

三菱重工業 汎用冗長ロボットアーム PA-10 運動学の解の導出

名古屋工業大学工学部機械工学科
山田貴孝

三菱重工業製ロボットアーム PA-10 の運動学を導出する. PA-10 は 7 自由度関節を有する冗長アームである. 7 つの関節を大きく 3 つの部分に分けて考える. 根元から数えて第 1 関節から第 3 関節を肩 (Shoulder) 関節, 第 4 関節と第 5 関節を肘 (Elbow) 関節, 第 6 関節と第 7 関節を手首 (Wrist) 関節と呼ぶ. 計算の都合上, 肩関節は第 2 関節に 3 自由度, 肘関節は第 4 関節に 2 自由度, 手首関節は第 6 関節に 2 自由度の, それぞれ集中関節として考える. 関節角を文字 θ で表わし, 集中関節の中での番号を右下添え字で表わす.

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7]^T = [\theta_{s1}, \theta_{s2}, \theta_{s3}, \theta_{e1}, \theta_{e2}, \theta_{w1}, \theta_{w2}]^T \quad (1)$$

アーム底面から肩関節までの長さを L_b (=315[mm]), 肩関節から肘関節までの長さを L_s (=450[mm]), 肘関節から手首関節までの長さを L_e (=400[mm]), 手首関節からアームのメカニカル先端面までの長さを L_w (=80[mm]) で表わす.

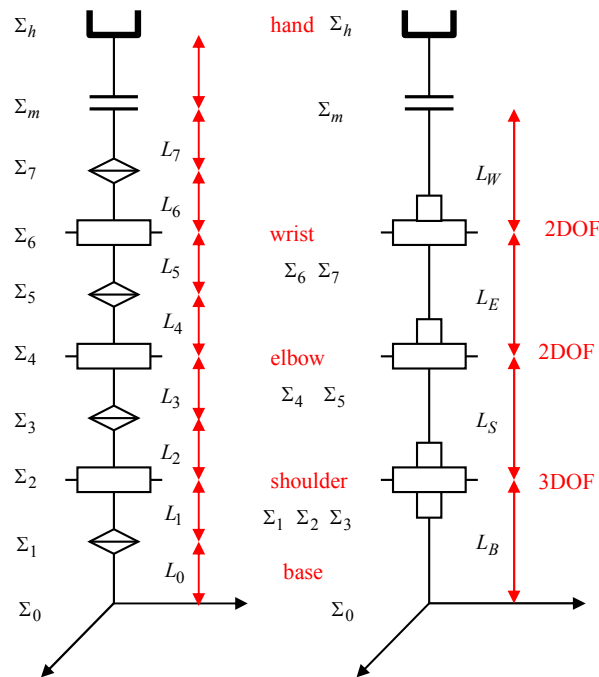


図 1

1. 同時変換行列

関節角が与えられたときに基準座標系 Σ_b に対するハンド座標系 Σ_h の位置と姿勢を求める (順問題). 肩集中関節の位置に固定座標系 Σ_a を新たに設定する. 以下では, Σ_a を根元座標系と呼ぶことにする. 座標系 Σ_b から見たハンド座標系 Σ_h の同次変換行列は次の式で計算できる.

$${}^bT_h(\theta) = \{{}^bT_a\} \{{}^aT_{w2}(\theta)\} \{{}^{w2}T_h\}, \quad (2)$$

$${}^aT_{w2}(\theta) = \{{}^aT_{s1}(\theta_{s1})\} \{{}^{s1}T_{s2}(\theta_{s2})\} \{{}^{s2}T_{s3}(\theta_{s3})\} \{{}^{s3}T_{e1}(\theta_{e1})\} \{{}^{e1}T_{e2}(\theta_{e2})\} \{{}^{e2}T_{w1}(\theta_{w1})\} \{{}^{w1}T_{w2}(\theta_{w2})\} \quad (3)$$

各同次変換行列は次の式で与えられる.

