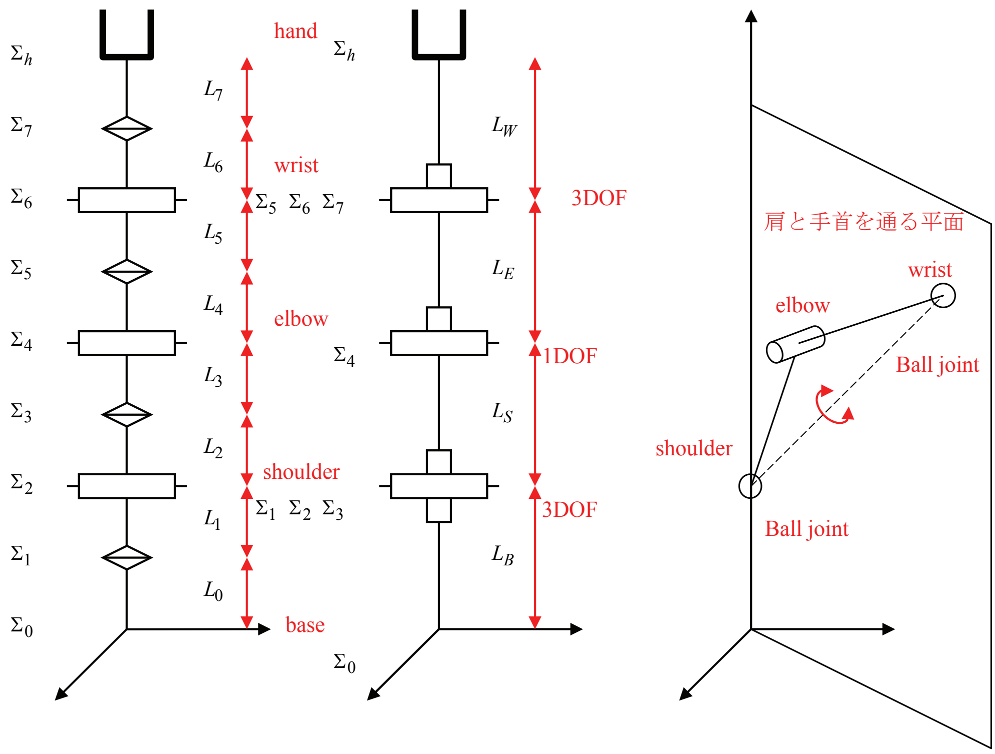
三菱重工業　汎用冗長ロボットアーム　PA-10
運動学の解の導出

岐阜大学工学部人間情報システム工学科
山田貴孝

三菱重工業製ロボットアーム PA-10 の運動学を導出する．PA-10 は 7 自由度関節を有する冗長アームである．7 つの関節を大きく 3 つの部分に分けて考える．根元から数えて第 1 関節から第 3 関節を肩（shoulder）関節，第 4 関節と第 5 関節を肘（elbow）関節，第 6 関節と第 7 関節を手首（wrist）関節と呼ぶ．計算の都合上，肩関節は第 2 関節に 3 自由度，肘関節は第 4 関節に 2 自由度，手首関節は第 6 関節に 2 自由度の，それぞれ集中関節として考える．関節角を文字 θ で表わし，集中関節の中での番号を右下添え字で表わす．

$$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7]^T=[\theta_{s1},\theta_{s2},\theta_{s3},\theta_{e1},\theta_{e2},\theta_{w1},\theta_{w2}]^T \quad (1)$$

アーム底面から肩関節までの長さを L_b (=315[mm])，肩関節から肘関節までの長さを L_s（=450[mm]），肘関節から手首関節までの長さを L_e （=400[mm]），手首関節からアーム先端面までの長さを L_w（=80[mm]）で表わす．



1. 同時変換行列

関節角が与えられたときに基準座標系 Σ_b に対するハンド座標系 Σ_h の位置と姿勢を求める（順問題）．肩集中関節の位置に固定座標系 Σ_a を新たに設定する．以下では，Σ_a を根元座標系と呼ぶことにする．座標系 Σ_b から見たハンド座標系 Σ_h の同次変換行列は次の式で計算できる．

$$^{b}T_h(\boldsymbol{\theta})=\{^{b}T_a\}\{^{a}T_{w2}(\boldsymbol{\theta})\}\{^{w2}T_h\}, \quad (2)$$

$$^{a}T_{w2}(\boldsymbol{\theta})=\{^{a}T_{s1}(\theta_{s1})\}\{^{s1}T_{s2}(\theta_{s2})\}\{^{s2}T_{s3}(\theta_{s3})\}\{^{s3}T_{e1}(\theta_{e1})\}\{^{e1}T_{e2}(\theta_{e2})\}\{^{e2}T_{w1}(\theta_{w1})\}\{^{w1}T_{w2}(\theta_{w2})\} \quad (3)$$

各同次変換行列は次の式で与えられる．

$$ {}^{a}T_{s1}(\theta_{s1}) := \begin{bmatrix} \cos\theta_{s1} & -\sin\theta_{s1} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{s1} & \cos\theta_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (4) $$

$$ {}^{s1}T_{s2}(\theta_{s2}) := \begin{bmatrix} \cos\theta_{s2} & 0 & \sin\theta_{s2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_{s2} & 0 & \cos\theta_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (5) $$

$$ {}^{s2}T_{s3}(\theta_{s3}) := \begin{bmatrix} \cos\theta_{s3} & -\sin\theta_{s3} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{s3} & \cos\theta_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (6) $$

$$ {}^{s3}T_{e1}(\theta_{e1}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{e1} & 0 & \sin\theta_{e1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_{e1} & 0 & \cos\theta_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (7) $$

$$ {}^{e1}T_{e2}(\theta_{e2}) := \begin{bmatrix} \cos\theta_{e2} & -\sin\theta_{e2} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{e2} & \cos\theta_{e2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (8) $$

$$ {}^{e2}T_{w1}(\theta_{w1}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{w1} & 0 & \sin\theta_{w1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_{w1} & 0 & \cos\theta_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (9) $$

$$ {}^{w1}T_{w2}(\theta_{w2}) := \begin{bmatrix} \cos\theta_{w2} & -\sin\theta_{w2} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{w2} & \cos\theta_{w2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (10) $$

同次変換行列 ${}^{b}T_a$ および ${}^{w2}T_h$ はアームとハンドの取り付け状態に応じて適切に設定する．例えば，アームの底面を基準座標系 Σ_b とする場合には

$$ {}^{b}T_a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots (11) $$

とし，ハンド座標系 Σ_h をアーム先端面から (H_x, H_y, H_z) の位置に，Σ_{w2} と同じ姿勢で設定する場合には

$$ {}^{w2}T_h := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H_x \\ 0 & 1 & 0 & H_y \\ 0 & 0 & 1 & H_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots (12) $$

とする．

2. ハンド座標系の位置・姿勢からの関節角の導出

ハンド座標系 Σ_h の目標位置・姿勢が ${}^{b}T_{hd}$ で与えられたときに，関節角度 $\theta_{s1},...,\theta_{w2}$ の可能解を求める（逆問題）．行列 ${}^{b}T_a$ と ${}^{w2}T_h$ は既知であるため，肩関節座標系に対する手首座標系の位置・姿勢を表わす行列 ${}^{a}T_{w2d}$ を目標値とすることと同値である．

$$ {}^{a}T_{w2d} := \{{}^{b}T_{a}\}^{-1}\{{}^{b}T_{hd}\}\{{}^{w2}T_{h}\}^{-1} \qquad (13) $$

