

Excel で「見える化」しよう振動工学

金沢工業大学 工学部 機械工学科
畝田道雄, 十河憲夫

1. はじめに

物体に作用している力が釣合っている状態を求めるのが釣合方程式であり, その力が釣合っていないときにどのように動くのかを求めるのが運動方程式である. 運動方程式には加速度が関わってくることから, それは微分方程式として表されることになる.

ここではまず, 最も基本的なばねの運動について, これをどのような運動方程式で表せばよいのかを考えよう. 次に, これを Excel に標準装備されている VBA (Visual Basic for Applications) を用いて数値的に解く方法について述べる. 本稿が読者各位の参考に供すれば幸甚である.

2. 振動運動の定式化

2.1 なぜ微分方程式

いま, 図 1(a) に示すような, 質量 $m[\text{kg}]$ の錘が吊り下げられている 1 自由度系の「ばね-質量系」の運動を考えてみよう. まず, ばねの釣合っている状態から $y[\text{m}]$ だけ下へ伸ばしたとする(変位を与えたとする). ばね定数を $k[\text{N/m}]$ とすると, 質量 m はフックの法則から

$$F_1 = k y \quad (1)$$

の力 $F_1[\text{N}]$ で元に戻ろうとする.

力 F_1 の大きさは変位した量 y に比例するとともに, y の向きとは反対に作用する. すなわち, 元に戻ろうとする力となることから, 復元力と呼ばれる. この例のように, 釣合状態からの変位に対して復元力が働く場合を静的に安定であるという. 工学的に運動が安定であるかどうかを考える場合, まず静的に安定でなければならない. 次に動的な安定性について考えてみよう.

(1) 動的に中立安定

まず, 上記のように復元力のみが作用している場合の運動方程式を考えてみよう. ばねが y だけ下方(正方向)へ伸びているとき, 質量 m の錘には式(1)に示すフックの法則から, 上向き(負方向)の力 $ky[\text{N}]$ が作用する. この状態で手を放すと錘には加速度 $\alpha[\text{m/s}^2]$ が作用して跳び上がる. このときの力と加速度の関係を式で表すと次のようになる.

