きアルゴリズムがある．これらを以下に紹介しよう．

時間間引きアルゴリズム

式 (4.15) の第 1 式で示した離散フーリエ変換

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \tag{4.18}$$

を，N が偶数であるとして，n が偶数，奇数の場合に分け，それぞれ $2n, 2n+1$ として表現すれば，

$$X_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{(2n+1)k} \tag{4.19}$$

と書ける．回転因子の性質より，$W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$ なので，

$$X_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk} \tag{4.20}$$

となる．ここで，k を前半と後半に分ければ，前半 $k = 0, 1, \ldots, N/2-1$ については上式のまま，後半 $k = N/2, \ldots, N-1$ については，k を $k + N/2$ とおいて，

$$X_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{n(k+N/2)} + W_N^{k+N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{n(k+N/2)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \tag{4.21}$$

であるが，回転因子の性質 $W_{N/2}^{nN/2} = 1$，$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ を利用すれば，

$$X_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk} \tag{4.22}$$

となる．ここで，式 (4.20),(4.22) において，

$$G_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \tag{4.23}$$

$$H_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \tag{4.24}$$

は，いずれも $N/2$ 点の DFT を意味している．これらを式 (4.20),(4.22) に代入すれば，

$$X_k = G_k + W_N^k H_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \tag{4.25}$$

$$X_{k+N/2} = G_k - W_N^k H_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \tag{4.26}$$

となる．すなわち，データ点数 N の DFT は，データ点数 $N/2$ の離散フーリエ変換を 2 回と $N/2$ 回の積算で実現できることになる．この流れを $N = 8$ の場合について，図 4.2 の上段に示す．

さらに，$N/2$ が偶数であれば，データ点数 $N/4$ の離散フーリエ変換を 4 回と $N/2 + 2 \cdot N/4 = N$ 回の積の演算で実現できることになる．K を正の整数としてデータ点数が $N = 2^K$ であるならば，こうした分

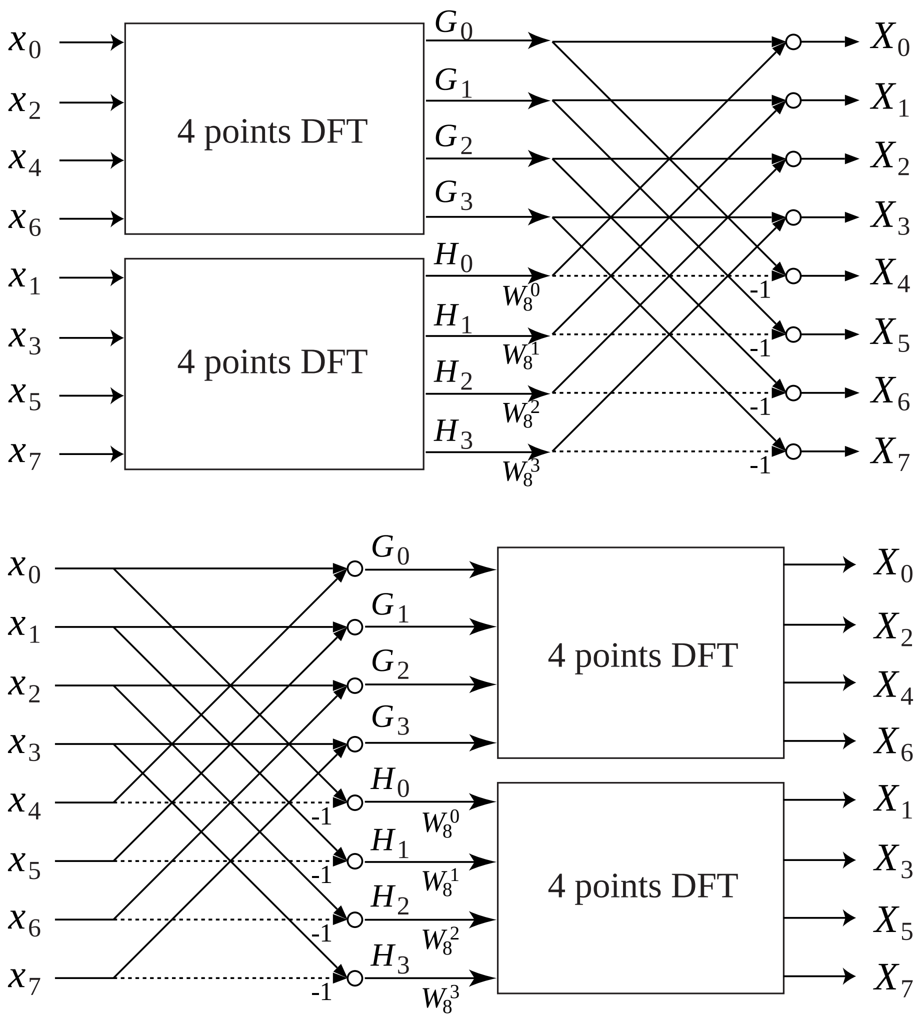

図 4.2: 8 点 DFT を 2 回の 4 点 DFT と 4 点の積算に分解した様子．(上段) 時間間引きアルゴリズム，(下段) 周波数間引きアルゴリズム fftalgorithm1.eps

割を繰り返すことにより，最終的に，データ点数 1 の離散フーリェ変換を N 回と $(N/2)\log_2 N$ 回の積の演算で実現できることになる．データ点数 1 の離散フーリェ変換では，1 を乗ずるだけであるから，もはや計算する必要はなく，結局，これにより，積演算の回数は，$(N/2)\log_2 N$ となり，もともとのデータ点数 N の離散フーリェ変換では，N^2 回の積演算が必要であったから，大幅な計算時間の削減になる．例えば，$N=1024$ の場合，FFT を利用することにより，計算量は，約 200 分の 1 ほどになる．このアルゴリズムを時間間引きアルゴリズムという．図 4.3 の上段にデータ点数 $N=8$ の時間間引きアルゴリズムによる高速フーリェ変換の処理の流れを示す.

周波数間引きアルゴリズム

信号 x_n のデータ点数 N が偶数である場合，式 (4.15) の第 1 式において，x_n を前半と後半に等分すると，離散フーリェ変換は

$$X_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x_n W_N^{kn}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{n+\frac{N}{2}} W_N^{k(n+\frac{N}{2})} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_n + W_N^{\frac{kN}{2}} x_{n+\frac{N}{2}}) W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

と変形できる．次に，X_k を k が偶数の場合と奇数の場合に分けて考える．まず，k が偶数である場合，$k \to 2k$ とし，$W_N^{kN} = 1$，$W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$ を利用すれば，

$$
\begin{aligned}
X_{2k} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_n + W_N^{kN} x_{n+\frac{N}{2}}) W_N^{2kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_n + x_{n+\frac{N}{2}}) W_{N/2}^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

となる．一方，k が奇数である場合，$k \to 2k+1$ とし，$W_N^{N/2} = -1$ を利用すれば

$$
\begin{aligned}
X_{2k+1} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_n + W_N^{\frac{(2k+1)N}{2}} x_{n+\frac{N}{2}}) W_N^{(2k+1)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_n + W_N^{N/2} x_{n+\frac{N}{2}}) W_{N/2}^{kn} W_N^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_n - x_{n+\frac{N}{2}}) W_N^{n} W_{N/2}^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
G_n &= x_n + x_{n+N/2} \qquad (4.29) \\
H_n &= x_n - x_{n+N/2} \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

とおけば，式 (4.27),(4.28) は，

$$
\begin{aligned}
X_{2k} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} G_n W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \qquad (4.31) \\
X_{2k+1} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (H_n W_N^{n}) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

と書ける．つまり，データ点数 N の離散フーリェ変換は，データ点数 $N/2$ の離散フーリェ変換を 2 回と $N/2$ 回の積の演算で実現できる．この流れを $N = 8$ の場合について，図 4.2 の下段に示す．

さらに，$N/2$ が偶数であれば，データ点数 $N/2$ の離散フーリェ変換を 4 回と $N/2 + N/2 = N$ 回の積の演算で実現できることになる．K を正の整数としてデータ点数が $N = 2^K$ であるならば，こうした分割を繰り返すことにより，最終的に，データ点数 1 の離散フーリェ変換を N 回と $(N/2)\log_2 N$ 回の積の演算で実現できることになる．データ点数 1 の離散フーリェ変換では，1 を乗ずるだけであるから，もはや計算する必要はなく，結局，これにより，積演算の回数は，$(N/2)\log_2 N$ となり，時間間引きアルゴリズムと同様，大幅な計算時間の削減になる．このアルゴリズムを周波数間引きアルゴリズムという．図 4.3 の下段にデータ点数 $N = 8$ の周波数間引きアルゴリズムによる高速フーリェ変換の処理の流れを示す．

一方，逆高速フーリェ変換は，どのように行うのだろうか．離散フーリェ変換の定義 (式 (4.15)) を思い出そう．離散フーリェ変換と逆離散フーリェ変換の違いは，$1/N$ の係数と回転因子の肩にある符号だけで

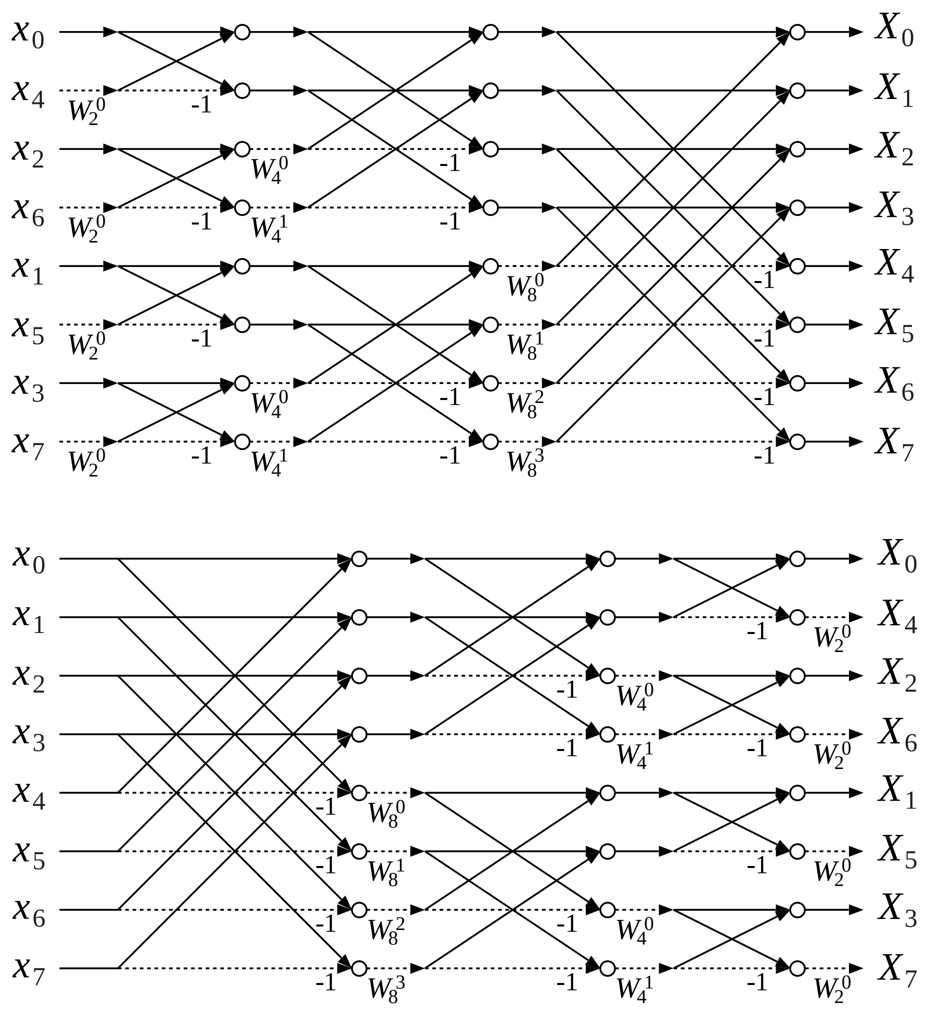

図 4.3: 8 点高速フーリェ変換，(上段) 時間間引きアルゴリズム，(下段) 周波数間引きアルゴリズム fftalgorithm.eps

ある．したがって，X_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ の逆高速フーリェ変換は，X_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ を高速フーリェ変換した後，$1/N$ 倍し，n の符号を反転したものに一致する．$x_n = x_{n+mN}$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ といった周期性を持つから，n の符号を反転した x_{-n} は x_{N-n} に一致するので，結局，逆高速フーリェ変換は，高速フーリェ変換を用いて容易に実現することができる．