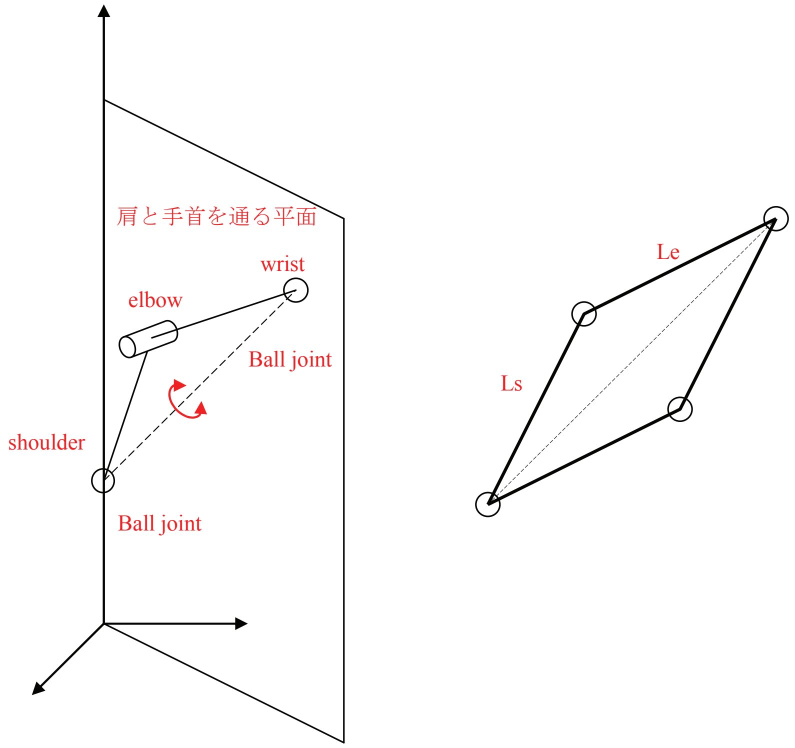
式の展開の都合から行列 ${}^{a}T_{w2d}$ の要素を

$$ {}^{a}T_{w2d} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (14) $$

とおく．式(13)を式(3)と連立させてアームの関節角 $\theta_{s1},...,\theta_{w2}$ を決定する．

2.1 第 4 関節（E1）の決定

肩関節と手首関節の位置成分が既知となることを利用して，肘関節 θ_4 を決定することを考える．すなわち，図　に示す．



三角形の内角の関係を用いる．肩関節と手首関節の位置関係を明確にするため，式(3)において肩関節の第 1 関節（S1）と第 2 関節（S2）を左辺に移項して表記する．

$$ {}^{s2}T_{w2} := \{{}^{s1}T_{s2}\}^{-1}\{{}^{a}T_{s1}\}^{-1}\{{}^{a}T_{w2d}\} = \{{}^{s2}T_{s3}\}\{{}^{s3}T_{e1}\}\{{}^{e1}T_{e2}\}\{{}^{e2}T_{w1}\}\{{}^{w1}T_{w2}\} \qquad (15) $$

この同次変換行列の位置成分を明示すると

$$ {}^{s2}T_{w2d} = \{{}^{s1}T_{s2}\}^{-1}\{{}^{a}T_{s1}\}^{-1}\{{}^{a}T_{w2d}\} = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & (p_xC_1 + p_yS_1)C_2 - p_zS_2 \\ * & * & * & -p_xS_1 + p_yC_1 \\ * & * & * & (p_xC_1 + p_yS_1)S_2 + p_zC_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (16) $$

および

$$ {}^{s2}T_{w2} = \{{}^{s2}T_{s3}\}\{{}^{s3}T_{e1}\}\{{}^{e1}T_{e2}\}\{{}^{e2}T_{w1}\}\{{}^{w1}T_{w2}\} = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & L_eC_3S_4 \\ * & * & * & L_eS_3S_4 \\ * & * & * & L_s + L_eC_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (17) $$

を得る．ここで，表記を簡明にするため， $C_i := \cos\theta_i$ および $S_i := \sin\theta_i$ としている．ハンド座標系の位置成分を目標値に一致させる問題は，次の三つの式を満たす角度を求める問題に帰着される．

$$ (p_xC_1 + p_yS_1)C_2 - p_zS_2 = L_eC_3S_4 \qquad (18.a) $$

$$ -p_xS_1 + p_yC_1 = L_eS_3S_4 \qquad (18.b) $$

$$(p_x C_1 + p_y S_1) S_2 + p_z C_2 = L_s + L_e C_4 \quad \cdots\cdots (18.c)$$

式(17)の左辺の 2 乗和を整理すると,

$$\{(p_x C_1 + p_y S_1) C_2 - p_z S_2\}^2 + (-p_x S_1 + p_y C_1)^2 + \{(p_x C_1 + p_y S_1) S_2 + p_z C_2\}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad \cdots\cdots (19)$$

右辺の 2 乗和を整理すると

$$(L_e C_3 S_4)^2 + (L_e S_3 S_4)^2 + (L_s + L_e C_4)^2 = L_e^2 + L_s^2 + 2 L_e L_s C_4 \quad \cdots\cdots (20)$$

となるため, C_4 に関する次の拘束式を得る.

$$L_e^2 + L_s^2 + 2 L_e L_s C_4 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad \cdots\cdots (21)$$

したがって

$$C_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - L_s^2 - L_e^2}{2 L_e L_s} \quad \cdots\cdots (22)$$

を得る. ここで,

$$|C_4| \le 1 \quad \cdots\cdots (23)$$

すなわち, 目標手首位置が拘束条件

$$(L_s - L_e)^2 \le p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \le (L_s + L_e)^2 \quad \cdots\cdots (24)$$

を満たすように設定されている場合に

$$S_4 = \lambda_4 \sqrt{1 - C_4^2}\,, \quad \lambda_4 = \pm 1 \quad \cdots\cdots (25)$$

と決まる. 式(24)の条件を満足たさない場合, ハンドは目標位置・姿勢 ${}^bT_{hd}$ に到達することは構造的にできない.