$$m\alpha = -ky \quad (2)$$

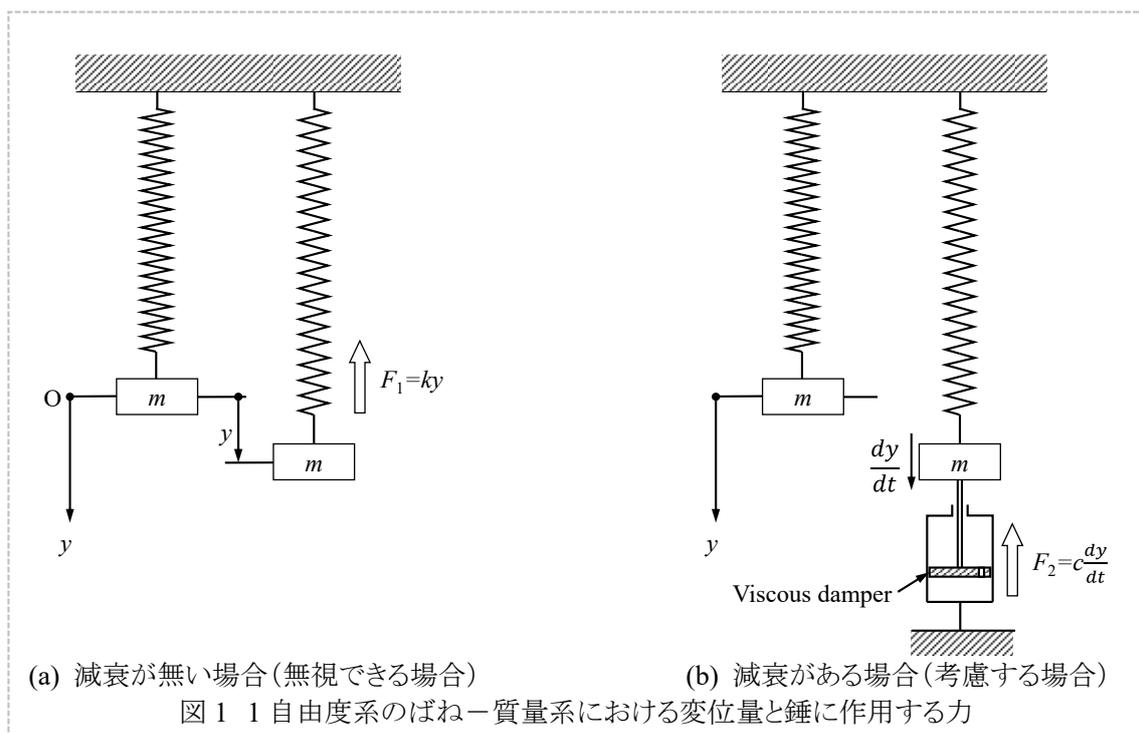
ここで, 時間を $t[\text{s}]$ とするとき,

$$\alpha = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (3)$$

と表されるから, 次のようになる.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (4)$$

そして, 右辺を左辺へ移項すると,



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \quad (5)$$

という立派な微分方程式ができあがる。

このように復元力のみが作用する場合、運動を減衰しようとするものが無いことから、振動を永久に続けることになる。このような場合を動的中立安定という。

(2) 動的に安定

上記(1)の例に、制振器(ダッシュポットなど)を取り付けた場合を考えてみよう。一般に、「ばね-質量-ダンパ系」と呼ばれる。制振器は、速度に比例する抵抗力 F_2 [N]

$$F_2 = c \frac{dy}{dt} \quad (6)$$

を生じることが多く、係数 c [N·s/m]を粘性減衰定数として、式(6)のように仮定することができる。

この力 F_2 は運動を減衰させるように作用することから、減衰力と呼ばれる。

減衰力は図 1(b)に示すように、ばねが下向き(正方向)に伸びるとき、これに逆らうように作用する。すなわち、上向き(負方向)に作用することから、符号的には前記の復元力と同じになる。よって、減衰力を式(2)に加えると次のようになる。

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c \frac{dy}{dt} - ky \quad (7)$$

すなわち、

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (8)$$

となる。式(8)は2階同次線形微分方程式と呼ばれ、第2項目が減衰力を表し、第3項目が復元力を表していることを理解して欲しい。

そして、これまでの説明から、式(8)において、 $0 < k$, $0 < c$ であることが、元の釣合状態に向かって落ち着いていくために必要な条件であることがわかる。このような場合を、動的に安定であるという。

2.2 2階微分方程式の一般解

さて、式(8)のような2階同次線形微分方程式の一般解は、よく知られているように、 $y = e^{\lambda t}$ とおいて得られる特性方程式を解くことによって求められる。運動の様子は λ が実数か複素数かによって異なることになるが、振動運動を表す複素数の場合の一般解を示すと次のようになる。

すなわち、

$$\frac{dy}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \quad (9)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (10)$$

であるから、それぞれを式(8)に代入して整理すれば、

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (11)$$

が得られ、これが成立するためには、

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (12)$$

となる必要がある。

この特性方程式を解くことによって、

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (13)$$

となることから、式(8)の一般解は

$$y = C_1 e^{\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} t} + C_2 e^{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} t} \quad (14)$$

として求めることができる。

これを展開すると、

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-\frac{c}{2m} t} e^{\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} t} + C_2 e^{-\frac{c}{2m} t} e^{-\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} t} \\ &= e^{-\frac{c}{2m} t} \left(C_1 e^{\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} t} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

振動現象は不足減衰(振動しながら収束していくための条件)となる場合、すなわち、 $c^2 - 4mk < 0$ のときに生じることから、一般解は

$$y = e^{-\frac{c}{2m} t} \left(C_1 e^{i \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t} + C_2 e^{-i \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t} \right) \quad (16)$$