4.5 離散フーリェ変換を利用した信号処理の例

図 4.4(a) で示した音声信号 (サンプリング周波数 8000Hz) を離散フーリェ変換することにより求められたパワースペクトル，位相スペクトルをそれぞれ図 4.4(b),(c) に示す．フーリェスペクトルの逆フーリェ変換した結果を図 4.4(d) に示す．離散フーリェ変換し更に離散逆フーリェ変換したものは元の信号になるから，(d) は (a) に一致している．

次に，音痴度を求めた信号処理の例を紹介しよう.「ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ド」と発声した音声を，サンプリング周波数 8000Hz で記録した音声データ全体を図 4.5(a) に示す．この音声データから，それぞれの音を，1.2, 2.0, 2.7, 3.7, 4.6, 5.2, 6.1, 6.9[sec] から始まる 4096 点 (約 0.5[sec]) の音声データとして切

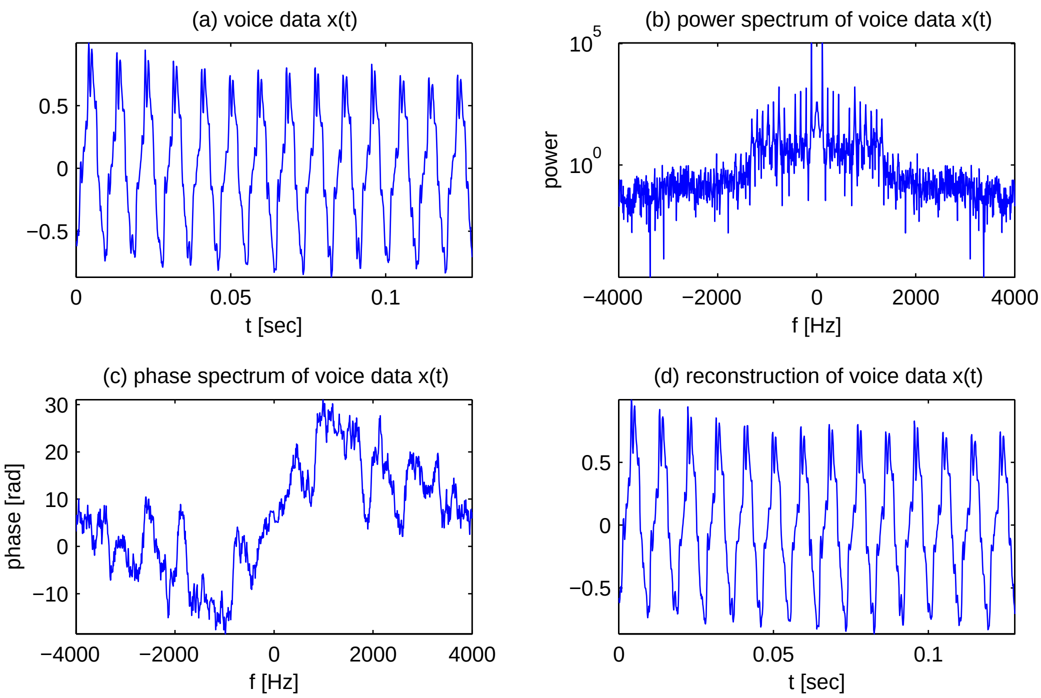

図 4.4: 図 1.1 に示した音声信号 (a) に対し，離散フーリェ変換することにより得られたパワースペクトル (b) と位相スペクトル (c)．音声信号を離散フーリェ変換した後，逆離散フーリェ変換したもの (d)． ex2.m

り出した結果を同図 (b) に示す．これらの各音に対し，離散フーリェ変換することにより，得られたパワースペクトルを同図 (c) に示す．各音ともに，いくつかのインパルス状の成分があり，音階があがるごとに，周波数が高くなってゆくことがわかる．

さて，インパルス状の成分の中で，もっとも低い成分の周波数を音声の音響学では，ピッチと呼んでいる．ピッチは，1 オクターブあがるごとに，2 倍になる．また，ド→レ→ミ，ファ→ソ→ラ→シは全音，ミ→ファ，シ→ドは半音（全音の 1/2）あがる．12 半音で 1 オクターブ，つまりピッチが 2 倍になるから，半音あたり，ピッチは $2^{\frac{1}{12}}$ 倍になることになる．したがって，ド，レ，ミ，ファ，ソ，ラ，シ，ドの各音を $k = 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12$，各音のピッチを $p(k)$ と表すことにすれば，$p(k) = p_0 2^{\frac{k}{12}}$ となる．ただし，p_0 は最初のドのピッチである．ここで，$K \equiv \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12\}$ として，各音のピッチの観測値を $p'(k), k \in K$ とする．p_0 が未知数であるから，理論値と観測値の間の 2 乗誤差和

$$I = \sum_{k \in K} (p(k) - p'(k))^2 = \sum_{k \in K} (p_0 2^{\frac{k}{12}} - p'(k))^2$$

を最小にするように p_0 を定めよう．そこで，方程式 $\dfrac{\partial I}{\partial p_0} = 0$ を解けば，p_0 は，

$$p_0 = \frac{\sum_{k \in K} p'(k) 2^{\frac{k}{12}}}{\sum_{k \in K} 2^{\frac{k}{6}}}$$

として与えられる．先ほど求めた各音のピッチの観測値（記号○）とその理論値（実線）を，横軸を $2^{\frac{k}{12}}$ として描いた結果を図 4.5(d) に示す．実線で示した理論値から，観測値が外れているほど，音痴であるといえる．

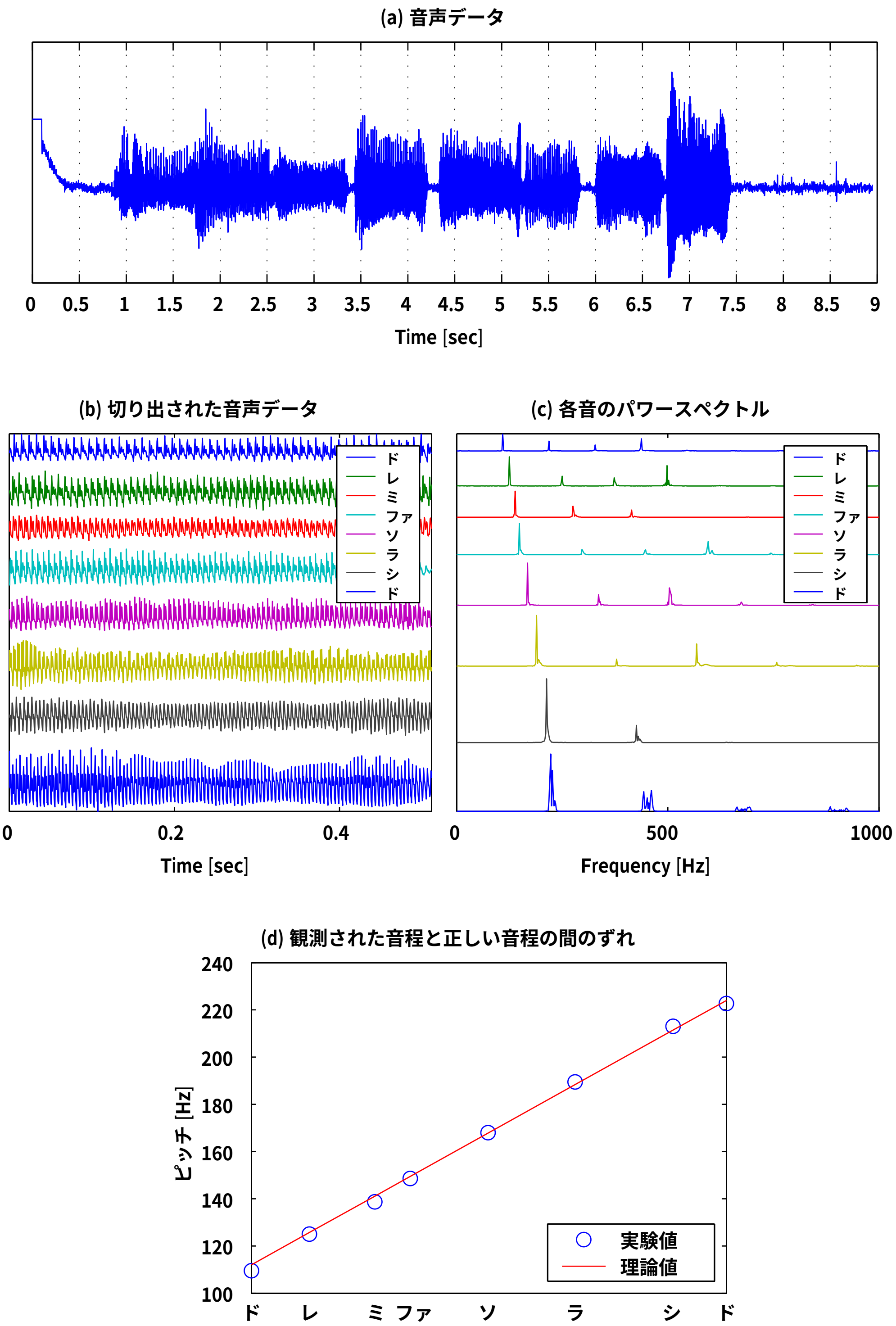

図 4.5: (a) 記録された音声波形，(b) 各音階で切り出された音声波形，各音階の音声のパワースペクトル，(d) 各音階のピッチの理論値と実測値 ex3.m

4.6 離散フーリェ変換を利用した補間と畳み込み演算

高速フーリェ変換は，系列長 N が 2 のべき乗数である場合にもっとも高速化される．しかし，実際には，与えられた系列長が運良く 2 のべき乗数ではないことも起こりうる．こうした場合，与えられた系列の後にゼロの値を持つ系列を付加することにより，系列数が 2 のべき乗数になるようにした後，FFT を行う．こうした系列の後にゼロを付加する処理は，**ゼロ詰め**と呼ばれている．ゼロ詰めを行った場合，高速フーリェ変換，すなわち，離散フーリェ変換した結果はどのような影響を受けるのだろうか．