以上より, 第 4 関節 (E1) の角度は式(22)を満たすときに次の式で決定できる.

$$\theta_4 = \mathrm{atan2}(S_4, C_4) \quad \cdots\cdots (26)$$

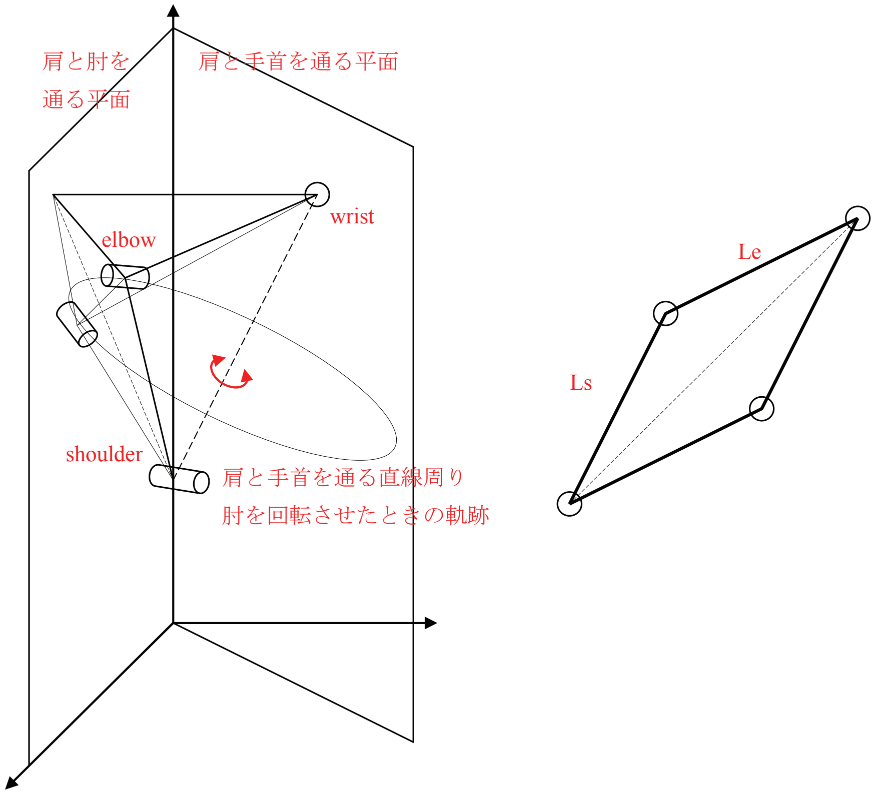
角度は 2 種類存在する ($\lambda_4 = \pm 1$).

2.2 第 1 関節 (S1) から第 3 関節 (S3) の決定

PA-10 は関節数が冗長であるため, いずれかの関節角度を任意とし, 他の角度をそれに依存して決定する必要がある. 冗長関節には S1 と S3 が設定できる.

2.2.1 第 1 関節 (S1) を冗長とした場合の決定法

S1 を冗長として選択した場合の決定法を示す.



2.2.1.1 第 2 関節 (S2) の決定

式(17.c)において

$$\alpha_2 := p_x C_1 + p_y S_1,\ \beta_2 := p_z,\ \gamma_2 := L_s + L_e C_4 \quad (27)$$

とすると，角度 θ_2 に関する式として表わせる．

$$\alpha_2 S_2 + \beta_2 C_2 = \gamma_2 \quad (28)$$

したがって

$$\theta_2 = \mathrm{atan}\,2(\alpha_2, \beta_2) - \mathrm{atan}\,2(\lambda_2\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2}, \gamma_2),\ \lambda_2 = \pm 1 \quad (29)$$

を得る．

2.2.1.2 第 3 関節 (S3) の決定

式(18.a)と(18.b)を用いて S_4 を消去すると

$$\{(p_x C_1 + p_y S_1)C_2 - p_z S_2\}S_3 + (p_x S_1 - p_y C_1)C_3 = 0 \quad (30)$$

を得る．ここで

$$\alpha_3 = (p_x C_1 + p_y S_1)C_2 - p_z S_2,\ \beta_3 = (p_x S_1 - p_y C_1) \quad (31)$$

とおくと

$$\theta_3 = \mathrm{atan}\,2(\lambda_3\beta_3, -\lambda_3\alpha_3),\ \lambda_3 = \pm 1 \quad (32)$$

を得る．

2.2.1.3 符号の決定

関節角 θ_2，θ_3，θ_4 は三つの符号 λ_2，λ_3，λ_4 で表わされているため，アームの形態は 8 種類存在することになる．しかし，式(29)を導出する際に S_4 を消去しているため，8 種類の中に妥当でない符号が存在する可能性がある．以下では，解の妥当性を検査する．

まず，検査に必要な要素を展開しておく．

$$A_2 := \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 \quad (33)$$

と定義すると，式(30)より

$$\begin{aligned}C_2 &= \cos(\operatorname{atan2}(\alpha_2,\beta_2)-\operatorname{atan2}(\lambda_2\sqrt{A_2},\gamma_2))\\ &= \cos(\operatorname{atan2}(\alpha_2,\beta_2))\cos(\operatorname{atan2}(\lambda_2\sqrt{A_2},\gamma_2))+\sin(\operatorname{atan2}(\alpha_2,\beta_2))\sin(\operatorname{atan2}(\lambda_2\sqrt{A_2},\gamma_2))\\ &= \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}\times\frac{\gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}+\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}\times\frac{\lambda_2\sqrt{A_2}}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}} \quad\cdots\cdots\cdots (34)\\ &= \frac{\beta_2\gamma_2+\lambda_2\alpha_2\sqrt{A_2}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}S_2 &= \sin(\operatorname{atan2}(\alpha_2,\beta_2)-\operatorname{atan2}(\lambda_2\sqrt{A_2},\gamma_2))\\ &= \sin(\operatorname{atan2}(\alpha_2,\beta_2))\cos(\operatorname{atan2}(\lambda_2\sqrt{A_2},\gamma_2))-\cos(\operatorname{atan2}(\alpha_2,\beta_2))\sin(\operatorname{atan2}(\lambda_2\sqrt{A_2},\gamma_2))\\ &= \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}\times\frac{\gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}-\frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}\times\frac{\lambda_2\sqrt{A_2}}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}} \quad\cdots\cdots\cdots (35)\\ &= \frac{\alpha_2\gamma_2-\lambda_2\beta_2\sqrt{A_2}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\end{aligned}$$

を得る． 式(32)より

$$C_3=\frac{-\lambda_3\alpha_3}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}},\ S_3=\frac{\lambda_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}} \quad\cdots\cdots\cdots (36)$$

を得る．式(31)より

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= (p_xC_1+p_yS_1)C_2-p_zS_2=\alpha_2C_2-\beta_2S_2=\alpha_2\frac{\beta_2\gamma_2+\lambda_2\alpha_2\sqrt{A_2}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}-\beta_2\frac{\alpha_2\gamma_2-\lambda_2\beta_2\sqrt{A_2}}{\alpha_2^2+\beta_2^2} \quad\cdots\cdots (37)\\ &= \lambda_2\sqrt{A_2}\end{aligned}$$

となり

$$1-C_4^2=\frac{1}{L_e^2}\{L_e^2-(\gamma_2-L_s)^2\}=\frac{1}{L_e^2}\{L_e^2-L_s^2+2L_s\gamma_2-\gamma_2^2\}=\frac{1}{L_e^2}\{L_e^2+L_s^2+2L_sL_eC_4-\gamma_2^2\} \quad\cdots\cdots\cdots (38)$$

および

$$\alpha_3^2+\beta_3^2=A_2^2+\beta_3^2=\alpha_2^2+\beta_2^2+\beta_3^2-\gamma_2^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2-\gamma_2^2=L_e^2+L_s^2+2L_sL_eC_4-\gamma_2^2 \quad\cdots\cdots\cdots (39)$$

より

$$S_4=\lambda_4\sqrt{1-C_4^2}=\lambda_4\frac{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}{L_e} \quad\cdots\cdots\cdots (40)$$