と書くことができる。

このとき、

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} \quad (17)$$

を減衰固有円振動数[rad/s]と言う(単に固有円振動数と言う場合もある)。

また、 $c^2 - 4mk < 0$ の関係において、 $c < 2\sqrt{mk}$ であるから、これらの比

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (18)$$

を減衰比と言う。

減衰比 ζ を使って ω_d を整理してみると、

$$\begin{aligned}\omega_d &= \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k}{m} \frac{c^2}{4mk}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k}{m} \left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\omega_n^2 - \omega_n^2 \zeta^2} = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n\end{aligned}\quad (19)$$

となる. ここで, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であり, 減衰が無い場合の固有円振動数[rad/s]である. これは式(17)の

c に 0 を代入することでも得られることが理解できよう.

ω_d を使って, 式(16)の一般解を整理してみると,

$$y = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (20)$$

となる.

ここで, オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (21)$$

を使って, 式(20)をさらに整理してみると,

$$\begin{aligned}y &= e^{-\frac{c}{2m}t} [C_1 (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + C_2 (\cos(-\omega_d t) + i \sin(-\omega_d t))] \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} [(C_1 + C_2) \cos \omega_d t + (C_1 - C_2) i \sin \omega_d t] \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} B_0 \cos(\omega_d t - \Phi_0)\end{aligned}\quad (22)$$

と書ける.

なお,

$$B_0 \cos(\omega_d t - \Phi_0) = B_0 \cos \omega_d t \cos \Phi_0 + B_0 \sin \omega_d t \sin \Phi_0 \quad (23)$$

であるから, 式(22)の A_1 と A_2 は

$$\begin{aligned}A_1 &= B_0 \cos \Phi_0 \\ A_2 &= B_0 \sin \Phi_0\end{aligned}\quad (24)$$

となる. なお, B_0 と Φ_0 [rad] は初期条件によって決定される.

2.3 1 自由度系における自由振動と強制振動

式(8)で示したように、運動方程式の右辺が 0 の場合は、上記のようにばねに吊り下げた錘を引張って、ポンと放した後の運動の様子を表しているものと考えればよい。このようなものを自由振動と呼んでいる。

それでは、このような「ばね－質量－ダンパ系」に、円振動数 ω [rad/s]の周期的な外力 $F_f = F \cos \omega t$ [N]を加える場合を考えてみよう。このとき、運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F \cos \omega t \quad (25)$$

式(25)の右辺の $F \cos \omega t$ が周期的な外力 F_f であり、このような運動を強制振動と呼ぶ。周期的な外力を加える場合、もともと運動が発散してしまうようでは話にならないことから、振動が減衰していく「動的に安定」な自由振動系に強制外力を加えることとして取り扱えば良い。

したがって、このような「ばね－質量－ダンパ系」に外力を加えて動き始めた場合、自由振動による成分はやがて減衰して無くなり、その後は強制振動の成分による影響だけが残ることになる。そして、この強制振動成分による運動は、加えられた外力に対して位相はずれているかもしれないが、周期は一致していると考えるのが妥当であろう。したがって、式(25)の解は、右辺を 0 として求めた「自由振動の一般解」に、「強制振動と同じ周期を持つ未知の振動成分として求めた特殊解」を加えたものとなる。自由振動の一般解は式(22)で与えられることを考慮すると、式(25)の解を表すと次のようになる。

$$y = e^{-\frac{c}{2m}t} B_0 \cos(\omega_d t - \Phi_0) + A \cos(\omega t - \Phi) \quad (26)$$

式(26)の第1項目が式(22)の自由振動の一般解を表し、第2項目が強制振動成分による特殊解を表している。この問題を上記のようにばねに吊り下げられた錘の運動として考えると、強制振動による振幅 A [m]と位相差 Φ [rad]は以下のような展開によって表される。