離散フーリェ変換を導出する際の系列長 N の定義 (式 (4.8)) を思い出そう．そこでは，N を整数とするためには，$x(t), X(\omega)$ の基本周期をその局在する範囲よりも長めに定義し標本化しても元の $x(t), X(\omega)$ の情報を失わない，すなわち再構成できることを述べた．同様に，N を 2 のべき乗数とするように，基本周期を長めに定義しても元の $x(t), X(\omega)$ の情報を失うことはない．それでは，ゼロ詰めを行った場合に得られる X_k は，元の X_k と比べてどのようになっているのであろうか．ゼロ詰めを行うということは，時間軸での標本間隔 τ を一定にしつつ，N を大きくすることであるから，式 (4.8) より，周波数軸での標本間隔 ζ を小さくすることに相当する．つまり．元の $X(\omega)$ を周波数軸の標本化定理を満たす標本間隔よりも密に標本化したものが得られることになる．このことを積極的に利用すれば，以下に述べる補間が実現できる．

離散時間系列 $x_n = x(\tau n)$ が与えられ，$K > 0$ として，$x_n = x(K\tau n)$ を得ることを，x_n の**再標本化**，**リサンプリング** (re-sampling)，**レート変換** (rate transform) などという．離散時間系列だけでなく，離散フーリェスペクトル $X_k = \tau^{-1}X(\zeta k)$ に対しても，同様にリサンプリングという言葉が使われる．特に，$0 < K < 1$ である場合，**補間** (interpolation)，もしくは**アップサンプリング** (up sampling) という．これらは，$1/K$ が整数の場合に限定して使われる場合もあるが，一般的には $1 > K > 0$ なる実数に対しても使うことができる．一方，$K > 1$ の場合には，**ダウンサンプリング** (down sampling) という．これも，K が整数の場合に限定して使われる場合もあるが，一般的には $K > 1$ なる実数に対して広く使われている．補間には，様々な手法が提案されているが，その一つとして離散フーリェ変換（高速フーリェ変換）を利用した手法がある．

系列 x_n とその離散フーリェスペクトル X_k があるとして，系列 x_n の後ろに，仮に x_n の系列長と同数のゼロを付加した場合を考えよう．そのゼロ詰めされた系列の離散フーリェスペクトルは，元の離散フーリェスペクトル X_k を 2 倍に密に標本化したものとなり，X_k の補間が実現されている．同様に，X_k を元の 2 倍の長さになるようにゼロ詰めした後，逆離散フーリェ変換すれば，元の系列 x_n を 2 倍に密に標本化したものとなり，x_n を補間したことになる．ただし，X_k のゼロ詰めは，離散フーリェスペクトルの周期性と負の周波数成分の存在を考慮すれば，$X_k,\ k = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$ と $X_k,\ k = N/2, \ldots, N - 1$ の間にゼロを詰めなければならないことが分かるであろう．

したがって，x_n の補間は，x_n を離散フーリェ変換して必要な長さのゼロ詰めを行い，逆離散フーリェ変換を行うことにより実現される．こうした離散フーリェ変換を利用した補間は，高速フーリェ変換が発明されてから実用的になった．x_n の補間を行うことにより，系列長が長くなるが，周波数軸では高い周波数成分成分がゼロであることには違いはない（ゼロであることを明示しただけ）ので，解像度が高くなるわけではないことに注意しよう．しかし，補間を行うことにより，x_n や X_k が鋭いピークを持つ場合に，そのピークの形状を見やすくするという利点があるために，頻繁に利用される．

補間と同様，FFT が発明されて以来，頻繁に利用されるようになった演算として，畳み込み積分が挙げられる．離散時間系列に対する畳み込み積分は，積分記号 $\int$ を総和記号 $\sum$ に置き換えることにより定義される．すなわち，$x_n,\ n = 0, 1, \ldots, N - 1$ と $y_n,\ n = 0, 1, \ldots, N - 1$ の畳み込み積分は，

$$z_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.33}$$

となる．こうした畳み込み積分において，x_n, y_n の $n = 0, 1, \ldots, N - 1$ 以外での値を 0 とみなすか，ある

いは x_n, y_n を周期信号とみなすかにより，2 種類の畳み込み積分が定義される．前者を**線状畳み込み積分** (linear convolutional integral)，後者を**環状畳み込み積分** (cyclic convolutional integral) という．離散フーリェ変換では，元々の信号は時間軸，周波数軸で局在化していることを仮定しているが，導出の過程で，それから周期信号を作成している．つまり，離散フーリェ変換された周波数軸の積は，時間軸では環状畳み込み積分として表されることになる．したがって，x_n と y_n の環状畳み込み積分は，それぞれを離散フーリェ変換したものの積をとり，逆離散フーリェ変換したものに等しい．ここで，式 (4.33) を直接計算する場合と離散フーリェ変換（高速フーリェ変換）を介して計算する場合の計算量を比較してみよう．式 (4.33) を直接，計算する場合には，N^2 回の積算が必要である．一方，高速フーリェ変換を介して行う場合には，2 回の N 点 FFT と N 点の積算，2 回の N 点 IFFT が必要である．N 点の FFT，あるいは IFFT は，$(N/2)\log_2(N)$ 回の積算で実現できるから，結局，FFT を用いた環状畳み込み積分では，$2N\log_2(N) + N$ 回の積算が必要である．$N = 1024$ の場合，FFT を利用することにより，計算量は約 49 分の 1 ほどになる．

一方，線状畳み込み積分は，x_k, y_k の後ろにそれぞれ N 点のゼロ詰めを行うことにより得られる系列長 $2N$ の系列の環状畳み込み積分と考えることができる．したがって，同様に FFT を用いて畳み込み積分を行うことができる．この場合，系列長が増えるので計算量は若干増える $((4N)\log_2(2N)+2N = 4N(\log_2(N)+1)+2N)$ が，$N = 1024$ の場合，式 (4.33) を直接計算する場合に比べて，22 分の 1 に計算量が削減される．

4.7 z 変換

前節では，連続時間信号や連続時間信号を入出力に持つシステムの表現法の一つとして，ラプラス変換を紹介した．一方，離散時間信号を表現するためには，離散時間信号に対するラプラス変換である **z 変換** (z-transform) が有用である．本節では，z 変換の定義と性質を紹介しよう．

連続時間信号 $x(t),\ t \geq 0$ を標本間隔 τ で標本化した離散時間信号

$$\check{x}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(\tau n)\delta(t - \tau n)$$

のラプラス変換 $\mathcal{L}[\check{x}_\tau(t)]$ は，ラプラス変換の性質を利用すれば，次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\check{x}_\tau(t)] &= \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(\tau n)\delta(t - \tau n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x(\tau n)\mathcal{L}[\delta(t - \tau n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x(\tau n)\mathrm{e}^{-s\tau n} \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

ここで，

$$z \equiv \mathrm{e}^{s\tau}$$

なる複素変数 z を導入し，$x_n \equiv x(\tau n)$，$X(z) \equiv \mathcal{L}[\check{x}_\tau(t)]|_{\mathrm{e}^{s\tau}=z}$ とおけば，式 (4.34) は，

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \qquad (4.35)$$

と書ける．この級数が収束するとき，$x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ から $X(z)$ への変換を $X(z) = \mathcal{Z}[x_n]$ と書き，これを**片側 z 変換** (one sided z-transform) という．片側 z 変換は，離散時間信号に対するラプラス変換において，変数変換 $z \equiv \mathrm{e}^{s\tau}$ を行ったものに他ならない．この変数変換は，s 平面の虚軸を z 平面の単位円周上

表 4.1: 片側 z 変換の例

$x_n,\ n \geq 0$	$X(z)$	収束領域
$\delta(n)$	1	全平面
1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
n^k	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^k \dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\sin(n\omega\tau)$	$\dfrac{\sin(\omega\tau)z^{-1}}{1-2\cos(\omega\tau)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(n\omega\tau)$	$\dfrac{1-\cos(\omega\tau)z^{-1}}{1-2\cos(\omega\tau)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\mathrm{e}^{-n\alpha\tau}\sin(n\omega\tau)$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\sin(\omega\tau)z^{-1}}{1-2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}+\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \mathrm{e}^{-\alpha\tau}$
$\mathrm{e}^{-n\alpha\tau}\cos(n\omega\tau)$	$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}}{1-2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}+\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \mathrm{e}^{-\alpha\tau}$

に，s 平面の左半分のすべての点を z 平面の単位円内に移す変換である．ラプラス変換の収束領域が実定数 s_0 を用いて $\mathrm{Re}(s) > s_0$ と表されたように，z 変換における**収束領域**は，実定数 $r_0 > 0$ を用いて

$$|z| > r_0$$

と表すことができる．

連続時間信号に対するラプラス変換の前後，すなわち $x(t)$ と $X(s)$ は，1 対 1 に対応していた．同様に z 変換の前後，すなわち x_n と $X(z)$ の間にも一意性が存在する．代表的な信号に対する z 変換の例と z 変換の重要な性質をそれぞれ表 4.1，表 4.2 にまとめて示す．

$X(z)$ から元の離散時間信号 x_n への逆変換は，収束領域内で原点を含む閉路 (積分路)c の複素積分

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_c X(z)z^{n-1}dz \tag{4.36}$$

により与えられる．これを**逆** z **変換** (inverse z-transform) といい，$x_n = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$ と記述する．$X(z)$ が有理多項式で表現されている場合には留数定理などを利用して逆 z 変換を求めることができる．

ところで，式 (4.35) で示した片側 z 変換は，x_n が $n < 0$ でゼロでなければ，

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \tag{4.37}$$

と表現しなければならない．こうした z 変換を**両側** z **変換** (bilateral z-transform) という．式 (4.37) の級数は，複素関数論では，ローラン級数と呼ばれており，級数が収束する z の範囲を収束領域という．級数が収束するための十分条件は，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n z^{-n}| < \infty$$

であることから，収束領域は，実定数 $r_1, r_2,\ r_2 > r_1 > 0$ を用いて，

$$r_1 < |z| < r_2$$

表 4.2: 片側 z 変換の重要な性質

	元信号 x_n, y_n	対応する z 変換 $X(z), Y(z)$
線形性	$ax_n + by_n$	$aX(z) + bY(z)$
相似則	$x_{\alpha n}$	$X(z^{\frac{1}{\alpha}})$
時間軸推移定理 (1)	x_{n+k}	$z^k[X(z) - \sum_{l=0}^{k-1} x(l)z^l]$
時間軸推移定理 (2)	x_{n-k}	$z^{-k}X(z)$
z 軸のスケール変換 (1)	$\mathrm{e}^{\mp an}x_n$	$X(\mathrm{e}^{\pm a}z)$
z 軸のスケール変換 (2)	$a^n x_n$	$X(a^{-1}z)$
ランプ関数との積	nx_n	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
微分	$n^k x_n$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^n X(z)$
積分	$\frac{x_n}{n+a}$	$z^a \int_z^\infty v^{-a+1}X(v)\ dv$
畳み込み	$x_n * y_n$	$X(z) \cdot Y(z)$
積	$x_n \cdot y_n$	$\frac{1}{2\pi i}\oint_c X(v)X\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$

と表現できる．

演習 5　表 4.1 中，$x_n = a^n$ の z 変換は，x_n が複素数であることを許可すれば，a が複素数であっても成立する．このことを利用し，$\sin(n\omega\tau)$，$\cos(n\omega\tau)$，$\mathrm{e}^{-n\alpha\tau}\sin(n\omega\tau)$，$\mathrm{e}^{-n\alpha\tau}\cos(n\omega\tau)$ の z 変換が表 4.1 に示したようになることを証明してみよう．■

