

# 転がり接触を考慮した三次元二物体把握系の安定性解析

山田貴孝(名工大) 光田徹治(名工大) ○山本智哉(名工大)  
三村宣治(新潟大) 舟橋康行(中京大)

## Grasp Stability Analysis of Two Objects with Rolling Contact in Three Dimensions

Takayoshi YAMADA, Tetsuji MITSUDA, Tomoya YAMAMOTO,  
Nobuharu MIMURA, and Yasuyuki FUNAHASHI

This paper analyzes grasp stability of two objects with rolling contact in three dimensions. The parameters of object displacement are reduced from 12 to 9, due to rolling contact between two objects. The expression of the independent parameters is provided, and then position displacement of finger is derived. The grasp stability is evaluated from the hessian of the potential energy stored in the grasp. From numerical examples, the effect of curvature at contact point between two objects is demonstrated.

**Key Words:** Grasp stability, multiple objects, rolling contact, multifingered robot hand

### 1. はじめに

ロボットで様々な形状の物体を器用に把握し操るためには、人間の手のような多関節型多指ロボットハンドが有効と考えられる。多指ロボットハンドで物体を把握する場合、把握系の安定性が問題となる。すなわち、物体に外乱が加わり力学的平衡状態から変位しても、再び元の位置に戻るかどうか問題となる。このため文献[1]では3次元単一物体把握系の安定性を解析した。作業の効率化を考えた場合、複数物体の把握が必要となる<sup>[2]</sup>。そこで、文献[3]では複数物体の中で最も簡単な2次元2物体把握系の安定性を解析した。

本論文では文献[3]と同様の問題を、三次元の場合について解析する。2物体の変位のパラメータ数は12であるが、接触状態を転がり接触とすると、接触の拘束条件のために減少する。これを、物体同士の接触点座標系で生じる微小変位で表わし、指先位置の微小変位を導出する。そして、ポテンシャルエネルギーの観点から解析する。

### 2. 問題の設定

#### 2.1 仮定

Fig. 1 に示すように、三次元平面内で多指ロボットハンドにより2つの物体を把握しているとする。以下の仮定のもとで解析を行う。

- (A1) 物体および指先は剛体である。
- (A2) 指先と物体、物体と物体はそれぞれ1点で接触をする。
- (A3) 接触点位置、接触点での法線、接触点近傍の曲率は既知である。また、接触点近傍の2方向の主曲率は同じとする。
- (A4) 初期把握状態は力学的平衡状態にある。

- (A5) 接触点には摩擦が有り、転がり接触をする。
- (A6) 外乱による物体の位置・姿勢変位は微小である。
- (A7) 指先の姿勢変位は生じない。
- (A8) 指先の位置変位と反力との関係は三次元の直交仮想バネで置き換えられる。

仮定(A5)の転がり接触は、接触点での相対速度の並進成分が $v_x = v_y = v_z = 0$ となる接触状態とする。仮定(A7)について、指先が回転する一般的な場合は今後の研究課題とする<sup>[1][3]</sup>。

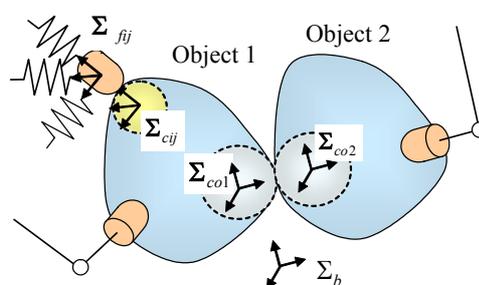


Fig. 1: Two objects grasped by a multi-fingered hand in three dimensions

#### 2.2 記号

Fig. 1 に示すように、把握系に以下の座標系を設定する。

- $\Sigma_b$ : 基準座標系。
- $\Sigma_{oi}$ : 物体  $i$  の基準座標系。
- $\Sigma_c$ : 物体同士の接触点に設定した座標系。
- $\Sigma_{coi}$ : 物体同士の接触における物体  $i$  側の接触点座標系
- $\Sigma_{cij}$ : 物体  $i$  と指  $j$  との接触における物体側接触点座標系。
- $\Sigma_{fij}$ : 物体  $i$  に接触している指  $j$  の指先座標系。

