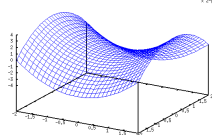


Maximaを用いた数式処理

背景:機械工学者は、様々な力学現象を理論的に解析し、説明しなければならない。簡便に数式を展開したい。
 目標:様々な計算処理を体験し、数式処理システムを活用できるようにする。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$



$$x^2 \frac{dy}{dx} + 3xy = \frac{\sin x}{x} \rightarrow y = \frac{C - \cos x}{x^3}$$

数式処理システム: 人工知能の研究の一環として開発され、強力な代数処理機能の特徴とする。

数式処理ソフトMaxima

数式処理	厳密解 (文字処理)	<ul style="list-style-type: none"> 数式の展開, 因数分解 方程式の求解 行列演算 微分, 積分 常微分方程式の解析解
数値計算	数値近似解	<ul style="list-style-type: none"> 非線型方程式
グラフ表示	視覚化	gnuplot等の外部ソフトを活用して表示
プログラム	バッチ処理	if, for, whileなどの制御構造

代表的な数式処理ソフト

商用	Mathematica, Maple, Reduce, ...	<ul style="list-style-type: none"> 豊富な関数群 ビジュアル化による直感的理解 高度な演算処理
非商用	Maxima, ...	

使用上の注意点

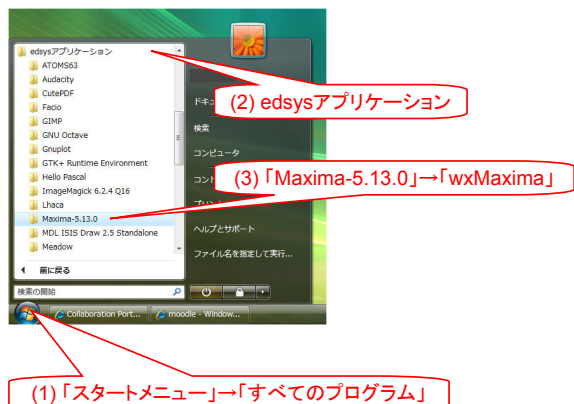
注意点	理由	対策
式は思うほど綺麗にならない	数式表現された文字列をパターン処理するだけ	最後は人間の手で整理する
0.5と1/2では扱い方が異なる	実数と整数の記憶方法は異なる。実数の場合は近似値が記憶される。	正確な計算をしたければ整数のみを使う

```
if 条件式 then "true" else "false";
```

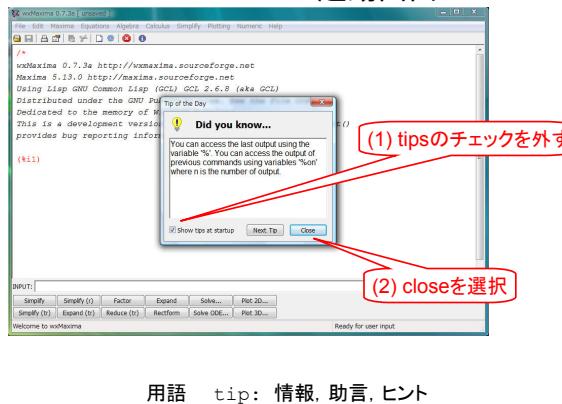
条件式	表示結果
1=1	true
1=1.0	false
1/2=0.5	false
float(1/2)=0.5	true