第 5 章　離散時間システムとその表現

5.1　離散時間線形時不変システム

連続時間信号を入出力に持つ線形時不変システムは，ラプラス変換により表現することができた．一方，入力やインパルス応答が第 2 章で述べた標本化定理を満たすように標本化されている場合には，システムそのものを，離散時間信号により駆動され，離散時間信号を出力する**離散時間システム**として扱った方が便利である．本章，因果的な離散時間線形時不変システムを考えよう．離散時間で定義された因果的な線形時不変システムでは，システムの出力 y_n は，システムのインパルス応答 h_n と入力 x_n を用いて次式で表現される．

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} \tag{5.1}$$

システムへの入力 x_n の z 変換 $X(z) = \mathcal{Z}[x_n]$ が存在するならば，システムの出力 y_n の z 変換 $Y(z) = \mathcal{Z}[y_n]$ は，

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}[y_n] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k}\right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} \end{aligned} \tag{5.2}$$

となり，$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n}$ が x_{n-k} の z 変換であるから，z 変換の性質（時間軸推移定理 (2)）を利用すれば，

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} X(z)$$

となる．ここで，インパルス応答 h_n の z 変換が存在するものとし，これを

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \tag{5.3}$$

とおけば，システムの出力 $Y(z)$ は，インパルス応答 h_n，入力 x_n のそれぞれの z 変換 $H(z)$ と $X(z)$ の積

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{5.4}$$

で表現できることになる．インパルス応答 h_n の z 変換 $H(z)$ を離散時間で定義された**伝達関数**と呼ぶ．

さて，x_n を入力とし伝達関数 $H_1(z)$ を持つシステム S_1 の後段に，伝達関数 $H_2(z)$ を持つシステム S_2 が接続されている場合を考えよう．システム S_1 の出力を y_n，システム S_2 の出力を v_n とする．システム S_1，S_2 のそれぞれの入出力の関係を伝達関数を用いて表現すれば，

$$\begin{aligned} Y(z) &= H_1(z)X(z) \\ V(z) &= H_2(z)Y(z) \end{aligned}$$

となる．システム S_1，S_2 を縦列に接続したシステム全体の入出力関係は，

$$V(z) = H_2(z)H_1(z)X(z)$$

と表されるから，システム全体の伝達関数は，それぞれのシステムの伝達関数の積 $H_1(z)H_2(z)$ として与えられることになる．

ここで，伝達関数 $H(z)$ が有理多項式

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{5.5}$$

で表現される線形時不変システムを考えよう．この有理多項式の分母，分子をそれぞれ

$$A(z) \equiv 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

$$B(z) \equiv b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}$$

とおけば，式 (5.5) は，

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

と書ける．$A(z), B(z)$ は，それぞれ分母多項式，分子多項式と呼ばれ，M, N をそれぞれの多項式の**次数**という．さて，式 (5.5) を式 (5.4) に代入すれば，

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M})$$

となり，x_{n-k} の z 変換が $z^{-k}X(z)$ であることを利用すれば，システムの出力系列 y_n は，次式で表現される．

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k} \tag{5.6}$$

伝達関数の例を示そう．以下 (a)〜(f) に示す伝達関数 $H(z)$ を持つシステムの伝達関数の絶対値 $|H(z)|$ を，図 5.1 に濃淡で示した（白いところほど値が大きい）．見易さを考え，z 平面における単位円を同図に重ねて示してある．

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & H(z) = (1 + z^{-1})/2 \\
\text{(b)} & H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2})/3 \\
\text{(c)} & H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})/4 \\
\text{(d)} & H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})/5 \\
\text{(e)} & H(z) = 1/(1 - 0.7z^{-1}) \\
\text{(f)} & H(z) = 1/(1 + 0.7z^{-1} + 0.7z^{-2})
\end{array} \tag{5.7}$$

5.2 周波数伝達関数

これまで述べてきたように，信号を種々の周波数の複素指数関数の和に分解して記述すると，信号やシステムの性質，特性などの理解が容易になり便利である．離散時間信号を入出力に持つ離散時間システムにおいても同様である．入力を複素指数関数とした場合の離散時間システムの出力は，式 (5.1) において，$x_n = \mathrm{e}^{i\omega n\tau}$ とおくことにより，次式で与えられる．

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k}$$

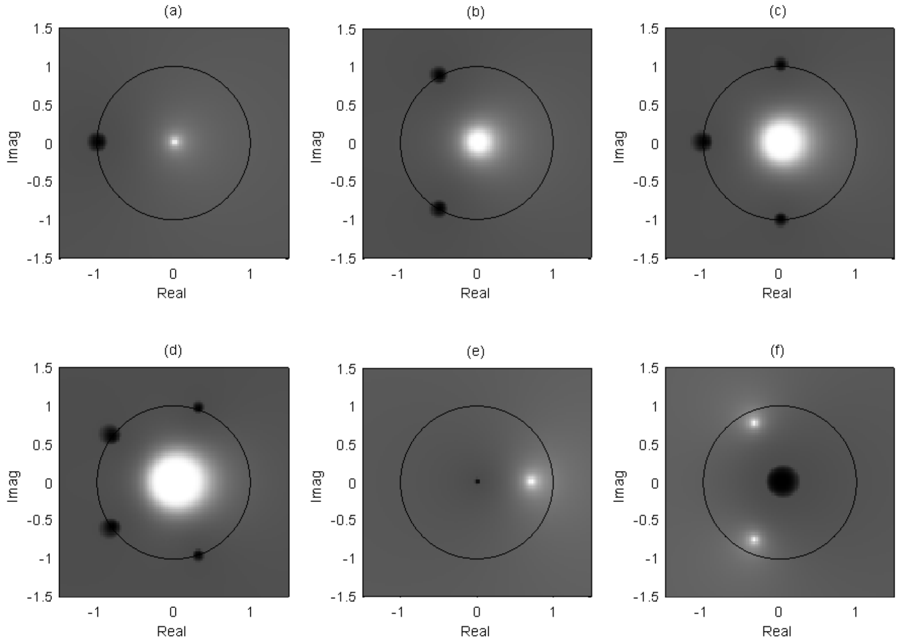

図 5.1: システムの伝達関数の例 ex4.m

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mathrm{e}^{i\omega(n-k)\tau} \\
&= \mathrm{e}^{i\omega n\tau} \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)^{-k} \\
&= \mathrm{e}^{i\omega n\tau} \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}|_{z=\mathrm{e}^{i\omega\tau}} \\
&= \mathrm{e}^{i\omega n\tau} H(z)|_{z=\mathrm{e}^{i\omega\tau}} \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

上式は，ある周波数の複素指数関数を入力した場合，その出力は，同じ周波数の複素指数関数となり，係数 $H(z)|_{z=\mathrm{e}^{i\omega\tau}}$ により，振幅および位相が変化することを意味している．各周波数 ω に対する係数 $H(z)|_{z=\mathrm{e}^{i\omega\tau}}$ は，**周波数特性**，あるいは**周波数伝達関数**と呼ばれる．周波数伝達関数 $H(z)|_{z=\mathrm{e}^{i\omega\tau}}$ は，図 5.1 に示したように，z 平面上で定義された伝達関数 $H(z)$ を単位円周上 $z = \mathrm{e}^{i\omega\tau}$ に沿って切断した断面に相当する．

周波数伝達関数 $H(z)|_{z=\mathrm{e}^{i\omega\tau}}$ は，周期関数であるため，その基本区間 $-\pi/\tau < \omega \le \pi/\tau$ だけを考えればよい．また，$h(n)$ の標本化が標本化定理を満たすように行われているならば，$\tau = 1$ と規格化しても一般性を失わないため，こうした規格化が行われることが多い．本書でも以後このような規格化を行うものとする．その際の ω は，規格化が行われていることを明示にする際には，**規格化周波数**といわれ，単位としては [rad· s] や [Hz· s] が用いられることがある．また，周波数伝達関数は，より簡単に $H(\omega)$ と表わされ，周波数伝達関数 $H(\omega)$ の絶対値

$$
|H(\omega)| \equiv \sqrt{\mathrm{Re}[H(\omega)]^2 + \mathrm{Im}[H(\omega)]^2}
$$

を**振幅特性** (gain)，位相

$$
\angle H(\omega) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[H(\omega)]}{\mathrm{Re}[H(\omega)]}\right)
$$

を**位相特性** (phase) という．$\angle H(\omega) < 0$ の時，位相が遅れる，あるいは**遅れ位相**といい，$\angle H(\omega) > 0$ の時，位相が進む，あるいは**進み位相**という．

ここで，x_n の z 変換 $X(x) = \mathcal{Z}[x_n]$ と離散フーリエ変換の関係について触れておこう．離散時間信号 x_n，$n = 0, 1, \ldots, N-1$ の z 変換は，

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n} \tag{5.9}$$

となる．z 平面において，単位円周上に等間隔に配置された N 個の標本点 $z_k \equiv \mathrm{e}^{i2\pi k/N}$，$k = 0, 1, \ldots, N-1$ での $X(z)$ は，

$$X(z)\Big|_{z=z_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5.10}$$

となる．この式は，$X_k \equiv X(z)\big|_{z=z_k}$ とおけば，x_n の離散フーリエ変換に一致する．つまり，x_n の離散フーリエ変換は，x_n の z 変換 $X(x) = \mathcal{Z}[x_n]$ における単位円周上の等間隔な N 個の標本点に他ならない．

式 (5.7) の (a)〜(f) に示した伝達関数 $H(z)$ を持つシステムの周波数伝達関数 $H(\omega)$ を求めた結果を図 5.2 に上の段から順に示す．同図において，周波数伝達関数 $H(\omega)$ の実部と虚部を左の列，周波数 ω を 0 から π まで変化させたときの周波数伝達関数 $H(\omega)$ の複素平面上での軌跡を左から 2 つめの列，振幅特性，位相特性を同 3,4 番目の列に示した．図 5.1 に示した $|H(z)|$ の z 平面上の単位円周上の断面が，周波数伝達関数の振幅特性 $|H(\omega)|$ になっていることがわかる．

図 5.2 に示した伝達関数の振幅特性 $|H(\omega)|$（右から 2 列め）から，(a)〜(e) の伝達関数を持つシステムでは，低い周波数の成分に比較し，高い周波数の成分は，システムに入力されても振幅が抑制されて出力されることが分かる．つまり，これらのシステムには，入力された信号のうち，低い周波数の成分を通し，高い周波数の成分を遮断する働きがあることになる．また，(f) のシステムは，0.32[Hz] 付近の周波数の成分をよく通すことから，入力された信号のうち，0.32[Hz] 付近の周波数の成分を抽出する働きがあることが分かる．システムの振幅特性を見れば，システムが様々な周波数の成分をどの程度通し，どの程度遮断するのかが分かる．システムには，特定の周波数の成分のみをふるいにかけるかのように抽出する，あるいは取り除く働きがあることから，こうした目的でシステムを設計することがある．こうした場合，システムを特に**フィルタ** (filter) という．低い周波数成分を通すフィルタを**低域通過フィルタ** (Low Pass Filter; LPF)，高い周波数成分を通すフィルタを**高域通過フィルタ** (High Pass Filter; HPF)，特定の周波数成分を通すフィルタを**帯域通過フィルタ** (Band Pass Filter; BPF) という．式 (5.7) に示したシステム (a),(b),(c),(d) は，実は，それぞれ 2,3,4,5 次の移動平均フィルタと呼ばれるもっとも簡単な全零型の低域通過フィルタであり，初歩的な信号処理や画像処理でしばしば用いられる．