はじめに、既述のとおり、式(26)の第1項目は減衰し、やがて無くなると見なせることから、

$$y = A \cos(\omega t - \Phi) \quad (27)$$

として、式(25)を解いても差し支えない。

したがって、

$$\begin{aligned} y &= A \cos(\omega t - \Phi) \\ &= A \cos \omega t \cos \Phi + A \sin \omega t \sin \Phi \end{aligned} \quad (28)$$

$$\therefore A_1 = A \cos \Phi, A_2 = A \sin \Phi$$

となるから、

$$\frac{dy}{dt} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t \quad (29)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A_1 \omega^2 \cos \omega t - A_2 \omega^2 \sin \omega t$$

となり、式(2)に代入すると、

$$\begin{aligned} &m(-A_1 \omega^2 \cos \omega t - A_2 \omega^2 \sin \omega t) \\ &+ c(-A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t) \\ &+ k(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (30)$$

となるから、恒等式の関係によって、

$$-m\omega^2 A_1 + c\omega A_2 + kA_1 = F \quad (31)$$

$$-m\omega^2 A_2 - c\omega A_1 + kA_2 = 0$$

となり, 整理すると, 次のようになる.

$$(-m\omega^2 + k)A_1 + c\omega A_2 = F \quad (32)$$

$$-c\omega A_1 + (-m\omega^2 + k)A_2 = 0$$

いま, $\alpha = -m\omega^2 + k$, $\beta = -c\omega$ とすると,

$$\alpha A_1 - \beta A_2 = F \quad (33)$$

$$\beta A_1 + \alpha A_2 = 0$$

となることから,

$$A_1 = \frac{F\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m\omega^2 + k}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} F \quad (34)$$

$$A_2 = -\frac{F\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{c\omega}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} F$$

となる. また, $A_1^2 + A_2^2 = A^2 \cos^2 \Phi + A^2 \sin^2 \Phi = A^2$ であるから,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{F\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 + \left(-\frac{F\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}} F^2 \\ &= \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}} F = \sqrt{\frac{1}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} F \end{aligned} \quad (35)$$

となる.

もう少し整理してみると,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} F = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} F \\ &= \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}{m^2}}} F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c}{m}\omega\right)^2}} \frac{F}{m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(2\frac{c}{2\sqrt{mk}}\sqrt{\frac{k}{m}}\omega\right)^2}} \frac{F}{m} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \frac{F}{m} \\ &= \frac{\frac{1}{\omega_n^2}}{\sqrt{\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}{(\omega_n^2)^2}}} \frac{F}{m} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \frac{F}{m} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。ここで、

$$\frac{F}{\omega_n^2} = \frac{F}{k} = \frac{F}{k} = y_{st} \quad (37)$$

であり、 y_{st} は静たわみ[m]と呼ばれる。

また、振動数比 n として、

$$n = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (38)$$

とすれば、

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)^2 + (2\zeta n)^2}} y_{st} \quad (39)$$

となる。さらに、

$$\frac{A \sin \Phi}{A \cos \Phi} = A \tan \Phi = \frac{A_2}{A_1} = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (40)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Phi &= \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1} \frac{\frac{c}{m}\omega}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \\ &= \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \tan^{-1} \frac{2\zeta n}{1 - n^2} \end{aligned} \quad (41)$$

となる。

繰り返すことになるが、式(26)の第 1 項目は時間とともに減衰していき、やがて無くなるので、ここで考えないといけないのは強制振動による振幅 A [m]の大きさである。

このような系で特に問題になるのが、自由振動の固有円振動数 ω_n (あるいは ω_d)と強制外力の円振動数 ω が一致する場合である。もし、式(25)において減衰項がなければ、それは $c = 0$ を意味することから、減衰比 $\zeta = 0$ となる。また、この場合の固有円振動数は、減衰がない場合の値の ω_n となるので、これと ω が一致すると振動数比 $n = 1$ となる。これらを式(39)に代入すると、 $A = \infty$ となることがわかる。このような状態を共振と呼んでいる。実際には減衰力が作用することから、振幅が無限大になることはないが、ときには非常に大きな振動を発生する現象を生じ、系が破壊する場合もある。