接触点位置，その法線および曲率を次のように表わす．

- ${}^{oi}c_{coi}$ :  $\Sigma_{oi}$  から見た物体同士の接触点位置．
- ${}^{coi}c_{coi}$ :  $\Sigma_{coi}$  から見た物体同士の接触点位置．
- ${}^{oi}c_{cij}$ :  $\Sigma_{oi}$  から見た指と物体との接触点位置．
- ${}^{oi}n_{coi}$ :  $\Sigma_{oi}$  で見た物体同士の接触点の外向き法線．
- ${}^{oi}n_{cij}$ :  $\Sigma_{oi}$  で見た指との接触点の外向き法線．
- $\kappa_{coi}$ : 物体同士の接触点における，物体  $i$  側の曲率．
- $\kappa_{cij}$ : 物体  $i$  と指  $j$  の接触点における，物体  $i$  側の曲率．
- $\kappa_{fij}$ : 物体  $i$  に接触する指  $j$  の指先の曲率．

初期把握状態における各座標系の位置・姿勢の関係を同次変換行列を用いて表わす．

$${}^{oi}T_{coi} = \begin{bmatrix} {}^{oi}R_{coi} & {}^{oi}p_{coi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{oi}T_{cij} = \begin{bmatrix} {}^{oi}R_{cij} & {}^{oi}p_{cij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^{cij}T_{fij} = \begin{bmatrix} I_3 & (\kappa_{cij}^{-1} + \kappa_{fij}^{-1})\mathbf{u}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし，位置ベクトル  $\mathbf{p}$  と回転行列  $R$  は，仮定(A3)の接触点位置，法線，曲率を用いて次の式で計算できる．

$${}^{oi}p_{cij} = {}^{oi}c_{cij} - \kappa_{cij}^{-1} \{ {}^{oi}n_{cij} \}, \quad {}^{oi}p_{coi} = {}^{oi}c_{coi} - \kappa_{coi}^{-1} \{ {}^{oi}n_{coi} \},$$

$${}^{oi}R_{cij} = [{}^{oi}n_{cij}, {}^{oi}t_{ycij}, {}^{oi}t_{zcyj}],$$

$$\mathbf{n}^T t_y = 0, \quad \mathbf{n}^T t_z = 0, \quad t_y^T t_z = 0, \quad \|\mathbf{t}_y\| = \|\mathbf{t}_z\| = 1. \quad (2)$$

各座標系に生じる微小変位を次のように表記する．

- $\delta\mathbf{X}_{oi} := [\delta\mathbf{x}_{oi}^T, \delta\boldsymbol{\xi}_{oi}^T]^T \in \mathbb{R}^6$ : 初期の  $\Sigma_{oi}$  から見た， $\Sigma_{oi}$  自身の変位量（並進，回転）．
- $\delta\mathbf{X}_{coi} := [\delta\mathbf{x}_{coi}^T, \delta\boldsymbol{\xi}_{coi}^T]^T \in \mathbb{R}^6$ : 初期の  $\Sigma_{coi}$  から見た， $\Sigma_{coi}$  自身の変位量（並進，回転）．
- $\delta\mathbf{X}_{cij} := [\delta\mathbf{x}_{cij}^T, \delta\boldsymbol{\xi}_{cij}^T]^T \in \mathbb{R}^6$ : 初期の  $\Sigma_{cij}$  から見た， $\Sigma_{cij}$  自身の変位量（並進，回転）．
- $\delta\mathbf{X}_{fij} := \delta\mathbf{x}_{fij} \in \mathbb{R}^3$ : 初期の  $\Sigma_{fij}$  から見た， $\Sigma_{fij}$  自身の並進量．

この微小変位に対応する同次変換行列を，次のように表記する．

$${}^{oi}T_{oi}'(\delta\mathbf{X}_{oi}) = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\delta\boldsymbol{\xi}_{oi}) & \delta\mathbf{x}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^{coi}T_{coi}'(\delta\mathbf{X}_{coi}) = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\delta\boldsymbol{\xi}_{coi}) & \delta\mathbf{x}_{coi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^{cij}T_{cij}'(\delta\mathbf{X}_{cij}) = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\delta\boldsymbol{\xi}_{cij}) & \delta\mathbf{x}_{cij} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^{fij}T_{fij}'(\delta\mathbf{X}_{fij}) = \begin{bmatrix} I_3 & \delta\mathbf{x}_{fij} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

プライムは微小変位後を意味する．物体が剛体であるという仮定(A1)より  ${}^{oi}T_{coi}' = {}^{oi}T_{coi}$ ， ${}^{oi}T_{cij}' = {}^{oi}T_{cij}$  である．