5.3 極と零点

図 5.1 より，伝達関数の絶対値 $|H(z)|$ が無限大，または 0 になる点 z があることに気が付いたであろう．これらの点は，伝達関数 $H(z)$ の有理多項式表現

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{5.11}$$

における方程式 $A(z) = 0$ と $B(z) = 0$ の根の位置を表している．$A(z) = 0$ の根を複素定数 α_i，$i = 1, \ldots, N$，$B(z) = 0$ の根を複素定数 β_i，$i = 1, \ldots, M$ でそれぞれ表現すれば，式 (5.11) は，

$$H(z) = \frac{b_0(1 - \beta_1 z^{-1})(1 - \beta_2 z^{-1}) \cdots (1 - \beta_M z^{-1})}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1}) \cdots (1 - \alpha_N z^{-1})} \tag{5.12}$$

と書ける．$z = \alpha_i$，$i = 1, \ldots, N$ では，$|H(z)|$ は無限大，$z = \beta_i$，$i = 1, \ldots, M$ では，$|H(z)|$ は零になることから，α_i，$i = 1, \ldots, N$ を $H(z)$ の z 平面上の**極** (pole)，β_i，$i = 1, \ldots, M$ を $H(z)$ の z 平面上の**零点**

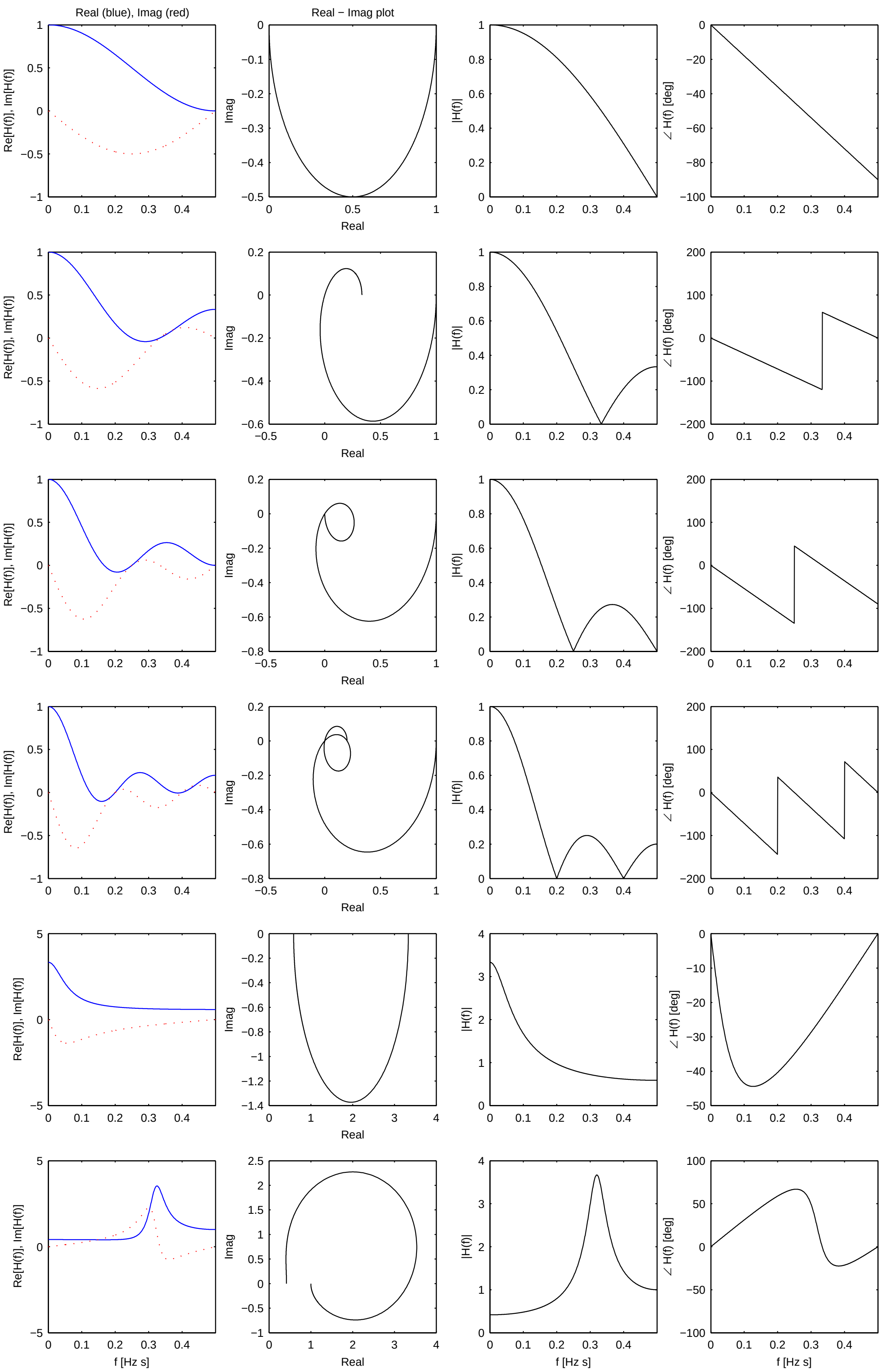

図 5.2: システムの周波数伝達関数の例 ex5.m

(zero) という．極 α_i，$i=1,\ldots,N$，零点 β_i，$i=1,\ldots,M$ は，図 5.1 に示したように，$|H(z)|$ を調べてもその位置を知ることができるが，もっと簡単に，それぞれコンパニオン行列

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-1} & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{b_0} & -\frac{b_2}{b_0} & \cdots & -\frac{b_{M-1}}{b_0} & -\frac{b_M}{b_0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値としても与えられる．

$H(z)$ の分母，分子多項式の係数 a_i，$i=0,1,2\ldots,N$，及び b_i，$i=1,2,\ldots,M$ が実数ならば，それらを係数とする多項式の根は，実根以外は複素共役根となるため，z 平面上の実軸ではない位置に極 (零点) があるならば，実軸について対称な位置に常に極 (零点) が存在する．また，重根となるような極，あるいは零点は，多重の極，あるいは零点と呼ばれる．式 (5.12) は，

$$H(z)=\frac{b_0(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_M)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N)}z^{N-M} \tag{5.13}$$

と表されるから，α_i，$i=1,\ldots,N$，及び β_i，$i=1,\ldots,M$ 以外に，$M>N$ ならば，原点 $(z=0)$ に $M-N$ 個の多重の極が，$N>M$ ならば，同じく原点 $(z=0)$ に $N-M$ 個の多重の零点が存在することがわかる．

極，零点の z 平面上での配置は，システムの特性を数式でなく，2 次元パターン (絵) として表現するものであり，以下に述べるように，システムの安定性，振幅特性，位相特性などの重要な特性を直感的に理解するために有用である．

伝達関数 $H(z)$ が

$$H(z)=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M} \tag{5.14}$$

と書けるならば，$H(z)$ は，原点 $(z=0)$ にある M 個の多重の極以外には，極を持たないことになる．このようなシステムを**全零型システム**という．全零型システムでは，インパルス応答 h_n は，式 (5.6) において，$a_k=0, x_n=\delta_n, h_n=y_n$ とおけば，

$$h_n=b_n, \qquad n=0,1,\ldots,M$$

となり，その長さは零点の個数 M に一致する．

一方，伝達関数 $H(z)$ が

$$H(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{5.15}$$

と書けるならば，$H(z)$ は，原点 $(z=0)$ にある N 個の多重の零点以外には，零点を持たないことになる．このようなシステムを**全極型システム**という．全極型システムでは，インパルス応答 h_n は，式 (5.6) において，$b_k=0, k\neq 0, b_0=1, x_n=\delta_n, h_n=y_n$ とおけば，

$$h_n=\begin{cases} 1, & n=0 \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{N}a_kh_{n-k}, & n>0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$

として再帰的に与えられる．例えば，$a_1=\gamma, a_n=0, n>1$ ならば，インパルス応答 h_n は，

$$h_n=(-\gamma)^n$$

となるが，一般に全極型システムのインパルス応答を陽に書くことは難しい．また，全極型システムのインパルス応答の長さは無限である．

全極型システム，全零型システムに対し，式 (5.11) で表現されるシステムを**極零型システム**という．極零型システムのインパルス応答は，式 (5.6) において，$x_n = \delta_n$ とおけば，

$$h_n = b_n - \sum_{k=1}^{N} a_k h_{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

となる．

極零型システムは，式 (5.11) に示した $H(z)$ の分子多項式を分母多項式で割れば，

$$H(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \cdots$$

となるため，無限長の全零型システムとして表現することができる．あるいは，$H(z)$ の分母多項式を分子多項式で割れば，

$$H(z) = \frac{c_0}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3} + \cdots}$$

となるため，極零型システムを無限長の全極型システムで表現することも可能である．つまり，全極型システム，全零型システム，極零型システムは，相互に変換可能である．

5.4 極の配置とシステムの安定性

連続時間で定義されるシステムと同様に，離散時間で定義されるシステムにおいても，有界な入力に対し，システムの出力が有界となるシステムを**安定** (stable) であるという．システムが安定であるとは，有限な入力に対し，システムの出力も有限となることであり，その必要十分条件は，システムのインパルス応答を h_n とすれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_n| < \infty \tag{5.16}$$

を満たすことである．システムが，伝達関数 $H(z)$ が有理多項式，つまり式 (5.11) で表現される極零型システムであるとし，こうしたシステムの安定性を考えてみよう．このシステムは，伝達関数 $H_1(z) = 1/A(z)$ を持つ全極型システムと伝達関数 $H_2(z) = B(z)$ を持つ全零型システムの 2 つのシステムが接続されたシステムと考えることができる．複数のシステムが直列に接続されたシステム全体が安定であるための十分条件は，個々のシステムが安定であることであることは容易に分かる．全零型システムは，次数 M が有限で，多項式の係数 b_k が有限ならば，必ず安定である．そこで，極零型システムの安定性を調べるためには，$H_1(z)$ を伝達関数に持つ全極型システムの安定性を調べればよいことになる．

$H_1(z)$ は，それが多重の極を持たないとすれば，次式のように部分分数に展開できる．

$$H_1(z) = \frac{\gamma_1}{1 - \alpha_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_2}{1 - \alpha_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{\gamma_N}{1 - \alpha_N z^{-1}}$$

ただし，

$$\gamma_n = (1 - \alpha_n z^{-1}) H_1(z)\Big|_{z=\alpha_n}$$

である．α^n の z 変換が $\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ であることから，システムのインパルス応答 $h_n = \mathcal{Z}^{-1}[H_1(z)]$ は，

$$h_n = \gamma_1 \alpha_1^n + \gamma_2 \alpha^n + \cdots + \gamma_N \alpha_N^n$$

となる．級数 $1, |\alpha|, |\alpha|^2, |\alpha|^3, \ldots$ が収束するための必要十分条件は，$|\alpha| < 1$ であることであり，その際，級数の和は $1/(1 - |\alpha|)$ と有限になる．したがって，システムが安定であるための十分条件は，すべての極