(註) if文, 等の詳細は省略する

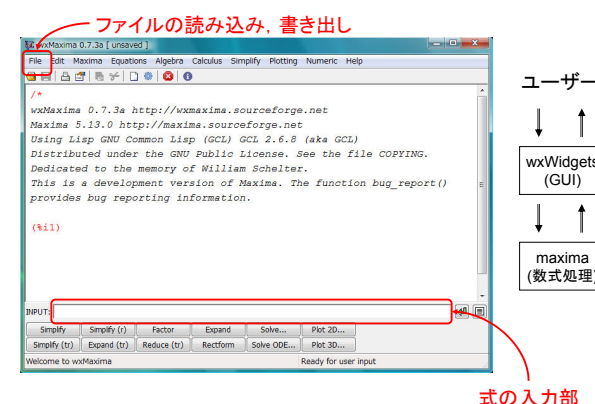
wxMaximaの起動手順



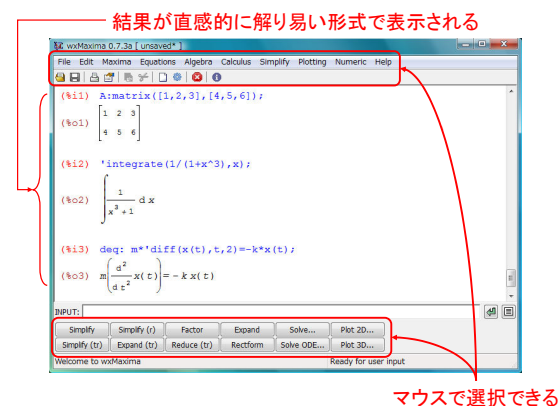
wxMaximaの起動画面



wxMaxima



wxMaxima



demoファイルの実行

demoファイル「maxima_demo.wxjm」をwxMaximaに読み込み, 実行しない。

(1) moodleの指定場所からDownloadする。
 (2) 「File」→「Open」でファイルを指定し, 読み込む。

Maximaでは二つの処理形式を利用できる。

対話処理形式	結果を確認しながら対話的に処理する形式。
バッチ処理形式	処理手順を予めファイルに記載し, 連続して処理する形式。

demoファイルの内容

demoファイルには一連の入力コマンドが記載されている。

```
(2/3)^100;
(2.0/3)^100;
plot2d([exp(-2*x), exp(-x), 1, exp(x), exp(2*x)],
[x, -2, 2], [y, 0, 10]);

(中略)

integrate(1/(1+x^3), x);
kill(all);
```

操作方法 (Operation) 10

入力方法 計算式:

計算式の例 (3+5)*7/2-1; セミコロンは
命令の終わりを表わす

入力ラベル (%i1) (3+5)*7/2-1; 計算式
出力ラベル (%o1) 27 結果

ラベルを計算に利用できる

```
(%i2) %o1 * %o1;
(%o2) 729
```

算術演算子(Arithmetic operators) 11

算術演算子	意味	数式	書式例	結果
+	和	$x+y$	5+3	8
-	差	$x-y$	5-3	2
*	積	$x*y$	5*3	15
/	商	x/y	5/3	5/3
^	冪	x^y	5^3	125
**	冪	$x**y$	5**3	125
!	階乗	$x!$	5!	120

意味	書式	書式例
整数	小数点なし	3
実数	小数点あり	3.14

10進数 (小数点あり) $\xrightarrow[\text{近似値で記憶}]{\text{メモリは有限}}$ 2進数 (浮動小数点)

定数 (Constants) 12

定数	意味	値
%pi	円周率	float(%pi) → 3.141592653589793
%e	自然対数の底 (ネイピア数)	float(%e) → 2.718281828459045
%i	虚数単位	%i*%i → -1

定数	意味	使用目的
inf	$+\infty$	関数limit()による極限値の計算
minf	$-\infty$	"
plus	+0	"
minus	-0	"
true	真	分岐構造ifの制御
false	偽	"

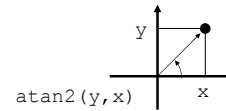
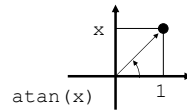
数学関数 (Mathematical Functions) 13

意味	数式	コマンド名	計算例	結果
平方根	\sqrt{x}	sqrt(x)	sqrt(3^2+4^2)	5
指数関数	e^x	exp(x)	exp(log(x))	x
自然対数	$\log_e x$ $\ln x$	log(x)	log(%e^x)	x
近似値		float(x)	float(1/3)	0.3333
剰余		mod(x,y)	mod(10,3)	1
絶対値	$ x $	abs(x)	abs(-2.5)	2.5
仮定		assume(x)	assume(x>0)	

入力例	出力結果
assume(x>0);	[x>0]
sqrt(x^2);	x
sqrt(y^2);	abs(y)

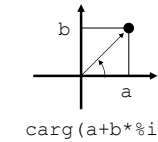
三角関数 (Trigonometric Functions) 14

意味	コマンド名	引数x,y	戻り値
正弦	sin(x)	[rad]	-1~+1
余弦	cos(x)	[rad]	-1~+1
正接	tan(x)	[rad]	minf~inf
逆正弦	asin(x)	-1~+1	$-\pi/2 \sim \pi/2$ [rad]
逆余弦	acos(x)	-1~+1	$0 \sim \pi$ [rad]
逆正接 (2象限)	atan(x)	minf~inf	$-\pi/2 \sim \pi/2$ [rad]
逆正接 (4象限)	atan2(y,x)	minf~inf	$-\pi \sim \pi$ [rad]



複素数(Complex Number), 複素関数 15

意味	書式	計算例	結果
複素数	$a+bi$	$3+4i$	----
実部	realpart(z)	realpart(3+4*i)	3
虚部	imagpart(z)	imagpart(3+4*i)	4
大きさ	cabs(z)	cabs(3+4*i)	5
偏角	carg(z)	carg(1+i)	$\pi/4$