仮定 (A8) の仮想バネの剛性を  $K_{ij} = \text{diag}[k_{xij}, k_{yij}, k_{zij}]$  と表記し，指先座標系  $\Sigma_{fij}$  に沿って設定する．ただし， $k_{xi} > 0$ ， $k_{yi} > 0$ ， $k_{zji} > 0$  である．初期把握状態において圧縮されており，仮定 (A4) の初期指先力  $\mathbf{f}_{ij}$  を生じているとする．その圧縮量を  $\delta\mathbf{X}_{fij0} = [x_{fij0}, y_{fij0}, z_{fij0}]^T$  と表記すると

$$\mathbf{f}_{ij} = K_{ij} \delta\mathbf{X}_{fij0} \quad (4)$$

の関係がある．

### 3. 定式化

2 物体のそれぞれに任意の微小変位が生じると，パラメータ数は  $\delta\mathbf{X}_{o1}$ ， $\delta\mathbf{X}_{o2}$  の計 12 となる．しかし，転がり接触のために 2 物体の変位は互いに拘束を受ける．このため，独立なパラメータの表現方法が問題となる．本研究では，その方法の一つとして，物体同士の接触点座標系  $\Sigma_{coi}$  の微小変位を用いて表わす．そして，物体と指先の接触点における各種条件を基に指先の変位を導出する．そして，把握系に蓄えられるポテンシャルエネルギーおよびその 2 階微分であるヘッシアンを導出する．

#### 3.1 物体同士の接触点座標系 $\Sigma_{coi}$ の変位

まず，物体同士の接触点座標系  $\Sigma_{coi}$  で生じる微小変位を考える．この微小変位には Fig. 2 に示す 9 種類が存在する．このそれぞれに対応するパラメータを  $\boldsymbol{\varepsilon} := [\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trans}}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{rot}}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{roll}}^T]^T \in \mathbb{R}^{12}$  とおく． $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trans}} := [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T$  は接触点座標系  $\Sigma_c$  の並進量， $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{rot}} := [\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T$  は  $\Sigma_c$  の回転量， $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{roll}} := [\varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_9]^T$  は転がりの弧長を表わす．したがって， $\Sigma_{coi}$ ， $(i=1,2)$  の変位量  $\delta\mathbf{X}_{coi}$  は次の式で表わすことができる (Fig. 3)．

$$\delta\mathbf{x}_{coi} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trans}} + (I_3 - \text{Rot}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{rot}})) \{ {}^{coi}c_{coi} \}, \quad (5.a)$$

$$\delta\boldsymbol{\xi}_{coi} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{rot}}^T + \gamma_i \kappa_{coi} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{roll}}^T. \quad (5.b)$$

ただし， $\gamma_1 = 1$ ， $\gamma_2 = -1$ ， ${}^{coi}c_{coi} := \gamma_i \kappa_{coi}^{-1} \mathbf{u}_1$  としている．

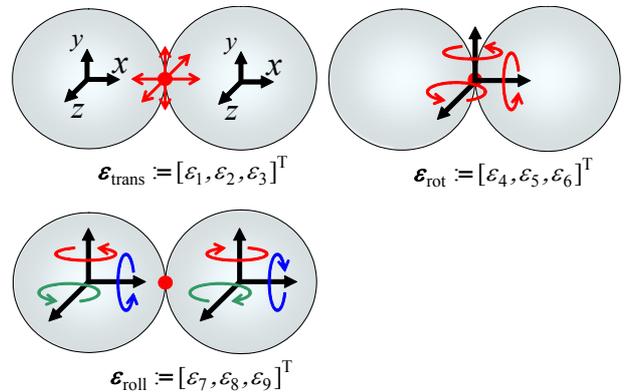


Fig. 2: Nine types of object motion

### 3.2 物体座標系 $\Sigma_{oi}$ と接触点座標系 $\Sigma_{cij}$ の変位

次に、 $\delta\mathbf{X}_{coi}$  を用いて、物体座標系  $\Sigma_{oi}$  に生じる微小変位  $\delta\mathbf{X}_{oi}$  と、指先との接触点座標系  $\Sigma_{cij}$  に生じる微小変位  $\delta\mathbf{X}_{cij}$  を求める。同次変換行列の関係式は

$${}^{oi}T_{oi'}(\delta\mathbf{X}_{oi}) = \{{}^{oi}T_{coi}\} \{{}^{coi}T_{coi'}(\delta\mathbf{X}_{coi})\} \{{}^{oi'}T_{coi'}\}^{-1} \quad (6)$$

$${}^{cij}T_{cij'}(\delta\mathbf{X}_{cij}) = \{{}^{oi}T_{cij}\}^{-1} \{{}^{oi}T_{oi'}(\delta\mathbf{X}_{oi})\} \{{}^{oi'}T_{cij'}\} \quad (7)$$