を得る．以上の式を式(18.a)の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}&(p_xC_1+p_yS_1)C_2-p_zS_2-L_eC_3S_4\\ &=\alpha_2\frac{\beta_2\gamma_2+\lambda_2\alpha_2\sqrt{A_2}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}-\beta_2\frac{\alpha_2\gamma_2-\lambda_2\beta_2\sqrt{A_2}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}-L_e\frac{-\lambda_3\lambda_2\sqrt{A_2}}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}\lambda_4\frac{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}{L_e} \quad\cdots\cdots\cdots (41)\\ &=\lambda_2\sqrt{A_2}+\lambda_2\lambda_3\lambda_4\sqrt{A_2}=(1+\lambda_3\lambda_4)\lambda_2\sqrt{A_2}\end{aligned}$$

となり，式(18.b)の左辺に代入すると

$$-p_xS_1+p_yC_1-L_eS_3S_4=-\beta_3-L_e\frac{\lambda_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}\lambda_4\frac{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}{L_e}=-(1+\lambda_3\lambda_4)\beta_3 \quad\cdots\cdots\cdots (42)$$

となるため,

$$1+\lambda_3\lambda_4=0 \quad\cdots\cdots\cdots (43)$$

すなわち

$$\lambda_3=-\lambda_4 \quad\cdots\cdots\cdots (44)$$

を得る．

2.2.1.4 関節角

以上から，関節角 θ_1 から θ_3 は次の式で決まる．

$$\theta_1 = \text{任意} \quad (45)$$

とする．

$$A_2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 \geq 0 \quad (46)$$

を満たすときに，

$$\theta_2 = \mathrm{atan\,2}((\alpha_2\gamma_2 - \lambda_2\beta_2\sqrt{A_2}), (\beta_2\gamma_2 + \lambda_2\alpha_2\sqrt{A_2})) \quad (47)$$

$$\theta_3 = \mathrm{atan\,2}((-\lambda_4\beta_3), (\lambda_2\lambda_4\sqrt{A_2})) \quad (48)$$

ただし

$$\alpha_2 = p_x C_1 + p_y S_1,\ \beta_2 = p_z,\ \gamma_2 = L_s + L_e C_4,\ \beta_3 = p_x S_1 - p_y C_1,$$

$$\lambda_2 = \pm 1 \quad (49)$$

上記の結果から，第 1 関節を固定した場合には 4 種類の組み合わせ（$\lambda_2 = \pm 1$，$\lambda_4 = \pm 1$）が存在する．

2.2.2 第 3 関節（S3）を冗長とした場合の決定法

S3 を冗長として選択した場合の決定法を示す．

2.2.2.1 第 1 関節（S1）の決定

式(18.b)において

$$\alpha_1' = -p_x,\ \beta_1' = p_y,\ \gamma_1' = L_e S_3 S_4 \quad (50)$$

とおくと

$$\alpha_1' S_1 + \beta_1' C_1 = \gamma_1' \quad (51)$$

と書けるため

$$\theta_1' = \mathrm{atan\,2}(\alpha_1', \beta_1') - \mathrm{atan\,2}(\lambda_1'\sqrt{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 - \gamma_1'^2}, \gamma_1'),\ \lambda_1' = \pm 1 \quad (52)$$

2.2.2.2 第 2 関節（S2）

式(18.a)と(18.c)を用いて θ_1 を消去すると

$$-L_e C_3 S_4 S_2 + (L_s + L_e C_4) C_2 = p_z \quad (53)$$

を得る．これは

$$\alpha_2' S_2 + \beta_2' C_2 = \gamma_2' \quad (54)$$

ただし

$$\alpha_2' = -L_e C_3 S_4,\ \beta_2' = L_s + L_e C_4,\ \gamma_2' = p_z \quad (55)$$

と表わせるため

$$\theta_2' = \mathrm{atan\,2}(\alpha_2', \beta_2') - \mathrm{atan\,2}(\lambda_2'\sqrt{\alpha_2'^2 + \beta_2'^2 - \gamma_2'^2}, \gamma_2'),\ \lambda_2' = \pm 1 \quad (56)$$

を得る．

2.2.2.3 符合の決定

まず，次の式を定義する．

$$A_1' := \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 - \gamma_1'^2 = p_x{}^2 + p_y{}^2 - L_e{}^2 S_3{}^2 S_4{}^2 \quad (57)$$

$$\begin{aligned} A_2' &:= \alpha_2'^2 + \beta_2'^2 - \gamma_2'^2 = (L_e C_3 S_4)^2 + (L_s + L_e C_4)^2 - p_z{}^2 \\ &= L_e{}^2(1 - S_3{}^2)S_4{}^2 + L_s{}^2 + 2L_s L_e C_4 + L_e{}^2(1 - S_4{}^2) - p_z{}^2 \\ &= L_s{}^2 + L_e{}^2 - p_z{}^2 + 2L_s L_e C_4 - L_e{}^2 S_3{}^2 S_4{}^2 \\ &= L_s{}^2 + L_e{}^2 - p_z{}^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - L_s^2 - L_e^2) - L_e{}^2 S_3{}^2 S_4{}^2 = p_x^2 + p_y^2 - L_e{}^2 S_3{}^2 S_4{}^2 = A_1' \end{aligned} \quad (58)$$

したがって

$$C_1' = \frac{\beta_1'\gamma_1' + \lambda_1'\alpha_1'\sqrt{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 - \gamma_1'^2}}{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2} = \frac{\beta_1'\gamma_1' + \lambda_1'\alpha_1'\sqrt{A_1'}}{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2} \quad (59)$$

$$S_1' = \frac{\alpha_1'\gamma_1' - \lambda_1'\beta_1'\sqrt{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 - \gamma_1'^2}}{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2} = \frac{\alpha_1'\gamma_1' - \lambda_1'\beta_1'\sqrt{A_1'}}{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2} \quad (60)$$

および

$$C'_2=\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{\alpha'^2_2+\beta'^2_2-\gamma'^2_2}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}=\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2} \quad\cdots\cdots (61)$$

$$S'_2=\frac{\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_2\beta'_2\sqrt{\alpha'^2_2+\beta'^2_2-\gamma'^2_2}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}=\frac{\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_2\beta'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2} \quad\cdots\cdots (62)$$

式(18.a)の左辺は

$$\begin{aligned}
&(p_xC_1+p_yS_1)C_2-p_zS_2-L_eC_3S_4\\
&=(-\alpha'_1\frac{\beta'_1\gamma'_1+\lambda'_1\alpha'_1\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_1+\beta'^2_1}+\beta'_1\frac{\alpha'_1\gamma'_1-\lambda'_1\beta'_1\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_1+\beta'^2_1})\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}-\gamma'_2\frac{\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_2\beta'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}+\alpha'_2\\
&=(-\lambda'_1\sqrt{A'_1})\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}+\frac{\alpha'_2A'_1+\lambda'_2\beta'_2\gamma'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}\\
&=(-\lambda'_1\sqrt{A'_1})\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}+\frac{\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}+\beta'_2\gamma'_2}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}\lambda'_2\sqrt{A'_1}=\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}(\lambda'_2-\lambda'_1)\sqrt{A'_1}\\
&=(\lambda'_2-\lambda'_1)\sqrt{A'_1}C'_2
\end{aligned} \quad\cdots\cdots (63)$$