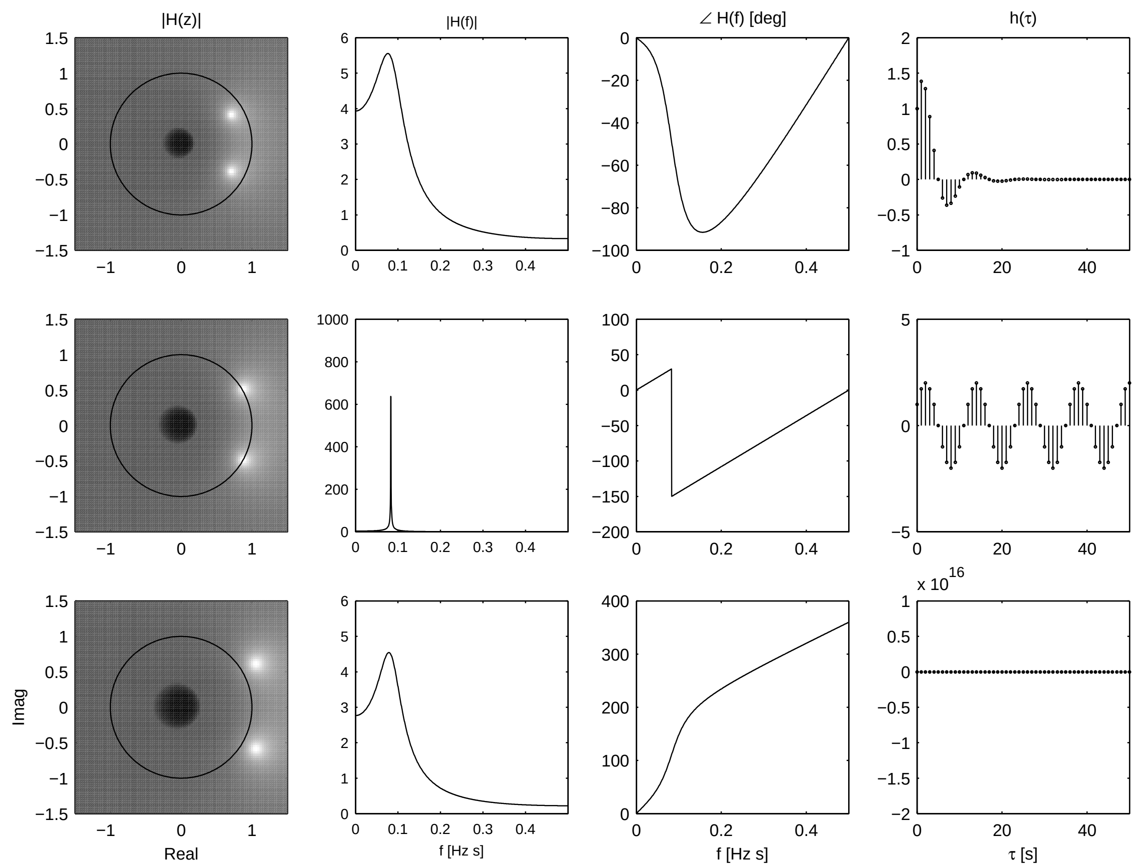

図 5.3: 極の位置とシステム安定性の関係 ex6.m

α_i, $i = 1, \ldots, N$ が，その絶対値が 1 未満，つまり，複素平面において単位円の内部に存在することとなる．一方，$H_1(z)$ が多重の極を持つ場合，例えば，

$$H_1(z) = \frac{\gamma_k}{(1-\alpha_k z^{-1})^m}$$

と表現されるならば，こうしたシステムは，$\sqrt[m]{\gamma_k}/(1-\alpha_k z^{-1})$ なる伝達関数を持つシステムを m 個直列に接続したシステムと等価である．したがって，$|\alpha_k| < 1$ ならば，各システムは安定になり，システム全体も安定になる．結局，システムが安定であるための十分条件は，システムの伝達関数 $H(z)$ のすべての極が z 平面における単位円の内部に存在することである．

さて，$r\mathrm{e}^{\pm i\omega_0}$，$r = 0.8, 1.0, 1.2$，$\omega_0 = \pi/6$ に極を持つシステムの伝達関数の絶対値 $|H(z)|$，振幅特性 $|H(\omega)|$，位相特性 $\angle H(\omega)$，インパルス応答 h_n を求めてみよう．ただし，零点は，原点以外には存在しないものとする．その結果を図 5.3 に示す．上の段から順に，(a)$r = 0.8$，(b)$r = 1.0$，(c)$r = 1.2$ の結果を表している．極が単位円周に近付けばその周波数 ω_0 付近の $H(z)$ の振幅 $|H(z)|$，$|H(\omega)|$ は大きくなる．また，システムのインパルス応答 h_n は，極が z 平面上の単位円の内部にある場合には減衰振動，単位円上にある場合には持続振動，単位円の外部にある場合には発散振動することが分かる．システムが安定であるためには，極が単位円の内部になければならないことになる．

ところで，一般に，C，C++言語では，関数 atan(), atan2(), arg() は，$[-\pi/2, \pi/2]$，もしくは $[-\pi, \pi]$ の値を返すようになっている．そのため，$\omega \to \pi$ に対して位相が遅れ，あるいは進み，位相が $[-\pi/2, \pi/2]$，もしくは $[-\pi, \pi]$ の範囲を超えると値が π，あるいは 2π だけ飛び，不連続に変化することになる．こうした位相の不連続点をなくすためには，表示を工夫する必要がある．こうした操作を**位相戻し** (phase unwrap)

という．実際，図 5.3 において，(c) の位相特性は，こうした位相戻しを行った後，表示している．一方，(b) のような位相特性の不連続性は，極，あるいは零点を通過したことにより発生するものであり，こうした不連続性をなくすことは不可能である．

5.5　零点の配置とシステムの位相特性

極の配置がシステムの安定性に深く関わっていることが示された．一方，零点の配置は，システムの位相特性に影響を与える．伝達関数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \\ &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M} \end{aligned}$$

を持つ全零型システムに対し，このことを調べてみよう．このシステムの周波数特性は,

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathrm{e}^{-ik\omega} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cos(k\omega) - i \sum_{k=0}^{M} b_k \sin(k\omega)$$

であるから，振幅特性は,

$$|H(\omega)| = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{M} b_k \cos(k\omega)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{M} b_k \sin(k\omega)\right)^2}$$

となる．一方，新たに,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z) &\equiv z^{-M} H(z^{-1}) = z^{-M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^k \\ &= b_M + b_{M-1} z^{-1} + b_{M-2} z^{-2} + \cdots + b_0 z^{-M} \end{aligned}$$

なる伝達関数を持つシステムを考える．このシステムの周波数特性は,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= \sum_{k=0}^{M} b_k \mathrm{e}^{ikw} \mathrm{e}^{-iM\omega} \\ &= = \mathrm{e}^{-iM\omega} \left(\sum_{k=0}^{M} b_k \cos(k\omega) + i \sum_{k=0}^{M} b_k \sin(k\omega) \right) \end{aligned}$$

であるから，振幅特性は,

$$|\tilde{H}(\omega)| = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{M} b_k \cos(k\omega)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{M} b_k \sin(k\omega)\right)^2} = |H(\omega)|$$

と伝達関数 $H(z)$ を持つシステムの振幅特性に等しくなる．

$H(z) = 0$ の根を β_k，$k = 1, \ldots, M$ とすれば，$H(z)$ は,

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - \beta_k z^{-1})$$

と書ける．一方，$\tilde{H}(z)$ は,

$$\tilde{H}(z) = b_0 z^{-M} \prod_{k=1}^{M} (1 - \beta_k z) = b_0 \prod_{k=1}^{M} (z^{-1} - \beta_k)$$

となるから，その零点は，β_k^{-1}, $k=1,\ldots,M$ にある．つまり，$H(z)$ と $\tilde{H}(z)$ は，振幅特性が等しく，零点が互いに逆数の関係にあることになる．

$H(z)$ の位相特性は,

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k \sin(k\omega)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k \cos(k\omega)}$$

であり，$\tilde{H}(z)$ の位相特性は,

$$\angle \tilde{H}(\omega) = -M\omega + \tan^{-1}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k \sin(k\omega)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k \cos(k\omega)} = -M\omega - \angle H(\omega)$$

である．ここで，$H(z)$ の M 個すべての零点が z 平面における単位円の内部にある，つまり，$|\beta_k| \leq 1$, $k = 1,\ldots,M$ ならば，$-\dfrac{\pi}{2} \leq \angle H(0) \leq \dfrac{\pi}{2}$ にオフセットを設定すれば,

$$\angle H(\omega) \geq -\frac{M\omega}{2}, \qquad 0 \leq \omega \leq \pi \tag{5.17}$$

となることが証明される．このことを利用すれば,

$$\begin{aligned}
2\angle H(\omega) &\geq -M\omega \\
-2\angle H(\omega) &\leq M\omega \\
-M\omega - \angle H(\omega) &\leq \angle H(\omega) \\
\angle \tilde{H}(\omega) &\leq \angle H(\omega), \qquad 0 \leq \omega \leq \pi
\end{aligned} \tag{5.18}$$

となるから，伝達関数 $\tilde{H}(z)$ を持つシステムの位相は，伝達関数 $H(z)$ を持つシステムの位相よりも，$0 \leq \omega \leq \pi$ で，必ず遅れることが分かる．言い換えれば，すべての零点が z 平面における単位円の内部にあるシステムは，同じ振幅特性を持つシステムの中で，位相遅れが最小となる．振幅特性を変えずに，そのシステムの伝達関数のいくつかの零点を逆数をとることにより単位円の外部に移動させることが可能であり，その際には，位相が必ず遅れることになる．そして，すべての零点を単位円の外部に移動しおえたとき，等しい振幅特性を持つシステムの中で，位相遅れが最大になる．こうしたことから，すべての零点が単位円の内部に存在するシステムを**最小位相システム**，すべての零点が単位円の外部に存在するシステムを**最大位相システム**という．

ここで，最小位相システムと最大位相システムの例を示そう．$r_k e^{\pm i\omega_k}$, $|r_k| < 1$, $k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
r_1 = 0.7, &\quad \omega_1 = \pm 2\pi/3 \\
r_2 = 0.9, &\quad \omega_2 = \pm \pi/4 \\
r_3 = 0.8, &\quad \omega_3 = 0
\end{aligned}$$

に零点を持つ全零型最小位相システムを考えよう．このシステムの伝達関数の絶対値 $|H(z)|$，振幅特性 $|H(\omega)|$，位相特性 $\angle H(\omega)$，インパルス応答 h_n を図 5.4 上段に左から順に示す．この全零型最小位相システムと等しい振幅特性を持つ全零型最大位相システムの伝達関数の絶対値 $|\tilde{H}(z)|$，振幅特性 $|\tilde{H}(\omega)|$，位相特性 $\angle \tilde{H}(\omega)$，インパルス応答 $\tilde{h}_n$ を同図下段に左から示す．これら 2 つのシステムは，それらの振幅特性は等しいが，最大位相システムの方が位相遅れが大きくなっていることがわかる．