である。

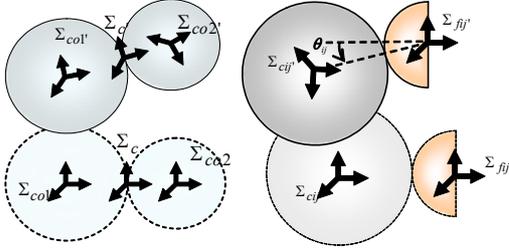


Fig. 3: Displacement of  $\Sigma_{coi}$  Fig. 4: Displacement of  $\Sigma_{fij}$

### 3.3 指先座標系 $\Sigma_{fij}$ の変位

指先の位置変位が並進のみであるという仮定(A7)から、座標系  $\Sigma_{cij}$  が変位すると指先座標系  $\Sigma_{fij}$  は Fig. 4 に示すように変位する。この  $\Sigma_{fij}$  の微小変位  $\delta\mathbf{x}_{fij}$  は次の式で与えられる。

$$\delta\mathbf{x}_{fij} = \delta\mathbf{x}_{cij} + \tilde{\kappa}_{ij}^{-1} \{\text{Rot}(\boldsymbol{\theta}_{ij}) - I_3\} \mathbf{u}_1. \quad (8)$$

ただし、

$$\tilde{\kappa}_{ij}^{-1} := \kappa_{cij}^{-1} + \kappa_{fij}^{-1}, \quad \boldsymbol{\theta}_{ij} = \mu_{ij} \delta\boldsymbol{\xi}_{cij}, \quad \mu_{ij} := \tilde{\kappa}_{ij} \kappa_{cij}^{-1} \quad (9)$$

である。

式(6)~(9)より、物体  $i$  に接触する第  $j$  番目の指先の並進量  $\delta\mathbf{x}_{fij}$  は、

$$\delta\mathbf{x}_{fij} = {}^{cij}R_{oi} \{\delta\mathbf{x}_{coi} + \{\text{Rot}(\delta\boldsymbol{\xi}_{coi}) - I_3\} {}^{coi}P_{coi}\} + \tilde{\kappa}_{ij}^{-1} \{\text{Rot}(\boldsymbol{\theta}_{ij}) - I_3\} \mathbf{u}_1 \quad (10)$$

で与えられる。ただし  ${}^{coi}P_{coi} := {}^{coi}R_{oi}({}^{oi}P_{coi} - {}^{oi}P_{coi})$  である。

### 3.4 把握系のポテンシャルエネルギーとヘッシアン

物体  $i$  に接触する第  $j$  番目の指先の仮想バネに蓄えられるポテンシャルエネルギー  $U_{ij}$  は次の式で与えられる。

$$U_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}_{fij}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{fij0}\}^T K_{ij} \{\boldsymbol{\varepsilon}_{fij}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{fij0}\} \quad (11)$$

よって、把握系全体のポテンシャルエネルギー  $U$  は、

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i,j} U_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (12)$$

となり、Fig. 2 の 9 つのパラメータの関数として求まる。したがって、ポテンシャルエネルギーの二階微分のヘッシアン  $H$  は、式(10)より

$$H = \sum_{i,j} H_{ij} \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \quad (13)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2} V_{ai} (S_{aij} + S_{aij}^T) V_{ai}^T + \frac{1}{2} V_b (S_{bij} + S_{bij}^T) V_b^T + E_{coi} W_{ij} K_{ij} W_{ij}^T E_{coi}^T \quad (14)$$