$${}^aT_{s1}(\theta_{s1}) := \begin{bmatrix} \cos \theta_{s1} & -\sin \theta_{s1} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{s1} & \cos \theta_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$${}^{s1}T_{s2}(\theta_{s2}) := \begin{bmatrix} \cos \theta_{s2} & 0 & \sin \theta_{s2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_{s2} & 0 & \cos \theta_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (5)$$

$${}^{s2}T_{s3}(\theta_{s3}) := \begin{bmatrix} \cos \theta_{s3} & -\sin \theta_{s3} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{s3} & \cos \theta_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (6)$$

$${}^{s3}T_{e1}(\theta_{e1}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{e1} & 0 & \sin \theta_{e1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_{e1} & 0 & \cos \theta_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (7)$$

$${}^{e1}T_{e2}(\theta_{e2}) := \begin{bmatrix} \cos \theta_{e2} & -\sin \theta_{e2} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{e2} & \cos \theta_{e2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (8)$$

$${}^{e2}T_{w1}(\theta_{w1}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{w1} & 0 & \sin \theta_{w1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_{w1} & 0 & \cos \theta_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (9)$$

$${}^{w1}T_{w2}(\theta_{w2}) := \begin{bmatrix} \cos \theta_{w2} & -\sin \theta_{w2} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{w2} & \cos \theta_{w2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (10)$$

同次変換行列 bT_a および ${}^{w2}T_h$ はアームとハンドの取り付け状態に応じて適切に設定する．例えば、アームの底面を基準座標系 Σ_b とする場合には

$${}^bT_a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

とする．ハンド座標系 Σ_h をアームのメカニカル先端面 Σ_m から (H_x, H_y, H_z) の位置に、 Σ_{w2} と同じ姿勢で設定する場合には

$${}^{w2}T_m := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (12)$$

$${}^{w2}T_h := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H_x \\ 0 & 1 & 0 & H_y \\ 0 & 0 & 1 & H_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (13)$$

を用いて

$${}^{w2}T_h := \{{}^{w2}T_m\} \{{}^{w2}T_h\}, \dots\dots\dots (14)$$

と設定する．

2. ハンド座標系の位置・姿勢からの関節角の導出

ハンド座標系 Σ_h の目標位置・姿勢が ${}^bT_{hd}$ で与えられたときに、関節角度 $\theta_{s1}, \dots, \theta_{w2}$ の可能解を求める (逆問題). 行列 bT_a と ${}^{w2}T_h$ は既知であるため、次の手首座標系の位置・姿勢を表わす行列 ${}^aT_{w2d}$ を目標値とすることと同値である.

$${}^aT_{w2d} := \{{}^bT_a\}^{-1} \{{}^bT_{hd}\} \{{}^{w2}T_h\}^{-1} \dots \dots \dots (15)$$

式の展開の都合から行列 ${}^aT_{w2d}$ の要素を

$${}^aT_{w2d} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \dots \dots \dots (16)$$

とおく. 式(16)を式(3)と連立させて関節角 $\theta_{s1}, \dots, \theta_{w2}$ を決定する. この計算の流れは次の三つの段階に分けられる.

STEP1: 肩と手首の位置関係を満たすように肘関節の角度 θ_{e1} を求める. 角度の組み合わせは二種類存在する.

STEP2: 冗長自由度である肩関節の θ_{s1} (あるいは θ_{s3}) を固定し, θ_{s2} および θ_{s3} (あるいは θ_{s1}) の角度を求める. 角度の組み合わせは二種類存在する.

STEP3: 目標手首姿勢を満たすように $\theta_{e2}, \theta_{w1}, \theta_{w2}$ を求める. 角度の組み合わせは二種類存在する.

2.1 第4関節 (E1) の決定

まず, 肘関節を求める. ${}^aT_{w2} = {}^aT_{w2d}$ において位置成分に着目する. 位置成分の二乗和を整理すると, 次の拘束条件を得る.

$$L_e^2 + L_s^2 + 2L_e L_s C_4 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \dots \dots \dots (17)$$

よって

$$C_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - L_s^2 - L_e^2}{2L_e L_s} \dots \dots \dots (18)$$

を得る. ここで,

$$|C_4| \leq 1 \dots \dots \dots (19)$$

すなわち, 目標手首位置が拘束条件

$$(L_s - L_e)^2 \leq p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq (L_s + L_e)^2 \dots \dots \dots (20)$$

を満たすように設定されている場合に

$$S_4 = \lambda_4 \sqrt{1 - C_4^2}, \lambda_4 = \pm 1 \dots \dots \dots (21)$$

と決まる. したがって, 第4関節 (E1) の角度は次の式で決定できる.

$$\theta_4 = \text{atan2}(S_4, C_4) \dots \dots \dots (22)$$

ただし, 角度には2種類の組み合わせが存在する ($\lambda_4 = \pm 1$).