となり，式(18.c)の左辺は

$$\begin{aligned}
&(p_xC_1+p_yS_1)S_2+p_zC_2-(L_s+L_eC_4)\\
&=(-\lambda'_1\sqrt{A'_1})\frac{\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_2\beta'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}+\gamma'_2\frac{\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_2\alpha'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}-\beta'_2\\
&=(-\lambda'_1\sqrt{A'_1})\frac{\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_2\beta'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}+\frac{-\beta'_2A'_1+\lambda'_2\alpha'_2\gamma'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}=\frac{\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_2\beta'_2\sqrt{A'_1}}{\alpha'^2_2+\beta'^2_2}(\lambda'_2-\lambda'_1)\sqrt{A'_1}\\
&=(\lambda'_2-\lambda'_1)\sqrt{A'_1}S'_2
\end{aligned} \quad\cdots\cdots (64)$$

となる．したがって，

$$\lambda'_1=\lambda'_2 \quad\cdots\cdots (65)$$

が条件となる．

2.2.2.4 関節角

以上から，関節角 θ_1 から θ_3 は次の式で決まる．

$$\theta_3=\text{任意} \quad\cdots\cdots (66)$$

とする．

$$A'_1=\alpha'^2_1+\beta'^2_1-\gamma'^2_1\geq 0 \quad\cdots\cdots (67)$$

を満たすときに，

$$\theta'_1=\mathrm{atan\,2}((\alpha'_1\gamma'_1-\lambda'_1\beta'_1\sqrt{A'_1}),(\beta'_1\gamma'_1+\lambda'_1\alpha'_1\sqrt{A'_1})) \quad\cdots\cdots (68)$$

$$\theta'_2=\mathrm{atan\,2}((\alpha'_2\gamma'_2-\lambda'_1\beta'_2\sqrt{A'_1}),(\beta'_2\gamma'_2+\lambda'_1\alpha'_2\sqrt{A'_1})) \quad\cdots\cdots (69)$$

$$\alpha'_1=-p_x,\ \beta'_1=p_y,\ \gamma'_1=L_eS_3S_4,\ \alpha'_2=-L_eC_3S_4,\ \beta'_2=L_s+L_eC_4,\ \gamma'_2=p_z$$

$$\lambda'_1=\pm1 \quad\cdots\cdots (70)$$

上記の結果から，第 3 関節を固定した場合には 4 種類の組み合わせ（$\lambda'_1=\pm1$，$\lambda_4=\pm1$）が存在する．

2.3 第 5 関節（E2）から第 7 関節（W2）の決定

次に，手先の姿勢成分を一致させるために，第 5 関節（E2）から第 7 関節（W2）の角度を求める．第 1 関節から第 4 関節の関節角度は 2.2 節の結果，既知となるため

$$\{{}^{e1}T_{w2}\}:=\{{}^{s3}T_{e1}\}^{-1}\{{}^{s2}T_{s3}\}^{-1}\{{}^{s1}T_{s2}\}^{-1}\{{}^{a}T_{s1}\}^{-1}\{{}^{a}T^{*}_{w2}\}=\{{}^{e1}T_{e2}\}\{{}^{e2}T_{w1}\}\{{}^{w1}T_{w2}\} \quad\cdots\cdots (71)$$

を用いる．同次変換行列の姿勢成分は

$$\{{}^{e1}T_{w2}\} = \{{}^{s3}T_{e1}\}^{-1}\{{}^{s2}T_{s3}\}^{-1}\{{}^{s1}T_{s2}\}^{-1}\{{}^{a}T_{s1}\}^{-1}\{{}^{a}T^{*}_{w2}\}$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}R_{e1} & * \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} & * \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} & * \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \cdots (72)$$

および

$$\{{}^{e1}T_{w2}\} = \{{}^{e1}T_{e2}\}\{{}^{e2}T_{w1}\}\{{}^{w1}T_{w2}\} = \left[\begin{array}{ccc|c} -S_5S_7 + C_5C_6C_7 & -S_5C_7 - C_5C_6S_7 & C_5S_6 & * \\ C_5S_7 + S_5C_6C_7 & C_5C_7 - S_5C_6S_7 & S_5S_6 & * \\ -S_6C_7 & S_6S_7 & C_6 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \cdots (73)$$

と与えられる．したがって，式(71)と式(72)が一致するという拘束条件より

$$C_6 = r'_{33},\ S_6{}^2 = r'_{31}{}^2 + r'_{32}{}^2 \quad \cdots (74)$$

であため

$$\theta_6 = \mathrm{atan}\,2(\lambda_6\sqrt{r'_{31}{}^2 + r'_{32}{}^2}, r_{33}) = \mathrm{atan}\,2(\lambda_6\sqrt{r'_{31}{}^2 + r'_{32}{}^2}, r_{33}),\ \lambda_6 = \pm 1 \quad \cdots (75)$$

を得る． $|S_6| \neq 0$ のとき

$$\theta_5 = \mathrm{atan}\,2(\lambda_6 r'_{23}, \lambda_6 r'_{13}) \quad \cdots (76)$$
$$\theta_7 = \mathrm{atan}\,2(\lambda_6 r'_{32}, -\lambda_6 r'_{31}) \quad \cdots (77)$$

と決まる．他方， $|S_6| = 0$ のとき $C_6 = r'_{33} = \pm 1$ であるため

$$\sin(\theta_5 + r'_{33}\theta_7) = r'_{21},\ \cos(\theta_5 + r'_{33}\theta_7) = r'_{22} \quad \cdots (78)$$

となり

$$\theta_5 = \mathrm{atan}\,2(r'_{21}, r'_{22}) - r'_{33}\theta_7 \quad \text{for } {}^{\forall}\theta_7 \quad \cdots (79)$$

を得る．

手先関節には 2 種類の組み合わせが存在する．したがって，第 1 関節を固定した場合，関節角 θ_2 から θ_7 には 8 種類の組み合わせが存在する．

θ_5 と θ_7 について他の方法で求めてみる．

$$r'_{22} + r'_{11} = (C_5C_7 - S_5C_6S_7) + (-S_5S_7 + C_5C_6C_7) = \cos(\theta_5+\theta_7) + C_6\cos(\theta_5+\theta_7) = (1+C_6)\cos(\theta_5+\theta_7),$$
$$r'_{21} - r'_{12} = (C_5S_7 + S_5C_6C_7) - (-S_5C_7 - C_5C_6S_7) = \sin(\theta_5+\theta_7) + C_6\sin(\theta_5+\theta_7) = (1+C_6)\sin(\theta_5+\theta_7),$$
$$r'_{22} - r'_{11} = (C_5C_7 - S_5C_6S_7) - (-S_5S_7 + C_5C_6C_7) = \cos(\theta_5-\theta_7) - C_6\cos(\theta_5-\theta_7) = (1-C_6)\cos(\theta_5-\theta_7),$$
$$r'_{21} + r'_{12} = (C_5S_7 + S_5C_6C_7) + (-S_5C_7 - C_5C_6S_7) = -\sin(\theta_5-\theta_7) + C_6\sin(\theta_5-\theta_7) = (C_6-1)\sin(\theta_5-\theta_7)$$
$$\cdots (80)$$

$C_6 \neq -1$ のとき

$$\theta_5 + \theta_7 = \mathrm{atan}\,2(r'_{21} - r'_{12}, r'_{11} + r'_{22}) \quad \cdots (81)$$

$C_6 \neq 1$ のとき

$$\theta_5 - \theta_7 = \mathrm{atan}\,2(-r'_{21} - r'_{12}, r'_{22} - r'_{11}) \quad \cdots (82)$$