共役複素数
realpart(z) - imagpart(z);

変数の定義 (:), 消去 16

変数の定義	変数名:変数の内容;
-------	------------

```
a = 3*2+5*7;      a: 3*2+5*7;
b = 3/(2*a+5);    b: 3/(2*a+5);
c = a+b;           c: a+b;
```

変数の表示	変数名;
-------	------

変数aの値を表示する

```
a;
```

削除	kill(変数名,関数名,...);
----	--------------------

```
指定のものをメモリから消去  kill(a,b,c);
全てを消去し, (%i1)から再開  kill(all);
```

関数の定義 (:=) 17

関数の定義	関数名(変数名,...):=関数式;
-------	--------------------

1変数関数

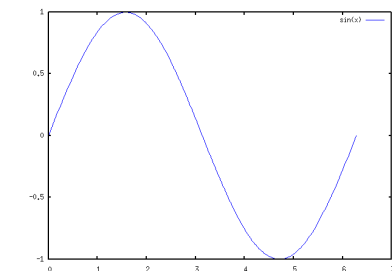
```
f(x):=x+2;      f(x):=x+2;
f(3)=5;         f(3);
```

多変数関数

```
g(y,z):=y^3+y^2*z+z^2;  g(y,z):=y^3+y^2*z+z^2;
g(1,2)=7;              g(1,2);
```

2次元グラフ (陽関数) 18

書式	plot2d(y(x), [x, xmin, xmax])
例	plot2d(sin(x), [x, 0, 2*pi])

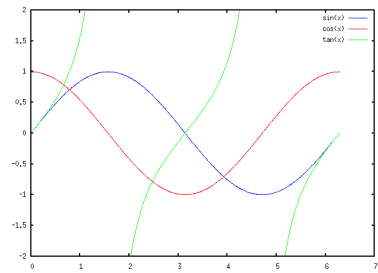


$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

重ねて描く, オプション

19

書式	<code>plot2d([y1(x), y2(x), ...], xrange, yrange, options)</code>
例	<code>plot2d([sin(x), cos(x), tan(x)], [x, 0, 2*pi], [y, -2, 2], [nticks, 200])</code>



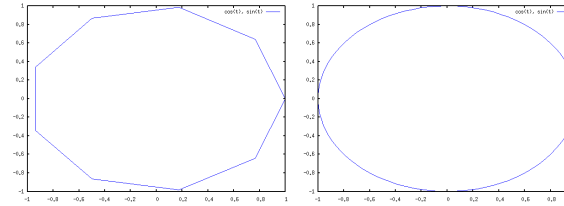
$$y = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ \tan x \end{cases} \quad \begin{matrix} (0 \leq x \leq 2\pi) \\ (-2 \leq y \leq 2) \end{matrix}$$

サンプル点数 :200

2次元グラフ (媒介変数表示)

20

書式	<code>plot2d([parametric, x(t), y(t)], [t, tmin, tmax], options)</code>
例	<code>plot2d([parametric, cos(t), sin(t)], [t, 0, 2*pi], [nticks, 100])</code>



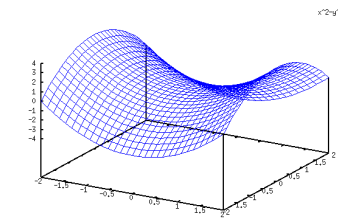
optionsなし [nticks, 100]の場合

$$(x, y) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

3次元グラフ (陽関数)

21

書式	<code>plot3d(z(x, y), [x, xmin, xmax], [y, ymin, ymax])</code>
例	<code>plot3d(x^2-y^2, [x, -2, 2], [y, -2, 2])</code>

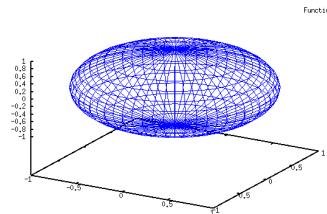


$$z = x^2 - y^2 \quad (-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2)$$

3次元グラフ (媒介変数表示)

22

書式	<code>plot3d([x(u, v), y(u, v), z(u, v)], [u, umin, umax], [v, vmin, vmax])</code>
例	<code>plot3d([cos(u)*cos(v), sin(u)*cos(v), sin(v)], [u, -pi/2, pi/2], [v, -pi, pi])</code>



$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \sin u \cos v \\ z = \sin v \end{cases} \quad \begin{matrix} (-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}) \\ (-\pi \leq v \leq \pi) \end{matrix}$$