式(17)の物理的意味を図2に示す. 座標系 Σ_a を基準にして肩関節の位置は $[0, 0, 0]^T$, 手首関節の位置の目標値は $[p_x, p_y, p_z]$ になる. この2点と肘関節(E1)の間には図2に示す三角形が構成される. 式(17)は, この三角形の内角の余弦定理を意味する. したがって, 肘関節角度(E1)が2種類に限定されることがわかる. 式(20)の拘束条件は三角形が成立する条件であり, 到達可能範囲を意味する. この拘束条件を満足しない場合, ハンドは目標位置・姿勢 ${}^bT_{hd}$ に到達することは構造的にできない. ところで, 肘関節位置には, 肩位置と手首位置を通る直線周りに自由度が残ることに注意する.

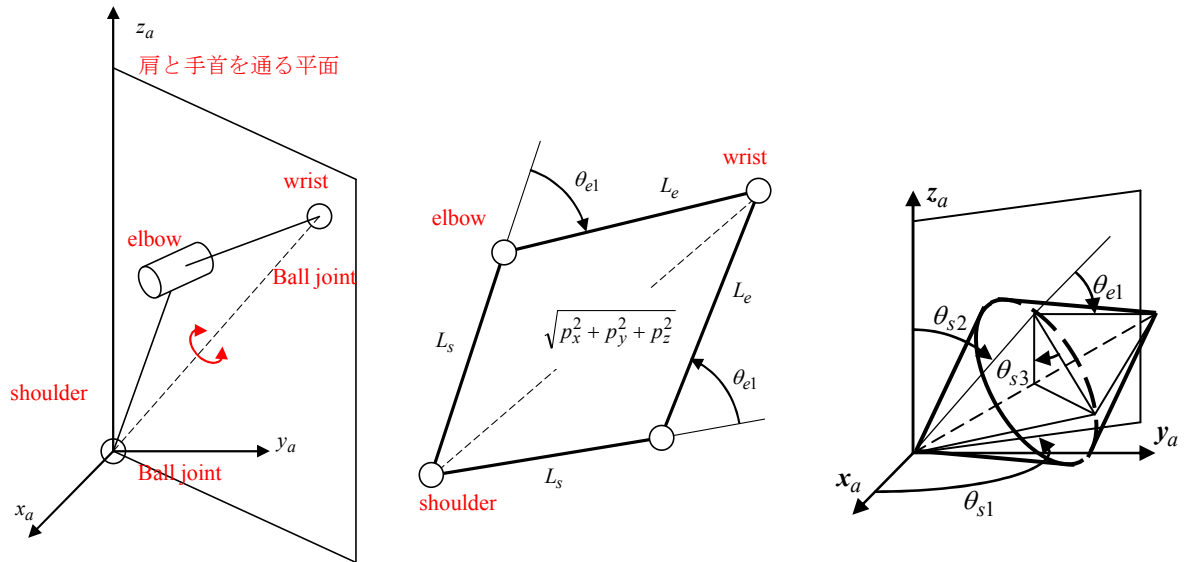


図 2

2.2 第1関節 (S1) から第3関節 (S3) の決定

PA-10 は関節数が冗長であるため、いずれかの関節角度を任意とし、他の角度をそれに依存して決定する必要がある。冗長関節には S1 あるいは S3 が設定できる。

2.2.1 第1関節 (S1) を冗長とした場合の決定法

S1 を冗長関節として選択した場合の決定法を示す。S2 から見た W2 の位置成分に着目する。

$${}^s2T_{w2d} := \{{}^{s1}T_{s2}\}^{-1} \{{}^aT_{s1}\}^{-1} \{{}^aT_{w2d}\} = \begin{bmatrix} * & * & * & (p_x C_1 + p_y S_1) C_2 - p_z S_2 \\ * & * & * & -p_x S_1 + p_y C_1 \\ * & * & * & (p_x C_1 + p_y S_1) S_2 + p_z C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (23)$$