$C_6 \neq \pm 1$

$$\theta_5 = \{\mathrm{atan}\,2(r'_{21} - r'_{12}, r'_{11} + r'_{22}) + \mathrm{atan}\,2(-r'_{21} - r'_{12}, r'_{22} - r'_{11})\}/2,$$
$$\theta_7 = \{\mathrm{atan}\,2(r'_{21} - r'_{12}, r'_{11} + r'_{22}) - \mathrm{atan}\,2(-r'_{21} - r'_{12}, r'_{22} - r'_{11})\}/2 \quad \cdots (83)$$

3. ロボットアームのヤコビアン

ロボットアームを制御する場合には，関節速度と手先速度の関係を求めておく必要がある．この速度の関係は Jacobian と呼ばれる．本節では，1 節で示した同次変換行列を基にしてこのヤコビ行列を導出する．基準座標系に対するハンド座標系の相対速度をハンド座標系の視点で見ると 4 行 4 列の速度行列は次の式で求められる．（付録参照）

$${}^{body}\hat{V}_{b,h} := \{{}^{b}T_h\}^{-1}\{{}^{b}\dot{T}_h\} = \{{}^{w2}T_h\}^{-1}\{{}^{a}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{b}T_a\}^{-1}\{{}^{b}T_a\}\{{}^{a}\dot{T}_{w2}\}\{{}^{w2}T_h\}$$
$$= \{{}^{w2}T_h\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{a,w2}\}\{{}^{w2}T_h\}$$

ここで，左上添え字 body は Body velocity を表わし，spatial は Spatial velocity を表わす．さらに

$$
\begin{aligned}
{}^{body}\hat{V}_{a,w2} :=& \{{}^{a}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{a}\dot{T}_{w2}\} \\
=& \{{}^{s1}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{a,s1}\}\{{}^{s1}T_{w2}\}+\{{}^{s2}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{s1,s2}\}\{{}^{s2}T_{w2}\}+\{{}^{s3}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{s2,s3}\}\{{}^{s3}T_{w2}\} \\
&+\{{}^{e1}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{s3,e1}\}\{{}^{e1}T_{w2}\}+\{{}^{e2}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{e1,e2}\}\{{}^{e2}T_{w2}\} \\
&+\{{}^{w1}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{e2,w1}\}\{{}^{w1}T_{w2}\}+\{{}^{body}\hat{V}_{w1,w2}\}
\end{aligned}
$$

を得る．6 次元の速度ベクトルは

$$
{}^{body}V_{b,h}=\{{}^{h}H_{w2}\}\{{}^{body}V_{a,w2}\}
$$

および

$$
\begin{aligned}
{}^{body}V_{a,w2} =& \{{}^{w2}H_{s1}\}\{{}^{body}V_{a,s1}\}+\{{}^{w2}H_{s2}\}\{{}^{body}V_{s1,s2}\}+\{{}^{w2}H_{s3}\}\{{}^{body}V_{s2,s3}\} \\
&+\{{}^{w2}H_{e1}\}\{{}^{body}V_{s3,e1}\}+\{{}^{w2}H_{e2}\}\{{}^{body}V_{e1,e2}\}+\{{}^{w2}H_{w1}\}\{{}^{body}V_{e2,w1}\}+\{{}^{w2}H_{w2}\}\{{}^{body}V_{w1,w2}\}
\end{aligned}
$$

で得られる．ただし

$$
\begin{aligned}
{}^{body}\hat{V}_{a,s1} =& \{{}^{a}T_{s1}\}^{-1}\{{}^{a}\dot{T}_{s1}\} \\
=& \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_{s1} & \sin\theta_{s1} & 0 & 0 \\ -\sin\theta_{s1} & \cos\theta_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\left[\begin{array}{ccc|c} -\sin\theta_{s1} & -\cos\theta_{s1} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{s1} & -\sin\theta_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\dot{\theta}_{s1}
= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\dot{\theta}_{s1} \\
=& \left[\begin{array}{c|c} [\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times] & \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\dot{\theta}_{s1}
\end{aligned}
$$

より

$$
{}^{body}V_{a,s1}=[0,0,0,0,0,1]^{T}\dot{\theta}_{s1}
$$

となるため，

$$
\begin{aligned}
\{{}^{w2}H_{s1}\}\{{}^{body}V_{a,s1}\} =& [\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,x}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,y}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,z}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,\alpha}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,\beta}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,\gamma}\}][0,0,0,0,0,1]^{T}\dot{\theta}_{s1} \\
=& \{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,\gamma}\}\dot{\theta}_{s1}
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして

$$
\begin{aligned}
&{}^{body}V_{s1,s2}=[0,0,0,0,1,0]^{T}\dot{\theta}_{s2},\quad {}^{body}V_{s2,s3}=[0,0,0,0,0,1]^{T}\dot{\theta}_{s3}, \\
&{}^{body}V_{s3,e1}=[0,0,0,0,1,0]^{T}\dot{\theta}_{e1},\quad {}^{body}V_{e1,e2}=[0,0,0,0,0,1]^{T}\dot{\theta}_{e2}, \\
&{}^{body}V_{e2,w1}=[0,0,0,0,1,0]^{T}\dot{\theta}_{w1},\quad {}^{body}V_{w1,w2}=[0,0,0,0,0,1]^{T}\dot{\theta}_{w2}
\end{aligned}
$$

を得るため，

$$
\begin{aligned}
{}^{body}V_{a,w2} =& \{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,\gamma}\}\dot{\theta}_{s1}+\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s2,\beta}\}\dot{\theta}_{s2}+\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s3,\gamma}\}\dot{\theta}_{s3} \\
&+\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{e1,\beta}\}\dot{\theta}_{e1}+\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{e2,\gamma}\}\dot{\theta}_{e2}+\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{w1,\beta}\}\dot{\theta}_{w1}+\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{w2,\gamma}\}\dot{\theta}_{w2} \\
=& [\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s1,\gamma}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s2,\beta}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{s3,\gamma}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{e1,\beta}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{e2,\gamma}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{w1,\beta}\},\{{}^{w2}\boldsymbol{h}_{w2,\gamma}\}]\dot{\boldsymbol{\theta}} \\
=& \{{}^{body}J_{a,w2}\}\dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，Σ_b に対する Σ_h の速度を Σ_h で表わすと

$$
{}^{body}V_{b,h}=\{{}^{h}H_{w2}\}\{{}^{body}J_{a,w2}\}\dot{\boldsymbol{\theta}}
$$

で得られる．

手首座標系の速度は

$$
{}^{a}\dot{T}_{w2} = \{{}^{a}T_{w2}\}\{{}^{body}\hat{V}_{a,w2}\} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}R_{w2} & {}^{a}\boldsymbol{p}_{a,w2} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} [{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,w2}\times] & {}^{body}\boldsymbol{v}_{a,w2} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}R_{w2}[{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,w2}\times] & {}^{a}R_{w2}\,{}^{body}\boldsymbol{v}_{a,w2} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
{}^{b}\dot{T}_{h} = \{{}^{b}T_{h}\}\{{}^{body}\hat{V}_{b,h}\} = \{{}^{b}T_{h}\}\{{}^{w2}T_{h}\}^{-1}\{{}^{body}\hat{V}_{a,w2}\}\{{}^{w2}T_{h}\}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} {}^{b}R_{w2} & {}^{b}\boldsymbol{p}_{b,w2} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} [{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,w2}\times] & {}^{body}\boldsymbol{v}_{a,w2} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} {}^{w2}R_{h} & {}^{w2}\boldsymbol{p}_{w2,h} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} \{{}^{b}R_{w2}\}[{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,w2}\times]\{{}^{w2}R_{h}\} & \{{}^{b}R_{w2}\}[{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,w2}\times]\{{}^{w2}\boldsymbol{p}_{w2,h}\} + \{{}^{b}\boldsymbol{p}_{b,w2}\}\{{}^{body}\boldsymbol{v}_{a,w2}\} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]
$$