多項式(Polynomial)の展開, 因数分解

23

$$(x+y)^2 \xrightarrow{\text{展開}} x^2 + 2xy + y^2 \xleftarrow{\text{因数分解}}$$

展開	<code>expand(f(x))</code>
----	---------------------------

$$\text{expand}((x+y)^2) \longrightarrow y^2 + 2*x*y + x^2$$

因数分解	<code>factor(f(x))</code>
------	---------------------------

$$\begin{aligned} \text{factor}(4!) &\longrightarrow 2^3 * 3 \\ \text{factor}(x^2 + 2*x*y + y^2) &\longrightarrow (y+x)^2 \end{aligned}$$

多項式の係数	<code>ratcoef(f(x), x)</code>
--------	-------------------------------

$$\text{ratcoef}(x^2 + 2*x*y + y^2, x) \longrightarrow 2*y$$

xの1乗の係数を指定

三角関数の展開, 合成

24

$$\sin(10x+y) \xrightarrow{\text{展開}} \sin 10x \cdot \cos y + \cos 10x \cdot \sin y \xleftarrow{\text{合成}}$$

展開	<code>trigexpand(f(x))</code>
----	-------------------------------

$$\begin{aligned} \text{trigexpand}(\sin(10*x+y)) \\ \longrightarrow \cos(10*x) * \sin(y) + \sin(10*x) * \cos(y) \end{aligned}$$

合成	<code>trigreduce(f(x))</code>
----	-------------------------------

$$\begin{aligned} \text{trigreduce}(\cos(10*x) * \sin(y) + \sin(10*x) * \cos(y)) \\ \longrightarrow \sin(y+10*x) \end{aligned}$$

有理式(Rational Expression)の操作

25

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{通分}} \frac{2x}{x^2-1} \xleftarrow{\text{部分分数分解}}$$

通分	<code>ratsimp(f(x))</code>
----	----------------------------

$$\text{ratsimp}(1/(x+1) + 1/(x-1)) \longrightarrow 2*x/(x^2-1)$$

分子の抽出	<code>num(f(x))</code>
-------	------------------------

$$\text{num}(2*x/(x^2-1)) \longrightarrow 2*x$$

分母の抽出	<code>denom(f(x))</code>
-------	--------------------------

$$\text{denom}(2*x/(x^2-1)) \longrightarrow x^2-1$$

部分分数分解	<code>partfrac(f(x), x)</code>
--------	--------------------------------

$$\text{partfrac}(2*x/(x^2-1), x) \longrightarrow 1/(x+1) + 1/(x-1)$$

総和, 総積

26

総和	$\sum_{k=a}^b f(k) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(b)$
	<code>sum(f(k), k, a, b)</code>

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385 \quad \text{sum}(k^2, k, 1, 10)$$

総積	$\prod_{k=a}^b f(k) = f(a) \times f(a+1) \times f(a+2) \times \dots \times f(b)$
	<code>product(f(k), k, a, b)</code>

$$\prod_{k=1}^3 (x+k) = (x+1)(x+2)(x+3) \quad \text{product}(x+k, k, 1, 3)$$

方程式(Equation)の解

27

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{求解}} x = 2, 3$$

方程式の解	<code>solve(f(x)=g(x), x)</code>
-------	----------------------------------

$$\text{solve}(x^2-5*x+6=0, x) \longrightarrow [x=3, x=2]$$

$$\text{solve}(x^2+5*x+10=0, x)$$

$$\longrightarrow [x = -(\sqrt{15} * i + 5) / 2, x = (\sqrt{15} * i - 5) / 2]$$

<code>float()</code> で実数表示させ, <code>expand()</code> で全ての括弧を展開

$$\text{expand}(\text{float}(\text{solve}(x^2+5*x+10=0, x)))$$

$$\longrightarrow [x = -1.936491673103709 * i - 2.5, x = 1.936491673103709 * i - 2.5]$$

連立方程式の解

28

線形 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

非線形 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

```
solve([f1(x,y,...)=g1(x,y,...),
      f2(x,y,...)=g2(x,y,...),
      ...],
      [x,y,...])
```

f1,g1,f2,g2は
x,y,...
に関する関数

```
solve([x+2*y=3,4*x+5*y=6],[x,y])
      -----> [[x=-1,y=2]]
```

```
solve([x+y=2,x*y=1],[x,y])
      -----> [[x=1,y=1]]
```

行列(Matrix)の定義

29

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	matrix([a11,a12,...,a1n], [a21,a22,...,a2n], ..., [am1,am2,...,amn])
---	---

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ A:matrix([1,2,3],[4,5,6])