2.4 1 自由度系における自由振動と強制変位振動

強制振動には既述したとおり、強制外力が作用する場合もあれば、強制変位が作用する場合もある。したがって、ここでは図2で示すような強制変位振動について考えてみよう。

図2(a)に示すように、質量 m_1 [kg]の錘が、ばね定数 k_1 [N/m], k_2 [N/m]で連結されている場合を考える。まずは、 k_1 が取り付けられた左側の壁は動かない(強制変位振動が作用しない)場合の自由振動を考えよう。ばねが伸びても縮んでもいない状態における錘の位置を、 x 軸(水平)方向座標の原点に取る。まずは簡単のため、減衰を無視する場合で展開していこう。

このとき、質量 m_1 [kg]の錘に作用する力を考慮して運動方程式を作ると、次のようになる。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k_2 x_1 \quad (42)$$

右辺を左辺に移項し、整理することで、

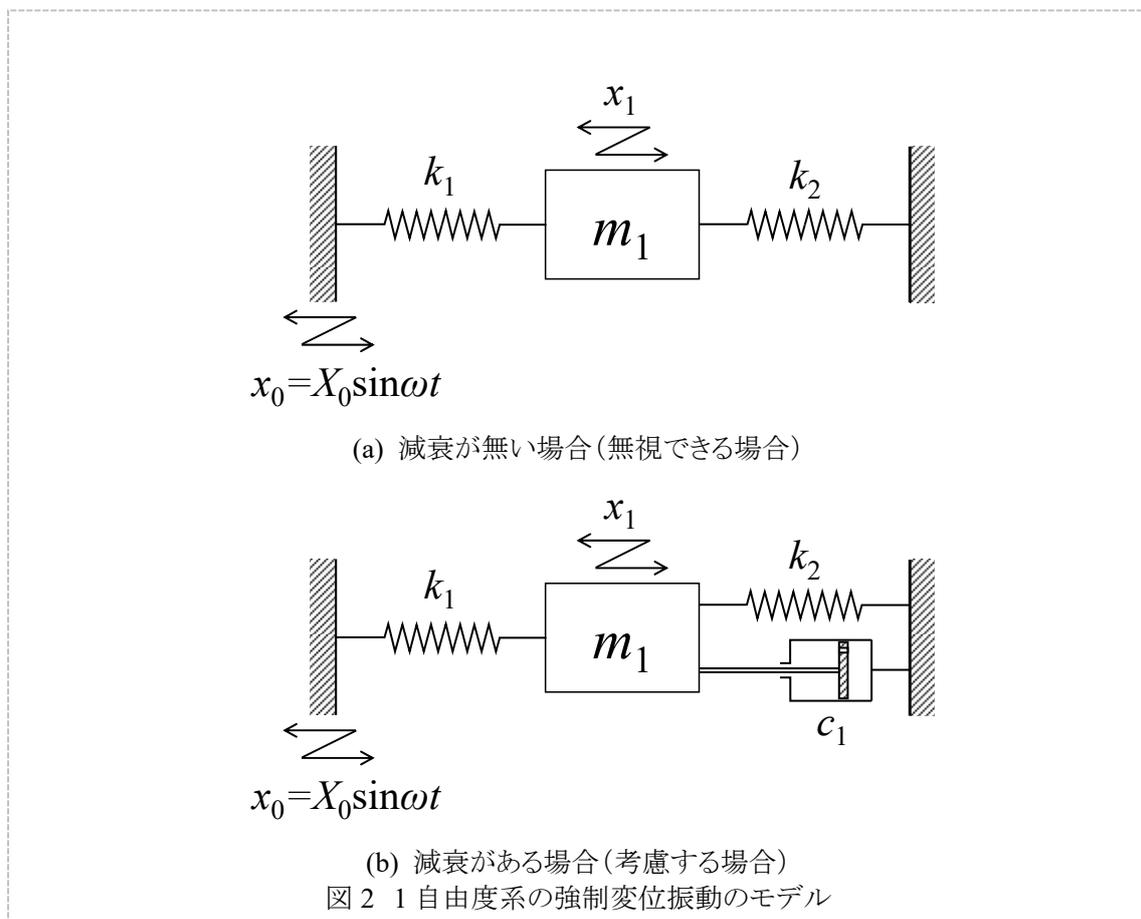
$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 = 0 \quad (43)$$