および

$${}^s2T_{w2} = \{{}^{s2}T_{s3}\} \{{}^{s3}T_{e1}\} \{{}^{e1}T_{e2}\} \{{}^{e2}T_{w1}\} \{{}^{w1}T_{w2}\} = \begin{bmatrix} * & * & * & L_e C_3 S_4 \\ * & * & * & L_e S_3 S_4 \\ * & * & * & L_s + L_e C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (24)$$

より

$$(p_x C_1 + p_y S_1) C_2 - p_z S_2 = L_e C_3 S_4 \dots (25.a)$$

$$-p_x S_1 + p_y C_1 = L_e S_3 S_4 \dots (25.b)$$

$$(p_x C_1 + p_y S_1) S_2 + p_z C_2 = L_s + L_e C_4 \dots (25.c)$$

を得る。

ここで、肩関節 S2 の座標系で表わすと図 3 のようになる。

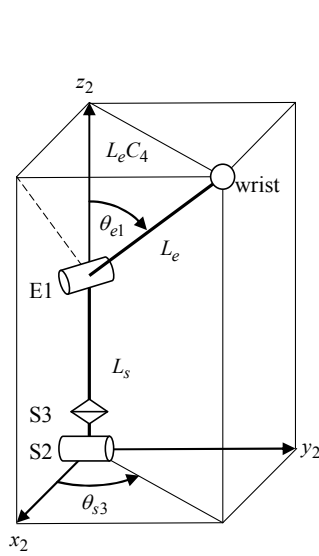


図 3

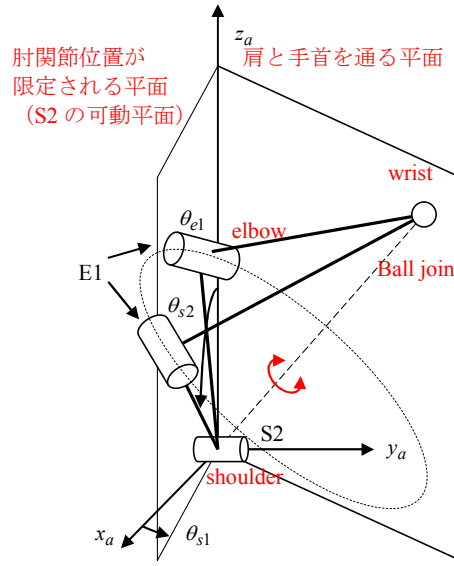


図 4

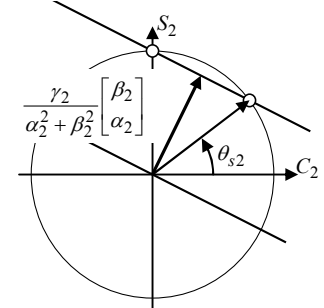


図 5

2.2.1.1 第2関節 (S2) の決定

z成分の式(25.c)より θ_2 に関する次の拘束条件を得る.

$$\alpha_2 S_2 + \beta_2 C_2 = \gamma_2 \quad (26)$$

ただし

$$\alpha_2 := p_x C_1 + p_y S_1, \quad \beta_2 := p_z, \quad \gamma_2 := L_s + L_e C_4 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + L_s^2 - L_e^2) / (2L_s) \quad (27)$$

とされている. 式(26)において, C_2 と S_2 をパラメータとする一般解を求め, 三角関数の条件を考慮すると, 次の式を得る.

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sqrt{A_2} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ -\beta_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

したがって

$$\theta_2 = \text{atan2}((\alpha_2 \gamma_2 - \lambda_2 \beta_2 \sqrt{A_2}), (\beta_2 \gamma_2 + \lambda_2 \alpha_2 \sqrt{A_2})) \quad (29)$$

を得る. ただし,

$$A_2 := \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2, \quad \lambda_2 = \pm 1 \quad (30)$$

である. 角度 θ_2 には二種類存在することがわかる. この物理的意味を図4に示す. 肩関節 S1 を固定するため, 肘関節 E1 の位置は S2 の可動平面内に限定される. このため, 肘位置が2種類に限定される. ただし,

$$A_2 \geq 0 \quad (31)$$

を満たさなければならない. これは関節 S1 の拘束条件式であり, 次のように展開される.