となる。ただし、

$$S_{bij} := -[{}^{coi}c_{coi} \times] [({}^{coi}R_{cij} f_{ij}) \times],$$

$$S_{aij} := [(\{{}^{coi}R_{oi}\} \{{}^{oi}c_{cij} - {}^{oi}P_{coi} - \frac{1}{\tilde{\kappa}_{cij} + \tilde{\kappa}_{fij}} {}^{oi}n_{cij}\}) \times] [({}^{coi}R_{cij} f_{ij}) \times]$$

$$E_{coi} := \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} \\ -[{}^{coi}c_{coi} \times] & I_3 \\ 0_{3 \times 3} & \gamma_i \kappa_{coi} I_3 \end{bmatrix},$$

$$W_{ij} := \begin{bmatrix} I_3 \\ [(\{{}^{coi}R_{oi}\} \{{}^{oi}c_{cij} - {}^{oi}P_{coi}\}) \times] \end{bmatrix} \{{}^{coi}R_{cij}\},$$

$$V_{ai} := E_{coi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad V_b := \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$${}^{coi}R_{cij} := \{{}^{oi}R_{coi}\}^T \{{}^{oi}R_{cij}\},$$

$$f_{ij} := f_{xij} \mathbf{u}_1 + f_{yij} \mathbf{u}_2 + f_{zij} \mathbf{u}_3,$$

$$\mathbf{u}_2 := [0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{u}_3 := [0, 0, 1]^T. \quad (15)$$

である。

式(14)より、ヘッシアン  $H$  は、第 1 項および第 2 項は初期指先力に依存し、第 3 項はバネ剛性に依存することがわかる。また、このヘッシアン  $H$  について

$$H_{cij} := [I_6, 0_{6 \times 3}] H_{ij} [I_6, 0_{3 \times 6}]^T \quad (16)$$

とすると、 $H_{cij}$  は  $\Sigma_c$  を基準とした単一物体と同じであり、複数物体の特徴である接触点位置  ${}^{oi}c_{coi}$ 、曲率  $\kappa_{coi}$  の効果は  $H_{ij}$  の 7~9 行および 7~9 列に含まれることがわかる。

ポテンシャルエネルギーが初期把握状態で局所最小となることから、把握系の安定性はこのヘッシアン  $H$  の正定性により評価することができる<sup>[1][3]</sup>。

## 4. 数値例

第 3 章で導出したヘッシアンを用いて、把握系の安定性を数値例により評価する。簡単な例として Fig. 5 のように太線で表わした 2 つの同形状物体を 4 本指ハンドで把握する場合を考える。なお、接触点位置は仮想的に破線で示した球上にあるとする。

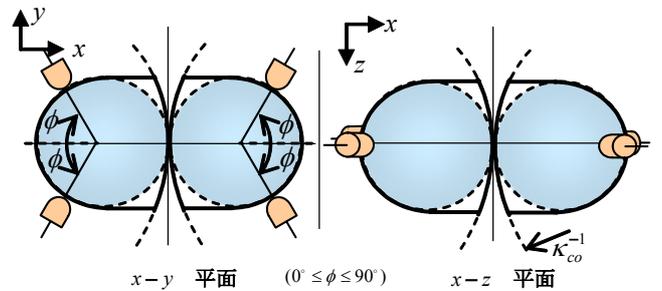


Fig. 5: Numerical Example

初期把握力は仮定(A4)を満たすように、接触の法線方向に  $f$  の力で発生させる。またバネ剛性の成分を同じ値  $k_{xij} = k_{yij} = k_{zij} = k$  に設定する。指と接触する物体の曲率を  $\kappa_{oi} = \kappa_{cij} = \kappa$  とし、物体間接触点の曲率  $\kappa_{co1} = \kappa_{co2} = \kappa_{co}$  のみ変化させる。このような設定をおこなうことで、ヘッシアン  $H$  のパラメータは指先位置  $\phi$ 、指先力  $f$ 、物体間曲率  $\kappa_{co}$  となる。以上の設定を式(13)に代入すると、ヘッシアン  $H$  は以下のようになる。

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & h_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{29} \\ & & h_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{38} & 0 \\ & & & h_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & h_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & h_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & sym. & & & & h_{77} & 0 & 0 \\ & & & & & & & h_{88} & 0 \\ & & & & & & & & h_{99} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ただし、

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = 4k, \\ h_{29} = -h_{38} = 4k\{1 - \kappa_{co}\kappa^{-1}(1 + \cos(\phi))\} \quad (18)$$

である。その他の要素は紙数の都合で省略する。式(17)の固有値は次の9つになる。

$$h_{11}, h_{44}, h_{55}, h_{66}, h_{77}, \\ \{h_{22} + h_{99} \pm \sqrt{(h_{22} - h_{99})^2 + 4(h_{29})^2}\}/2, \\ \{h_{33} + h_{88} \pm \sqrt{(h_{33} - h_{88})^2 + 4(h_{38})^2}\}/2. \quad (19)$$