<u>付録</u>

一般に座標系 Σ_a と Σ_b との関係を表す同次変換行列：

$$
{}^{a}T_{b} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}R_{b} & {}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right],
$$

を用いると，4 行 4 列の Body velocity は次のように得られる.

$$
{}^{body}\hat{V}_{a,b} := \{{}^{a}T_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\dot{T}_{b}\}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} \{{}^{a}R_{b}\}^{-1} & -\{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} {}^{a}\dot{R}_{b} & {}^{a}\dot{\boldsymbol{p}}_{a,b} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\dot{R}_{b}\} & \{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\dot{\boldsymbol{p}}_{a,b}\} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
=: \left[\begin{array}{c|c} [{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\times] & {}^{body}\boldsymbol{v}_{a,b} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

6 次元ベクトルの Body velocity は次の式で得られる.

$$
{}^{body}V_{a,b} = \begin{bmatrix} {}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b} \\ {}^{body}\boldsymbol{v}_{a,b} \end{bmatrix}
$$

Spatial velocity は次のようになる.

$$
{}^{spatial}\hat{V}_{a,b} = \{{}^{a}\dot{T}_{b}\}\{{}^{a}T_{b}\}^{-1}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}\dot{R}_{b} & {}^{a}\dot{\boldsymbol{p}}_{a,b} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \{{}^{a}R_{b}\}^{-1} & -\{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} \{{}^{a}\dot{R}_{b}\}\{{}^{a}R_{b}\}^{-1} & \{{}^{a}\dot{R}_{b}\}\{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\} + \{{}^{a}\dot{\boldsymbol{p}}_{a,b}\} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
=: \left[\begin{array}{c|c} [{}^{spatial}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\times] & {}^{spatial}\boldsymbol{v}_{a,b} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Spatial velocity と Body velocity の関係を求める.

$$
{}^{spatial}\hat{V}_{a,b} = \{{}^{a}T_{b}\}\{{}^{body}\hat{V}_{a,b}\}\{{}^{a}T_{b}\}^{-1}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}R_{b} & {}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} [{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\times] & {}^{body}\boldsymbol{v}_{a,b} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \{{}^{a}R_{b}\}^{-1} & -\{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} \{{}^{a}R_{b}\}[{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\times]\{{}^{a}R_{b}\}^{-1} & -\{{}^{a}R_{b}\}[{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\times]\{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\} + \{{}^{a}R_{b}\}\{{}^{body}\boldsymbol{v}_{a,b}\} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

より

$$
{}^{spatial}V_{a,b} = \begin{bmatrix} \{{}^{a}R_{b}\}\{{}^{body}\boldsymbol{v}_{a,b}\} - \{{}^{a}R_{b}\}[{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\times]\{{}^{a}R_{b}\}^{-1}\{{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\} \\ \{{}^{a}R_{b}\}\{{}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b}\} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{a}R_{b} & [{}^{a}\boldsymbol{p}_{a,b}\times]{}^{a}R_{b} \\ \hline 0 & {}^{a}R_{b} \end{array}\right]\begin{bmatrix} {}^{body}\boldsymbol{v}_{a,b} \\ {}^{body}\boldsymbol{\omega}_{a,b} \end{bmatrix}
$$

$$
= \{{}^{a}H_{b}\}\{{}^{body}V_{a,b}\}
$$

を得る．

4. 制御系

制御系として，目標関節角度に一致させる制御と，手首位置・姿勢を目標値に一致させる制御を述べる．

4.1 関節角制御

関節角度を目標値に一致させる制御を述べる．初期(Start)角度 θ_s を目標の最終(End)角度 θ_e に，加速，等速，減速により変化させる．各部で位置，速度，加速度の連続条件を考慮すると，

加速部： $\theta(t)=\theta_0+kt^3(2t_1-t)$

等速部： $\theta(t)=\theta_f+kt_1^3\{2(t-t_f)+t_1\}$

減速部： $\theta(t)=\theta_0+k(t-t_f)^3(2t_1+t-t_f)$

となる．ここで，係数パラメータは

$$k=\frac{\theta_f-\theta_0}{2t_1^3(t_f-t_1)}$$

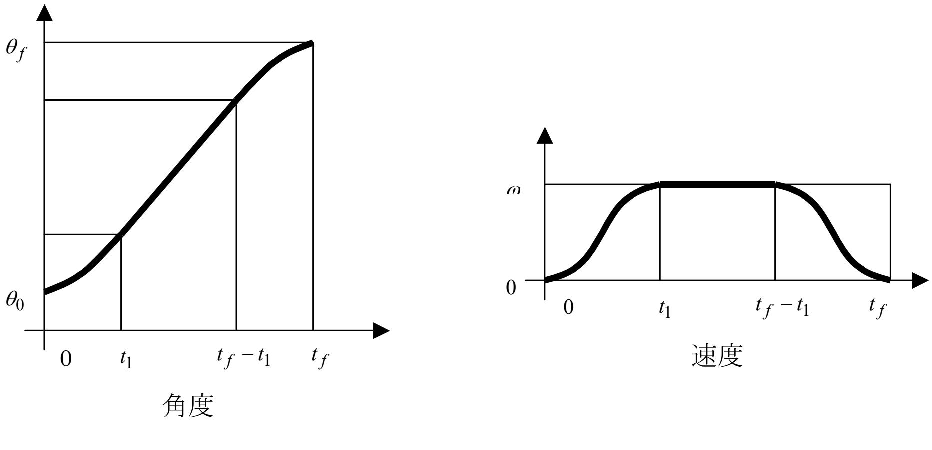
等速部の速度は

$$\omega=\frac{\theta_f-\theta_0}{t_f-t_1}$$

となる．等速部の速度制限を設定すると，制御終了時刻 t_f は

$$t_{fi}=\frac{|\theta_f-\theta_0|}{\omega}+t_1$$

となる．



7 関節を同時に制御する場合には，7 軸の中での最長の制御時間を

$$t_{f\max}=\max_i\{t_{fi}\}$$

として算出し，

$$k_{\max}=\frac{\theta_f-\theta_0}{2t_1^3(t_{f\max}-t_1)}$$

を計算し，式(　)で制御する．

4.2 手首位置・姿勢制御

位置・姿勢誤差をもとにした速度制御系を示す．

4.2.1 手首座標系によるアームの制御

手首座標系の位置・姿勢を目標値に収束させる制御系を示す．

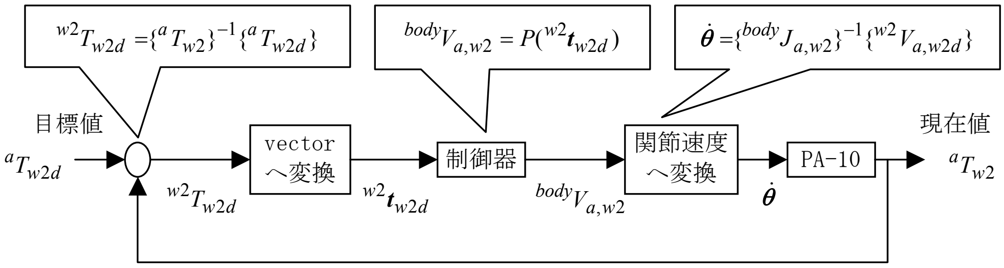
${}^aT_{w2}$ ：現在値（位置・姿勢）

${}^aT_{w2d}$ ：目標値

${}^{w2}T_{w2d} = \{{}^{a}T_{w2}\}^{-1}\{{}^{a}T_{w2d}\}$ ：現在値と目標値との誤差

${}^{w2}\boldsymbol{t}_{w2d} := \{{}^{w2}T_{w2d}\}^{\vee}$ ：現在値と目標値との位置・姿勢誤差の 6 次元ベクトル表記