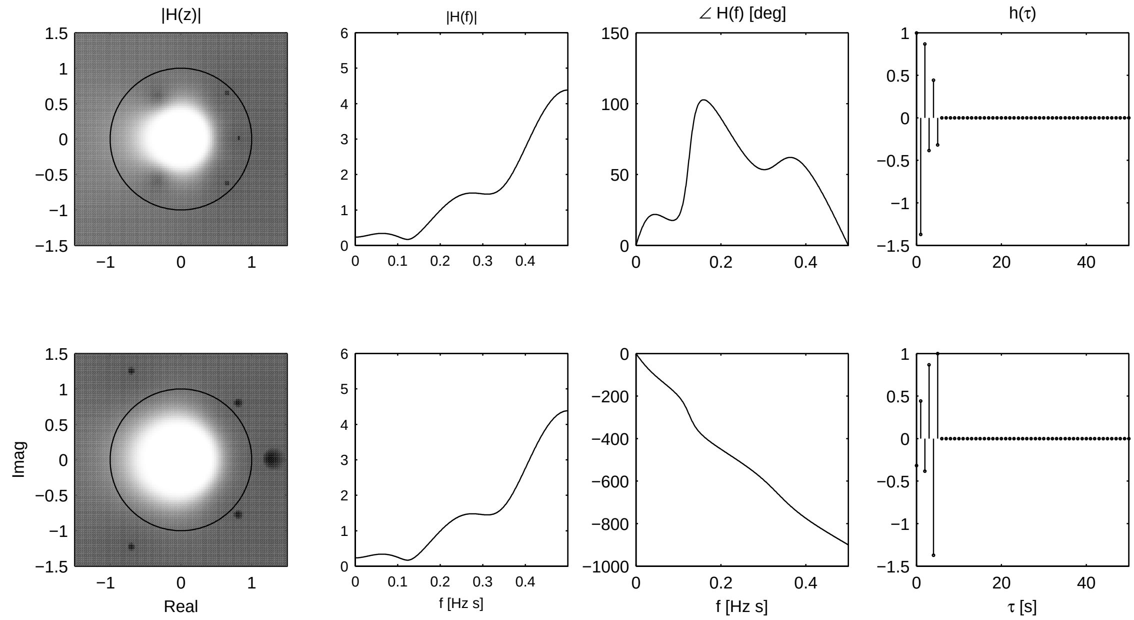

図 5.4: 全零型最小位相システム（上段）と全零型最大位相システム（下段） ex7.m

演習 6　式 (5.17) が成立することを証明せよ．

解答　まず，伝達関数 $H(z) = (1 - \beta z^{-1})$ を持つシステムを考える．その唯一の零点 β が実数である場合，$0 \le \omega \le \pi$ で，$\theta \equiv \angle(1 - \beta \mathrm{e}^{-i\omega}) \ge -\dfrac{\omega}{2}$ が成立することを示そう．$\beta > 0$ の場合，$\angle\beta = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\theta &= \angle(1 - \beta \mathrm{e}^{-i\omega}) \\
&= \angle(1 - |\beta| \mathrm{e}^{i\angle\beta} \mathrm{e}^{-i\omega}) \\
&= \angle(1 - |\beta| \mathrm{e}^{-i\omega}) \\
&= \angle(1 + |\beta| \mathrm{e}^{i(\pi-\omega)}) \\
&\ge 0 \\
&\ge -\frac{\omega}{2}, \qquad 0 < \beta \le 1, \quad 0 \le \omega \le \pi
\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる．一方，$\beta < 0$ の場合，$\angle\beta = \pi$ なので，

$$\begin{aligned}
\theta &= \angle(1 - |\beta| \mathrm{e}^{i\angle\beta} \mathrm{e}^{-i\omega}) \\
&= \angle(1 - |\beta| \mathrm{e}^{i(\pi-\omega)}) \\
&= \angle(1 + |\beta| \mathrm{e}^{-i\omega}) \\
&\ge -\frac{\omega}{2}, \qquad -1 \le \beta < 0,\ 0 \le \omega \le \pi
\end{aligned} \tag{5.20}$$

となる．$\beta = -1$ の場合，$\theta = -\dfrac{\omega}{2}$，$0 \le \omega \le \pi$ と等号が成立する．

零点 β が複素数である場合には，必ず複素共役な零点 β^* が存在するから，システムの伝達関数は，$H(z) = (1-\beta z^{-1})(1-\beta^* z^{-1})$ として表される．共役な零点 2 個を組にして，$\theta' \equiv \dfrac{1}{2}\angle\{(1-\beta \mathrm{e}^{-i\omega})(1-\beta^* \mathrm{e}^{-i\omega})\} \ge -\dfrac{\omega}{2}$ が成立することを次に示そう．

$$\begin{aligned}
\theta' &= \frac{1}{2}\angle\{(1 - |\beta| \mathrm{e}^{i\angle\beta} \mathrm{e}^{-i\omega})(1 - |\beta^*| \mathrm{e}^{i\angle\beta^*} \mathrm{e}^{-i\omega})\} \\
&= \frac{\angle(1 - |\beta| \mathrm{e}^{i\angle\beta} \mathrm{e}^{-i\omega}) + \angle(1 - |\beta| \mathrm{e}^{i\angle\beta^*} \mathrm{e}^{-i\omega})}{2}
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\angle(1+|\beta|\mathrm{e}^{i(\pi+\angle\beta-\omega)})+\angle(1+|\beta|\mathrm{e}^{i(\pi-\angle\beta-\omega)})}{2}$$

となるが，ここで，$\mathrm{Re}[\beta] \geq 0$ である場合，$-\frac{\pi}{2} \leq \angle\beta \leq \frac{\pi}{2}$ なので，

$$\begin{aligned} \theta' &\geq 0 \\ &\geq -\frac{\omega}{2}, \qquad 0 \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \tag{5.21}$$

となる．$\mathrm{Re}[\beta] < 0$ である場合，$\frac{\pi}{2} < |\angle\beta| < \pi$ なので，

$$\theta' \geq -\frac{\omega}{2}, \qquad 0 \leq \omega \leq \pi \tag{5.22}$$

となる．

以上より，絶対値が 1 以下の零点は，1 個あたり $-\frac{\omega}{2}$ を下限とする位相を持つ．複数の零点が存在するシステムの位相は，個々の零点を持つシステムの位相の和で表現されるので，零点が M 個存在し，すべての零点の絶対値が 1 以下であれば，位相の下限は $-\frac{M\omega}{2}$ となる．これで，式 (5.17) は証明された．■

5.6 全域通過システム，直線位相システム

M 次の全零型最小位相システムの伝達関数を

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}$$

とする．この全零型システムと等しい振幅特性を持つ M 次最大位相システムの伝達関数は，

$$\tilde{H}(z) = b_0 z^{-M} + b_1 z^{-M+1} + \cdots + b_{M-1} z^{-1} + b_M$$

として与えられる．これらの伝達関数の比で表現される伝達関数

$$G_1(z) = \frac{\tilde{H}(z)}{H(z)} = \frac{b_0 z^{-M} + b_1 z^{-M+1} + \cdots + b_{M-1} z^{-1} + b_M}{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}}$$

を持つシステムは，振幅特性が

$$|G_1(\omega)| = \frac{|\tilde{H}(\omega)|}{|H(\omega)|} = \frac{|H(\omega)|}{|H(\omega)|} = 1$$

となり，全周波数を通すシステムとなる．また，位相特性は，

$$\angle G_1(\omega) = \angle\tilde{H}(\omega) - \angle H(\omega) = -M\omega - \angle H(-\omega) - \angle H(\omega) = -M\omega - 2\angle H(\omega)$$

となるから，式 (5.18) より，

$$\angle G_1(\omega) \leq 0, \qquad 0 \leq \omega \leq \pi$$

となり，必ず遅れ位相となることが分かる．こうしたシステムを**全域通過システム**という．

これに対し，M 次の全零型最小位相システムとそれと同じ振幅特性を持つ M 次の全零型最大位相システムを縦続に接続したシステムの伝達関数は，それぞれのシステムの伝達関数の積

$$G_2(z) = H(z)\tilde{H}(z)$$

で与えられ，上式を展開すれば，

$$\begin{aligned} G_2(z) \;=\; & b_0 b_M + (b_0 b_{M-1} + b_1 b_M) z^{-1} \\ & + (b_0 b_{M-2} + b_1 b_{M-1} + b_2 b_M) z^{-2} + \cdots \\ & \cdots + (b_0 b_{M-2} + b_1 b_{M-1} + b_2 b_M) z^{-2M+2} \\ & + (b_0 b_{M-1} + b_1 b_M) z^{-2M+1} + b_0 b_M z^{-2M} \end{aligned} \tag{5.23}$$

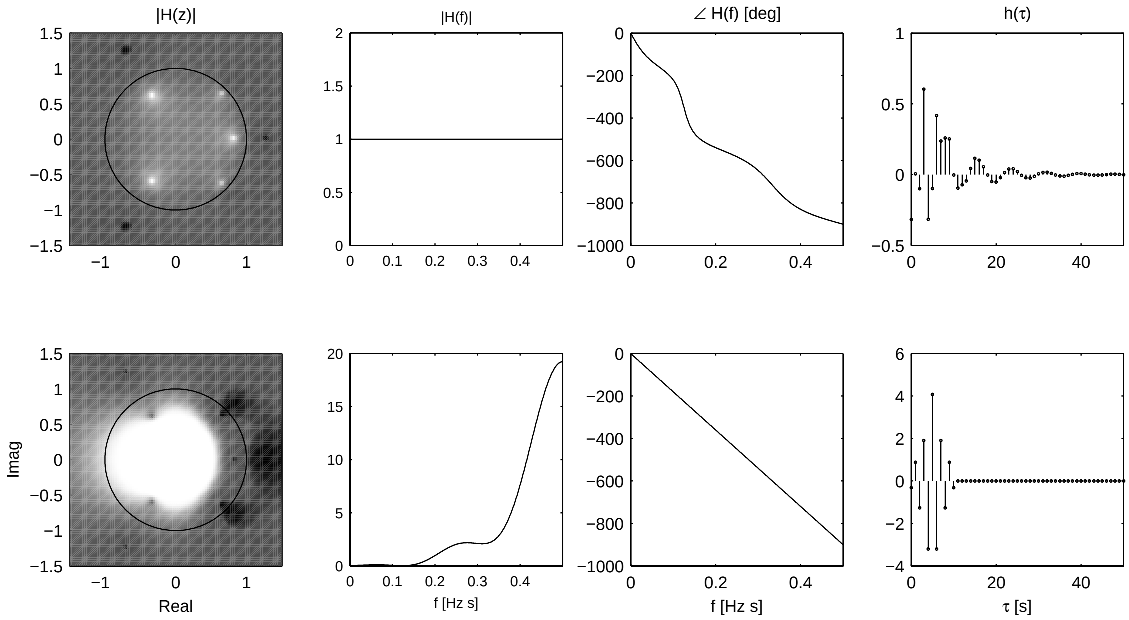

図 5.5: 全域通過システム（上段），直線位相システム（下段） ex8.m

となり，対称な係数を持つ多項式表現されることになる．こうしたシステムの振幅特性は，

$$|G_2(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |\tilde{H}(\omega)| = |H(\omega)|^2$$

となる．一方，位相特性は，

$$\angle G_2(\omega) = \angle H(\omega) + \angle \tilde{H}(\omega) = \angle H(\omega) - M\omega - \angle H(-\omega) = -M\omega$$

となり，周波数 ω に関し線形に遅れてゆく．こうしたシステムを**直線位相システム**という．

ここで，全域通過システムと直線位相システムの例を示そう．$r_k \mathrm{e}^{\pm i\omega_k}$, $|r_k| < 1$, $k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.7, \quad \omega_1 = \pm 2\pi/3 \\ r_2 &= 0.9, \quad \omega_2 = \pm \pi/4 \\ r_3 &= 0.8, \quad \omega_3 = 0 \end{aligned}$$