という、式(8)と同様に2階の微分方程式で与えられることになる。

次いで、左側の壁が $x_0 = X_0 \sin \omega t$ で動く場合を考えてみよう。この場合、 k_1 のばねに作用する変位は $x_1 - x_0$ であることから、このときの運動方程式は式(42)に対して、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 (x_1 - x_0) - k_2 x_1 \quad (44)$$

と考えると良い。これを展開すれば、



$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + k_1 x_0 - k_2 x_1 \\
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 &= k_1 x_0 \\
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 &= k_1 X_0 \sin \omega t
\end{aligned} \tag{45}$$

となる。

さらに、 $c_1[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$ を粘性減衰定数として、図 2(b)のように仮定することができる時、運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1(x_1 - x_0) - k_2 x_1 - c_1 \frac{dx_1}{dt} \tag{46}$$

と書けることから、整理すれば、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + (k_1 + k_2) x_1 = k_1 X_0 \sin \omega t \tag{47}$$

として与えられることになる。

式(47)の解について考えると、式(25)と同様に、自由振動による影響は時間の経過とともに減衰によって無くなると見なせることから、式(27)と同じように書ける。

すなわち、

$$\begin{aligned}
x_1 &= A \sin(\omega t - \Phi) = A \sin \omega t \cos \Phi - A \cos \omega t \sin \Phi \\
&= A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t
\end{aligned} \tag{48}$$

となる。なお、 $A_1 = A \cos \Phi$ 、 $A_2 = -A \sin \Phi$ である。そして、

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t \\
\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -A_1 \omega^2 \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cos \omega t
\end{aligned} \tag{49}$$

であるから、これらを式(47)に代入すると、

$$\begin{aligned}
&m_1(-A_1 \omega^2 \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cos \omega t) \\
&+ c_1(A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t) \\
&+ (k_1 + k_2)(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) = k_1 X_0 \sin \omega t
\end{aligned} \tag{50}$$

となり、これを恒等式の関係によって解いて整理すると、

$$\begin{aligned}
(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - c_1 \omega A_2 &= k_1 X_0 \\
c_1 \omega A_1 + (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_2 &= 0
\end{aligned} \tag{51}$$

を得る。

いま、 $\alpha = -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2$ 、 $\beta = c_1 \omega$ とすると、

$$\begin{aligned}
\alpha A_1 - \beta A_2 &= k_1 X_0 \\
\beta A_1 + \alpha A_2 &= 0
\end{aligned} \tag{52}$$

となることから、

$$A_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} k_1 X_0 = \frac{-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)^2 + (c_1 \omega)^2} k_1 X_0$$

$$A_2 = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} k_1 X_0 = \frac{-c_1 \omega}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)^2 + (c_1 \omega)^2} k_1 X_0$$

となる。また、 $A_1^2 + A_2^2 = A^2 \cos^2 \Phi + A^2 \sin^2 \Phi = A^2$ であるから、

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} k_1 X_0\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} k_1 X_0\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}} k_1 X_0$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}} k_1 X_0 = \sqrt{\frac{1}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)^2 + (c_1 \omega)^2}} k_1 X_0$$

となる。

もう少し整理してみると、

$$A = \sqrt{\frac{1}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)^2 + (c_1 \omega)^2}} k_1 X_0 = \frac{1}{\sqrt{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)^2 + (c_1 \omega)^2}} k_1 X_0$$

$$= \frac{1}{m_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2 - m_1 \omega^2}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{c_1 \omega}{m_1}\right)^2}} k_1 X_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2 - \omega^2}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{m_1} \omega\right)^2}} \frac{k_1}{m_1} X_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2 - \omega^2}{m_1}\right)^2 + \left(2 \frac{c_1}{2\sqrt{m_1(k_1 + k_2)}} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}} \omega\right)^2}} \frac{k_1}{m_1} X_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}} \frac{k_1}{m_1} X_0$$

$$= \frac{1}{\omega_n^2} \frac{k_1}{\sqrt{\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2}{(\omega_n^2)^2} + \frac{(2\zeta \omega_n \omega)^2}{(\omega_n^2)^2}}} \frac{k_1}{m_1} X_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \frac{k_1}{\omega_n^2} \frac{m_1}{m_1} X_0$$