P：コントローラ・ゲイン



手首座標系の目標値によるフィードバック制御

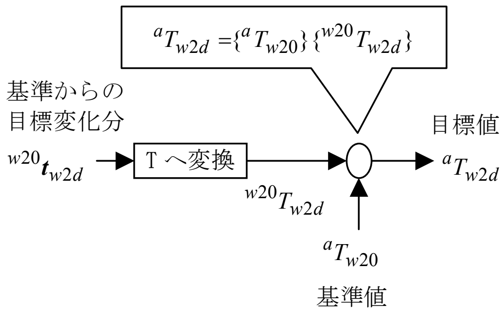
4.2.2 手首座標系の目標値の生成方法

手首座標系の目標値を生成する方法を示す.

${}^{a}T_{w20}$ ：時刻 t_0 の時に設定した基準値

${}^{w20}T_{w2d} = \{{}^{a}T_{w20}\}^{-1}\{{}^{a}T_{w2d}\}$ ：基準値と目標値との誤差

${}^{w20}\boldsymbol{t}_{w2d} := \{{}^{w20}T_{w2d}\}^{\vee}$ ：基準値と目標値との位置・姿勢誤差の 6 次元ベクトル表記



時刻 t_0 の手首座標系を基準にした目標値の生成

4.2.3 ハンド座標系による制御

ハンド座標系と手首座標系の関係は式(2)で与えられる．すなわち,

${}^{b}T_{h} = \{{}^{b}T_{a}\}\{{}^{a}T_{w2}\}\{{}^{w2}T_{h}\}$ ：現在値

${}^{b}T_{hd} = \{{}^{b}T_{a}\}\{{}^{a}T_{w2d}\}\{{}^{w2}T_{h}\}$ ：目標値

である．したがって，ハンド座標系の目標値を手首座標系へ変換するには次の式を用いる.

$${}^{a}T_{w2d} = \{{}^{b}T_{a}\}^{-1}\{{}^{b}T_{hd}\}\{{}^{w2}T_{h}\}^{-1}$$

4.2.4 ハンド座標系の目標値の生成

時刻 t_0 のときの位置・姿勢を基準として制御する場合は

${}^{b}T_{h0} = \{{}^{b}T_{a}\}\{{}^{a}T_{w20}\}\{{}^{w2}T_{h}\}$ ：時刻 t_0 の時に設定した基準値

より

$$\begin{aligned}{}^{h0}T_{hd} &= \{{}^{b}T_{h0}\}^{-1}\{{}^{b}T_{hd}\} = [\{{}^{b}T_{a}\}\{{}^{a}T_{w20}\}\{{}^{w2}T_{h}\}]^{-1}[\{{}^{b}T_{a}\}\{{}^{a}T_{w2d}\}\{{}^{w2}T_{h}\}] \\ &= \{{}^{w2}T_{h}\}^{-1}\{{}^{a}T_{w20}\}^{-1}\{{}^{a}T_{w2d}\}\{{}^{w2}T_{h}\} \\ &= \{{}^{w2}T_{h}\}^{-1}\{{}^{w20}T_{w2d}\}\{{}^{w2}T_{h}\}\end{aligned}$$

すなわち

$${}^{h0}\boldsymbol{t}_{hd} = \{{}^{h0}T_{hd}\}^{\vee} = [\{{}^{w2}T_{h}\}^{-1}\{{}^{w20}T_{w2d}\}\{{}^{w2}T_{h}\}]^{\vee} = \{{}^{h}H_{w2}\}\{{}^{w20}\boldsymbol{t}_{w2d}\}$$

となるため,

$${}^{w20}\boldsymbol{t}_{w2d} = \{{}^{h}H_{w2}\}^{-1}\{{}^{h0}\boldsymbol{t}_{hd}\}$$

の変換を用いて手首座標系に変換し，制御することができる．

$$ {}^{h0}\boldsymbol{t}_{hd} \longrightarrow \boxed{{}^{w2}H_h} \longrightarrow {}^{w20}\boldsymbol{t}_{w2d} $$

力制御

手首部に装備した 6 軸力覚センサから得られる力・モーメント情報を用いると，接触力に応じて柔軟な作業を実行することが可能となる．力制御手法を述べる．

外力に応じて目標値から変位させる場合

手首座標系に対するセンサ座標系の位置・姿勢を ${}^{w2}T_{fs}$ とする．センサ原点で計測されるレンチ（力・モーメント）ベクトルを $\boldsymbol{w}_{fs}=[\boldsymbol{f}^T,\boldsymbol{n}^T]^T$ とする．これをハンド座標系の位置に換算すると

$$\boldsymbol{w}_h=\{{}^{h}H_{fs}\}\boldsymbol{w}_{fs}$$

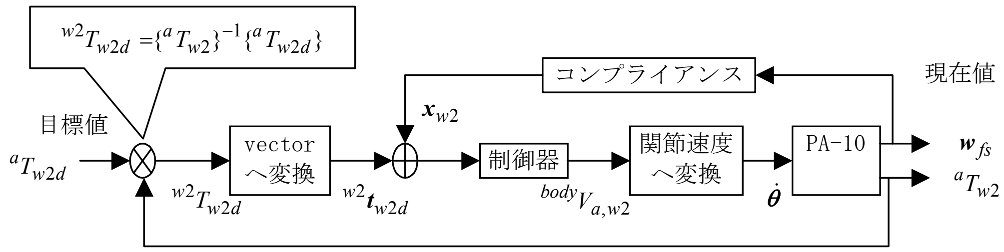
となる．ハンド座標系の原点で発生させる並進と回転方向の仮想的なコンプライアンスを $C_h=\{K_h\}^{-1}\in\Re^{6\times 6}$ とすると，ハンド座標系で発生すべき変位は

$$\boldsymbol{x}_h=C_h\boldsymbol{w}_h=C_h\{{}^{h}H_{fs}\}\boldsymbol{w}_{fs}$$

となる．したがって，手首部で発生すべき変位は

$$\boldsymbol{x}_{w2}=\{{}^{w2}H_h\}\boldsymbol{x}_h=\{{}^{w2}H_h\}\{C_h\}\{\boldsymbol{w}_h\}=\{{}^{w2}H_h\}\{C_h\}\{{}^{h}H_{fs}\}\{\boldsymbol{w}_{fs}\}=:\{{}^{w2}C_{fs}\}\{\boldsymbol{w}_{fs}\}$$

となる．



外力に応じて目標値を変化させる場合