要素の抽出

値の記憶

意味	書式	表示結果	入力方法
2行目の要素	A[2]	[4,5,6]	A[2]:[7,8,9]
2行1列目の要素	A[2,1]	4	A[2,1]:7

行列の演算

30

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A:matrix([1,2],[3,4]);
B:matrix([1,1],[1,1]);
p:2;

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$A-B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

$pA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$A^p = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

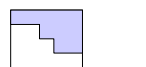
演算子	意味	数式	結果
+	和	A+B	2 3 4 5
-	差	A-B	0 1 2 3
.	積	A.B	3 3 7 7
*	スカラーとの積	p*A	2 4 6 8
^^	冪	A^^p	7 10 15 22

行列の演算関数 (長方形行列も可)

31

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);
i=3; j=2;

	意味	書式	計算結果
指定行の抽出	row(A,i)		7 8 9
指定列の抽出	col(A,j)		2 5 8
転置	transpose(A)		1 4 7 2 5 8 3 6 9
階段行列 (簡約な行列)	echelon(A)		1 2 3 0 1 2 0 0 0
階数	rank(A)		2



rank A

行列の演算関数 (正方形行列のみ)

32

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

	意味	書式	計算結果
det A	行列式	determinant(A)	-2
A^{-1}	逆行列	invert(A)	-2 1 3/2 -1/2
adj A	余因子行列	adjoint(A)	4 -2 -3 1

行列を生成する関数

要素の値	書式	例 (m=2,n=3)
全要素が0	zeromatrix(m,n)	0 0 0 0 0 0
対角要素が1	ident(n)	1 0 0 0 1 0 0 0 1

行列を用いた線形連立方程式の解

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad Ax=b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x=A^{-1}b$$

```
A:matrix([1,2],[4,5]);
b:matrix([3],[6]);
invert(A).b;
```

逆行列が存在しない場合、解は得られない。

固有値の計算

34

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$\lambda = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$

```
A:matrix([1,2],[3,4]);
I:ident(2);
eq:determinant(A-x*I);
solve(eq,x);
```

Maxima

35

開発者	マサチューセッツ工科大学 (MIT)
対応OS	Linux, Windows, MacOS
記述言語	LISP
ライセンス	GNU General Public License (GPL)

1968年	米エネルギー省 (DOE) や米航空宇宙局 (NASA) の資金協力のもと、MITによりMacsymaが開発される
1982年	Symbolics社からの商用版と、William Schelterにより管理されるDOE版に分かれる
	Mathematica, Mapleの登場により、市場を奪われる
1998年	DOE版がGNU GPLライセンスに移行し、Maximaとして自由に使えるようになる
2001年	William Schelterの死後、開発者や利用者が有志により独自に開発が進められている

<http://maxima.sourceforge.net/>

参考文献

36

書籍

- (1) 竹内薫: はじめての数式処理ソフト, 講談社Blue Backs
- (2) 横田博史: はじめてのMaxima, 工学社
- (3) 講談社サイエンティフィック編: 理系のためのフリーソフト, 講談社

Web

- (4) <http://maxima.sourceforge.net/docs.shtml>
- (5) <http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf>
- (6) <http://www.yo.rim.or.jp/~kenrou/maxima/maxlin.pdf>
- (7) <http://phe.phyas.aichi-edu.ac.jp/~cyamauch/maxima/>
- (8) <http://ayapin.film.s.dendai.ac.jp/~matuda/TeX/PDF/34th.pdf>
- (9) <http://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/Math/maxima/maxima.html>

wxMaximaで対話処理形式によるコマンド入力

```
(i1) a:3*2+5*7;
(o1) 41
(i2) b:3/(2*a+5);
(o2) 1/29
(i3) c:a+b;
(o3) 1190/29
```

「File」→「Save as」で保存。
 ファイルの種類:「wxMaxima session (*.wxm)」

```
/* [wxMaxima batch file version 1] [ DO NOT EDIT BY HAND! ]*/
/* [ Created by wxMaxima version 0.7.3a ] */

/* [wxMaxima: input start ] */
a:3*2+5*7;
/* [wxMaxima: input end ] */

/* [wxMaxima: input start ] */
b:3/(2*a+5);
/* [wxMaxima: input end ] */

/* [wxMaxima: input start ] */
c:a+b;
/* [wxMaxima: input end ] */

/* Maxima can't load/batch files which end with a comment! */
"Created with wxMaxima"$
```

必要最小限

```
a:3*2+5*7;
b:3/(2*a+5);
c:a+b;
```

/**/はコメント、実行に影響しない。
 テキストエディタで修正