$$\begin{aligned} A_2 &= (p_x C_1 + p_y S_1)^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = p_x^2 C_1^2 + p_y^2 S_1^2 + 2p_x p_y C_1 S_1 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 \\ &= p_x^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta_1}{2} \right) + p_y^2 \left(\frac{1 - \cos 2\theta_1}{2} \right) + p_x p_y \sin 2\theta_1 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 \\ &= \alpha_1 \sin 2\theta_1 + \beta_1 \cos 2\theta_1 - \gamma_1 \end{aligned} \quad (32)$$

ただし,

$$\alpha_1 = p_x p_y, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2), \quad \gamma_1 = \gamma_2^2 - \beta_2^2 - \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) \quad (33)$$

である. 式(32)は新たなパラメータ ϕ を導入し, 次のように置き換えられる.

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (34)$$

ただし, ϕ には次の条件を伴う.

$$\gamma_1 \geq \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \text{ のとき, 条件を満たさない.}$$

$$|\gamma_1| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \text{ のとき, } |\phi| \leq \text{atan2}(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \gamma_1^2, |\gamma_1|)$$

$$\gamma_1 \leq -\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \text{ のとき, } \phi \text{ は任意}$$

式(34)は図6に示す範囲を意味する。これは、肩と手首を通る直線周りの自由度を用いて肘を回転させたときに、肘がS2の可動平面と交差する条件である。

なお、 $\phi = 0$ のとき A_2 が最大となる。このとき

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{p_x^2 + p_y^2} \begin{bmatrix} p_x^2 - p_y^2 \\ 2p_x p_y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

となるため、

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \pm 1 \dots\dots\dots (36)$$

を得る。これは、図8のように、関節角 θ_1 が手首位置の目標値の方向を向くことを意味する。

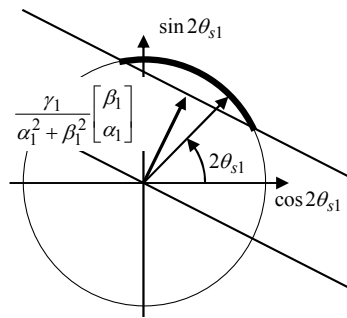


図 6

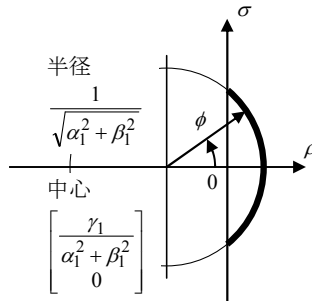


図 7

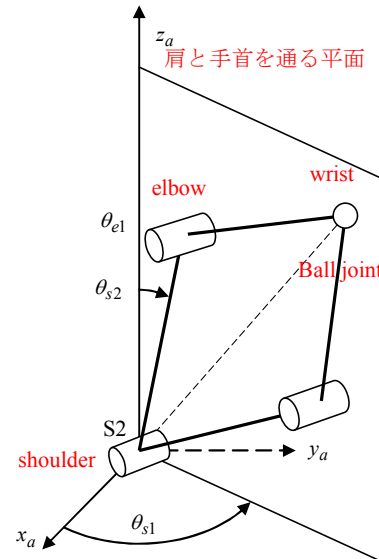


図 8

2.2.1.2 第3関節 (S3) の決定

式(25.a)と(25.b)より

$$\begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_e S_4} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ -\beta_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (37.a)$$

を得る。ただし

$$\alpha_3 = (p_x C_1 + p_y S_1) C_2 - p_z S_2, \quad \beta_3 = (p_x S_1 - p_y C_1) \dots\dots\dots (38)$$

とおいている。分母に含まれる S_4 の符号を考慮すると、

$$\theta_3 = \text{atan2}(-\lambda_4 \beta_3, \lambda_4 \alpha_3) \dots\dots\dots (39)$$

を得る。

なお、冗長関節のパラメータを $\phi = 0$ に設定した場合、 $\beta_3 = 0$ となり、 $\theta_3 = 0$ あるいは $\pm\pi$ になる。

2.2.1.3 関節角

以上から、関節角 θ_1 から θ_3 は次の式で決まる。まず ϕ の範囲を次の条件から求める。

$$|\gamma_1| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \text{ のとき, } |\phi| \leq \text{atan2}(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \gamma_1^2, \gamma_1)$$

$$\gamma_1 \leq -\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \text{ のとき, } \phi \text{ は任意}$$