となる。なお、自由振動の場合、すなわち、式(47)の右辺を0にした場合の一般解の展開は省略するが、基本的に式(8)の k が $k_1 + k_2$ に置き換わっただけであることから、減衰固有振動数 ω_d と固有振動数 ω_n はそれぞれ、

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4m_1(k_1 + k_2) - c_1^2}}{2m_1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}} \quad (57)$$

である。

ここで、

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (58)$$

と置けば、式(55)は

$$A = \frac{\frac{\omega_m^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} X_0 \quad (59)$$

となる。さらに、

$$\frac{A \sin \Phi}{A \cos \Phi} = A \tan \Phi = \frac{-A_2}{A_1} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{c_1 \omega}{k_1 + k_2 - m_1 \omega^2} \quad (60)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Phi &= \tan^{-1} \frac{c_1 \omega}{k_1 + k_2 - m_1 \omega^2} = \tan^{-1} \frac{\frac{c_1}{m_1} \omega}{\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \\ &= \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \tan^{-1} \frac{2\zeta n}{1 - n^2} \end{aligned} \quad (61)$$

となる。

2.5 2自由度系の運動

次いで、より応用範囲が広がる2自由度系について考えてみよう。図3のモデルによって順序だてて説明したい。

2.5.1 自由振動の場合

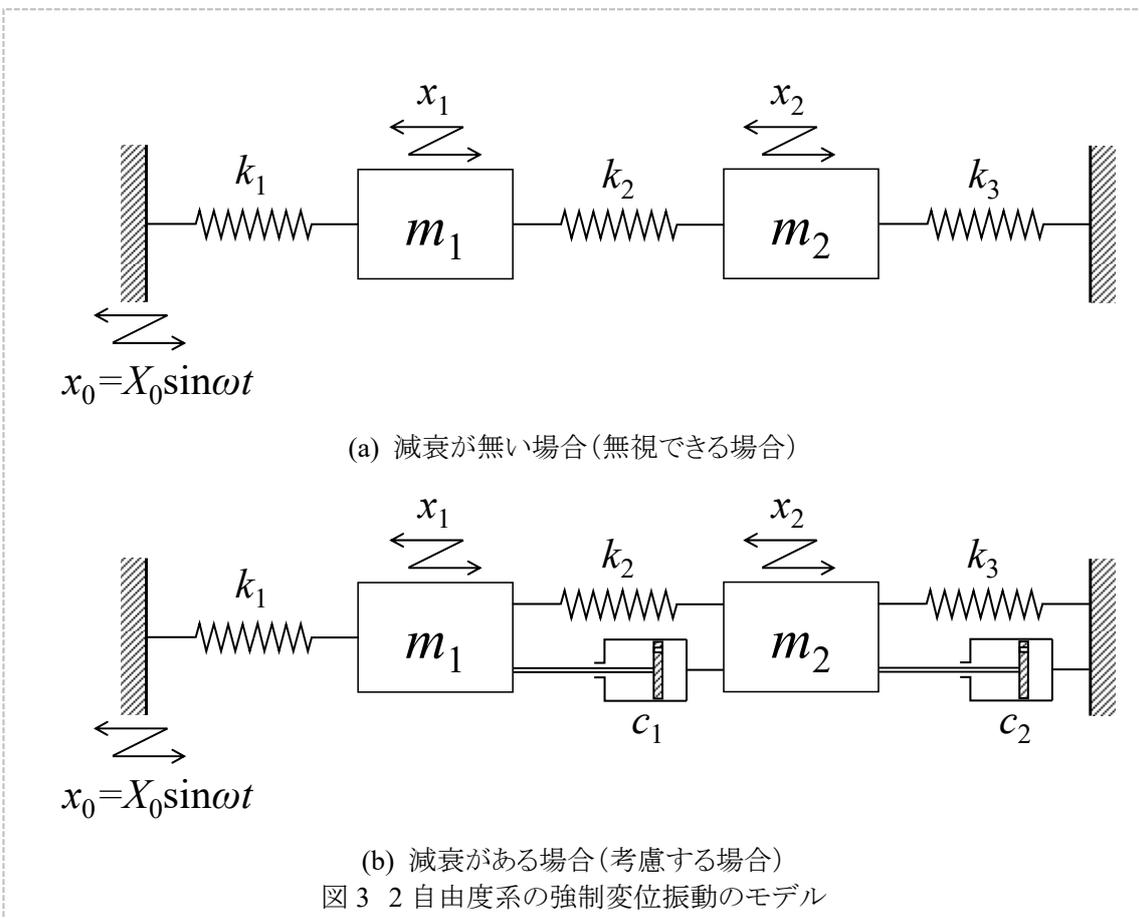
図3(a)に示すように、それぞれ質量 $m_1[\text{kg}]$ と $m_2[\text{kg}]$ からなる2つの錘が、ばね定数 $k_1[\text{N/m}]$, $k_2[\text{N/m}]$, $k_3[\text{N/m}]$ のばねによって連結されている場合を考える。はじめは上記と同様に、 k_1 のついた左側の壁が動かない場合から考えてみよう。それぞれのばねが伸びても縮んでもいない状態の質量の位置を、それぞれの x 軸(水平)方向座標の原点とする。なお、簡単のために、減衰を考慮しない場合で話を進める。