また、 $\Sigma_c$  を基準とした三次元単一物体把握系<sup>[1]</sup>の固有値は  $h_{11}, h_{22}, h_{33}, h_{44}, h_{55}, h_{66}$  で与えられる。同様に、 $xy$  平面内の二次元二物体把握系<sup>[3]</sup>の場合は  $h_{11}, h_{22}, h_{29}, h_{66}, h_{99}$  からなる  $4 \times 4$  の行列の固有値で与えられる。

以上の結果を用いて、形状等を具体的に次の値に設定し、複数物体の特徴である物体間接触点の曲率の効果について求める。ただし、指先位置や指先力などのそのほかの要素の効果は紙数の都合で省略する。

$$k = 500[\text{N/m}], \quad \kappa = 50[\text{m}^{-1}], \quad \kappa_f = 200[\text{m}^{-1}], \\ f = 1[\text{N}], \quad \phi = \pi/3[\text{rad}].$$

物体間の曲率  $\kappa_{co}$  をパラメータとし、把握の安定性に対する効果として固有値を Fig. 6 に示す(黒い太線)。図(a)には6つの固有値を見ることができる。残りの3つは小さいため縦軸を零近傍で拡大し図(b)に示している。このとき把握系が安定となる範囲は  $0 < \kappa_{co} < 35.7[\text{m}^{-1}]$  であることが、図(b)からわかる。

これに対し、三次元単一物体把握系(赤い細線)や二次元二物体把握系は曲率の効果について、常に安定となっている。

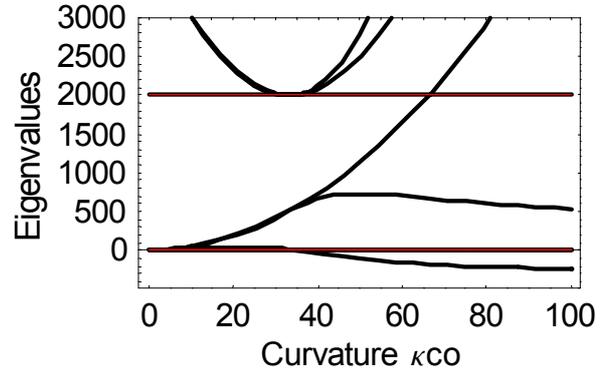
## 5. おわりに

本論文では、転がり接触を考慮して三次元二物体把握系の安定性を解析した。そして、以下の成果を得た。転がり接触を維持するという拘束を、物体同士の接触点座標系を用いて9つの独立なパラメータで表現した。指先位置の変位を求め、把握系のポテンシャルエネルギーおよびその2階微分であるヘッシアンを導出した。本手法は、このヘッシアンの正定性を用いて把握系の安定性を評価できる。数値例では、球形状の2物体を把握した場合について物体間の曲率の効果調べた。

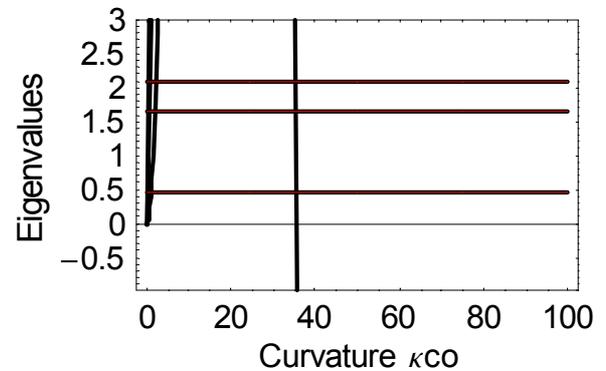
今後の課題は、摩擦無しの場合や、二方向の主曲率が異なる場合を解析することなどである。

### 参考文献

- [1] 山田, 小石倉, 水野, 三村, 舟橋: 三次元多指ロボットハンド把握系の安定性解析, 日本機械学会論文集 C 編, 69-679, pp. 683-690, 2003
- [2] 原田, 中野, 金子, 辻: 複数対象物の操り, 日本ロボット学会誌, 18-2, pp. 236-243, 2000
- [3] T. Yamada, T. Ooba, T. Yamamoto, N. Mimura, Y. Funahashi: Grasp Stability Analysis of Two Objects in Two Dimensions, ICRA2005, pp.772-777, 2005



(a)



(b)

Fig. 6: Effect of curvature  $\kappa_{co}$