このとき、関節角は次の式で与えられる。

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \text{atan2}(\{\alpha_1 \cos \phi - \beta_1 \sin \phi\}, \{\alpha_1 \sin \phi + \beta_1 \cos \phi\})$$

$$\theta_2 = \text{atan2}((\alpha_2 \gamma_2 - \lambda_2 \beta_2 \sqrt{A_2}), (\beta_2 \gamma_2 + \lambda_2 \alpha_2 \sqrt{A_2})) \dots\dots\dots (40)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}((-\lambda_4\beta_3), (\lambda_2\lambda_4\sqrt{A_2})) \dots\dots\dots (41)$$

ただし

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_x p_y, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2) \\ \alpha_2 &= p_x C_1 + p_y S_1, \quad \beta_2 = p_z, \quad \gamma_2 = L_s + L_e C_4, \quad \beta_3 = p_x S_1 - p_y C_1, \\ \lambda_2 &= \pm 1 \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

である。なお、 $\phi=0$ を用いる場合には

$$\theta_1 = \text{atan2}(\lambda_1 p_y, \lambda_1 p_x), \quad \lambda_1 = \pm 1$$

である。

上記の結果から、冗長自由度の第1関節には範囲 ϕ が存在すること、 A_2 を最大化する $\phi=0$ を選べば根元関節は手首目標値を向くこと、 ϕ を適切な値に固定すれば4種類の組み合わせ($\lambda_2 = \pm 1$, $\lambda_4 = \pm 1$)が存在することがわかる。

2.2.2 第3関節 (S3) を冗長とした場合の決定法

S3 を冗長として選択した場合の決定法を示す。

2.2.2.1 第1関節 (S1) の決定

式(25.b)において

$$\alpha'_1 = -p_x, \quad \beta'_1 = p_y, \quad \gamma'_1 = L_e S_3 S_4 \dots\dots\dots (43)$$

とおくと

$$\alpha'_1 S_1 + \beta'_1 C_1 = \gamma'_1 \dots\dots\dots (44)$$

と書けるため

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = \frac{\gamma'_1}{\alpha'^2_1 + \beta'^2_1} \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \alpha'_1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda'_1}{\alpha'^2_1 + \beta'^2_1} \sqrt{A'_1} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ -\beta'_1 \end{bmatrix}$$

したがって

$$\theta_1 = \text{atan2}((\alpha'_1 \gamma'_1 - \lambda'_1 \beta'_1 \sqrt{A'_1}), (\beta'_1 \gamma'_1 + \lambda'_1 \alpha'_1 \sqrt{A'_1})), \quad \lambda'_1 = \pm 1$$

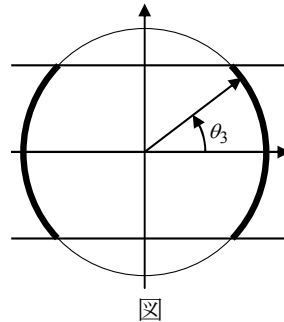
ただし、次の式を満たさなければならない。

$$A'_1 := \alpha'^2_1 + \beta'^2_1 - \gamma'^2_1 \geq 0$$

これは θ_3 の拘束条件を意味する。

$$|S_3| \leq \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{L_e \sqrt{1 - C_4^2}}$$

なお、 A'_1 が最大となるのは $S_3 = 0$ 、すなわち $\theta_3 = 0, \pm\pi$ のときである。



2.2.2.2 第2関節 (S2)

式(25.a)と(25.c)より

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (45.a)$$

を得る。ただし

$$\delta_2 = L_e C_3 S_4$$

とされている。これより

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \begin{bmatrix} \alpha_2 \delta_2 + \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \delta_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (46.a)$$

したがって

$$\theta_2' = \text{atan} 2(\{\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \delta_2\}, \{\alpha_2 \delta_2 + \beta_2 \gamma_2\}) \dots\dots\dots (47)$$

を得る.