に零点を持つ全零型最小位相システムの伝達関数 $H(z)$ を考えよう．それと等しい振幅特性を持つ全零型最大位相システムの伝達関数 $\tilde{H}(z)$ の比 $G_1(z) = \tilde{H}(z)/H(z)$ で与えられる伝達関数を持つ全域通過システムの伝達関数の絶対値 $|G_1(z)|$，振幅特性 $|G_1(\omega)|$，位相特性 $\angle G_1(\omega)$，インパルス応答 g_{1_n} を図 5.5 上段の左から順に示す．また，伝達関数 $G_2(z) = \tilde{H}(z)H(z)$ を持つ直線位相システムの伝達関数の絶対値 $|G_2(z)|$，振幅特性 $|\tilde{G}_2(\omega)|$，位相特性 $\angle \tilde{G}_2(\omega)$，インパルス応答 g_{2_n} を同図下段の左から順に示す．全域通過システムでは，単位円の内側に極が，単位円をはさんでそれらの極と対称の位置に零点があり，直線位相システムでは，単位円をはさんでそれぞれ対称の位置に零点があることがわかる．また，全域通過システムでは，全周波数 ω に対し，一定の振幅特性を示し，直線位相システムでは，位相は，ω に対し線形に遅れてゆき，インパルス応答が左右対称形であることが分かる．

5.7 全零型システムから全極型システムへの変換と極，零点の配置

次式で与えられる伝達関数 $H(z)$ を持つ全零型システムを考える．ただし，$|\beta| < 1$ とする．

$$H(z) = 1 - \beta z^{-1}$$

この伝達関数は，全極型システムとして次式で表現することができる．

$$H(z)=\frac{1}{1+\beta z^{-1}+\beta^2 z^{-2}+\beta^3 z^{-3}+\cdots}$$

ここで，M 次までで打ち切り，

$$H(z)=\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{k=1}^{M}\beta^k z^{-k}}$$

なる伝達関数を持つ全極型システムを考える．この伝達関数が

$$\beta \mathrm{e}^{i2\pi n/(M+1)}, \qquad n=1,2,\ldots,M$$

に極を持つことは，複素指数関数の周期性より容易に確かめられる．すなわち，β に零点を持つ全零型システムは，$\beta\mathrm{e}^{i2\pi n/(M+1)}$，$n=1,2,\ldots,M$ に極を持つ全極型システムで近似することができる．逆に，α に極を持つ全極型システムは，$\alpha\mathrm{e}^{i2\pi n/(M+1)}$，$n=1,2,\ldots,M$ に零点を持つ全零型システムで近似することができる．

一つ例を示そう．$H(z)=1+0.9z^{-1}$ なる伝達関数を持つ全零型システムを $M=9,15,25$ 次の全極型システムでそれぞれ近似する場合を考える．$H(z)=1+0.9z^{-1}$ なる伝達関数を持つ全零型システムの伝達関数の絶対値 $|H(z)|$，振幅特性 $|H(\omega)|$，位相特性 $\angle H(\omega)$，インパルス応答 h_n を図 5.6 上段に示す．この前零型システムを $M=9,15,25$ 次の全極型システムでそれぞれ近似したシステムの伝達関数の絶対値 $|H(z)|$，振幅特性 $|H(\omega)|$，位相特性 $\angle H(\omega)$，インパルス応答 h_n を同図 2,3,4 段目に示す．全零型システムを全極型システムで近似すると，零点と同じ半径 $|\beta|$ で円環状に M 個の極が発生することがわかる．また，全零型システムを全極型システムで近似する際の次数 M が大きくなるにつれて，振幅特性，位相特性，インパルス応答ともに，元の全零型システムのそれぞれの特性に近づいて行く様子がわかる

本章の最後に，システム（フィルタ) 設計の例を示そう．図 1.1 に示した音声信号を，その基本波だけを通過させる安定な極零型システム（帯域通過フィルタ）を極，零点を適切に配置することにより設計してみよう．図 4.4 に示したように，この音声の基本周波数（ピッチ）は，$f=110$[Hz] である．そこで，z 平面上，$0.99\mathrm{e}^{\pm i\ 2\pi\cdot 110/8000}$ に極，± 1 に零点を持つ極零型システムを設計するものとする．このシステムの伝達関数は，

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-0.99\mathrm{e}^{i\omega_0}z^{-1})(1-0.99\mathrm{e}^{-i\omega_0}z^{-1})} \\ &= \frac{1-z^{-2}}{1-1.9726z^{-1}+0.9801z^{-2}} \end{aligned} \tag{5.24}$$

となる．図 5.7 に，このシステムの伝達関数の絶対値 $|H(z)|$，振幅特性 $|H(\omega)|$，位相特性 $\angle H(\omega)$，インパルス応答 h_n，元の音声信号，その振幅スペクトル，設計した極零型システムに通した後の音声信号，その振幅スペクトルを示す．このシステムを通した後は，音声のほぼ基本波だけが抽出され，正弦波に近くなっていることが分かる．

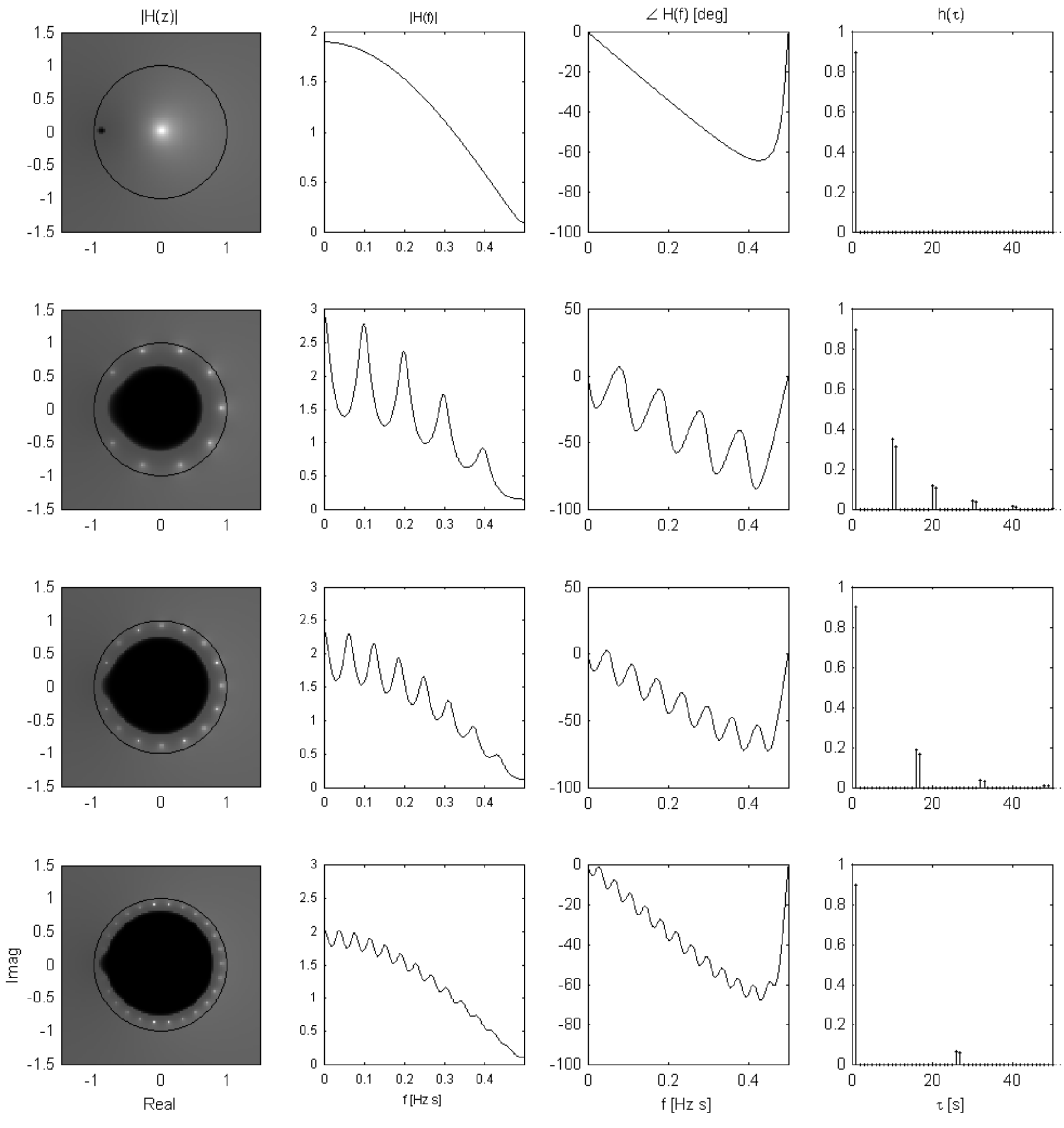

図 5.6: 全零型システム (上段) を $M = 9, 15, 25$ 次の全極型システムでそれぞれ近似した際の極配置 ex9.m

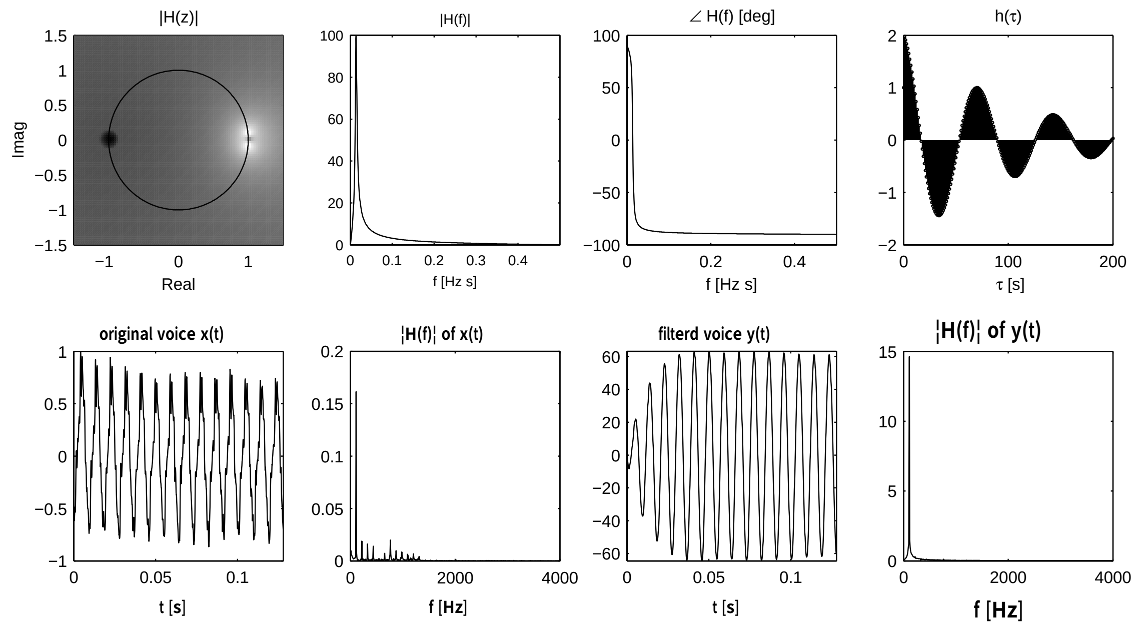

図 5.7: 図 1.1 に示した音声の基本波だけを通すシステム ex10.m