2.2.2.3 関節角

以上から, 関節角 θ_1 から θ_3 は次の式で決まる. まず, 次の範囲より θ_3 を決定する.

$$|S_3| \leq \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{L_e \sqrt{1 - C_4^2}}$$

そして,

$$\theta_1' = \text{atan} 2((\alpha_1' \gamma_1' - \lambda_1' \beta_1' \sqrt{A_1'}), (\beta_1' \gamma_1' + \lambda_1' \alpha_1' \sqrt{A_1'})) \dots\dots\dots (48)$$

$$\theta_2' = \text{atan} 2((\alpha_2' \gamma_2' - \lambda_2' \beta_2' \sqrt{A_2'}), (\beta_2' \gamma_2' + \lambda_2' \alpha_2' \sqrt{A_2'})) \dots\dots\dots (49)$$

$$\alpha_1' = -p_x, \quad \beta_1' = p_y, \quad \gamma_1' = L_e S_3 S_4, \quad \alpha_2' = -L_e C_3 S_4, \quad \beta_2' = L_s + L_e C_4, \quad \gamma_2' = p_z$$

$$\lambda_1' = \pm 1 \dots\dots\dots (50)$$

とする.

上記の結果から, 冗長自由度 θ_3 には範囲が存在すること, A_1' を最大化するのは $\theta_3 = 0, \pm\pi$ であること, θ_3 を適切な角度に固定した場合には 4 種類の組み合わせ ($\lambda_1' = \pm 1$, $\lambda_4 = \pm 1$) が存在することがわかる.

2.3 第 5 関節 (E2) から第 7 関節 (W2) の決定

次に, 手先の姿勢成分を一致させるために, 第 5 関節 (E2) から第 7 関節 (W2) の角度を求める. 第 1 関節から第 4 関節の関節角度は 2.2 節の結果, 既知となるため, 新たに次の目標値を得る.

$$\begin{aligned} \{^e T_{w2d}\} &:= \{^s T_{e1}\}^{-1} \{^s T_{s3}\}^{-1} \{^s T_{s2}\}^{-1} \{^a T_{s1}\}^{-1} \{^a T_{w2d}\} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} {}^a R_{e1} & * & \\ 0 & 1 & \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} & * \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} & * \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

他方,

$$\{^e T_{w2}\} := \{^e T_{e2}\} \{^e T_{w1}\} \{^w T_{w2}\} = \left[\begin{array}{ccc|c} -S_5 S_7 + C_5 C_6 C_7 & -S_5 C_7 - C_5 C_6 S_7 & C_5 S_6 & * \\ C_5 S_7 + S_5 C_6 C_7 & C_5 C_7 - S_5 C_6 S_7 & S_5 S_6 & * \\ -S_6 C_7 & S_6 S_7 & C_6 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \dots\dots\dots (52)$$

の関係があるため, 式(55)と式(56)が一致するという拘束条件より

$$C_6 = r'_{33}, \quad S_6^2 = r'_{31}{}^2 + r'_{32}{}^2 \dots\dots\dots (53)$$

であため

$$\theta_6 = \text{atan} 2(\lambda_6 \sqrt{r'_{31}{}^2 + r'_{32}{}^2}, r'_{33}) = \text{atan} 2(\lambda_6 \sqrt{r'_{31}{}^2 + r'_{32}{}^2}, r'_{33}), \quad \lambda_6 = \pm 1 \dots\dots\dots (54)$$

を得る. $|S_6| \neq 0$ のとき

$$\theta_5 = \text{atan} 2(\lambda_6 r'_{23}, \lambda_6 r'_{13}) \dots\dots\dots (55)$$

$$\theta_7 = \text{atan} 2(\lambda_6 r'_{32}, -\lambda_6 r'_{31}) \dots\dots\dots (56)$$

と決まる. 他方, $|S_6| = 0$ のとき $C_6 = r'_{33} = \pm 1$ であるため

$$\sin(\theta_5 + r'_{33} \theta_7) = r'_{21}, \quad \cos(\theta_5 + r'_{33} \theta_7) = r'_{22} \dots\dots\dots (57)$$

となり

$$\theta_5 = \text{atan} 2(r'_{21}, r'_{22}) - r'_{33} \theta_7 \quad \text{for } \forall \theta_7 \dots\dots\dots (58)$$

を得る.

手先関節には 2 種類の組み合わせが存在する. したがって, 第 1 関節を固定した場合, 関節角 θ_2 から θ_7 には 8 種類の組み合わせが存在する.