ある時刻 t における2つの錘の座標をそれぞれ $x_1[\text{m}]$, $x_2[\text{m}]$ とすると、 k_2 のばねの変位量は $x_1 - x_2[\text{m}]$ と表される。したがって、質量 m_1 には、 k_1 による $k_1 x_1[\text{N}]$ の力と、 k_2 による $k_2(x_1 - x_2)[\text{N}]$ の力が作用することになる。これを力の向きも考慮して式で表すと、次のようになる。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \quad (62)$$

ここで、右辺第1項目の $-k_1 x_1$ は、 k_1 のばねの伸びによって質量 m_1 が $x < 0$ の方向に力を受けることを表している。また、第2項目は、 $(x_1 - x_2) > 0$ の場合は k_2 のばねが縮んだ状態を表していることから、これによっても $x < 0$ の方向に力を受けることを示している。

一方、質量 m_2 に関する運動方程式は次のように表される。



$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \quad (63)$$

同様に、右辺第 1 項目は式(62)の場合とちょうど反対に、 k_2 のばねが縮むことによって質量 m_2 が $x > 0$ の方向に力を受けることを示している。また、第 2 項目は、 k_3 のばねの縮みによって質量 m_2 が $x < 0$ の方向に力を受けることを表している。

したがって、これらを連立して表記すると次のようになる。

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

2.5.2 強制変位振動の場合

図 3(a)に示す k_1 のついた左側の壁が $x_0 = X_0 \sin \omega t$ で振動する場合を考えてみよう。この場合、式(44)の 1 自由度系における強制変位振動の場合と同様に扱えば、質量 m_1 の運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 (x_1 - x_0) - k_2 (x_1 - x_2) \quad (65)$$

となることから、整理すると、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = k_1 x_0 \quad (66)$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = k_1 X_0 \sin \omega t$$

となる。なお、質量 m_2 に関する運動方程式は式(64)と同じであるため、省略する。

次に、図 3(b)のように、粘性減衰係数がそれぞれ c_1 [N・s/m]、 c_2 [N・s/m] で与えられる 2 つのダンパーがあるとして、減衰を考慮してみよう。ここまで来れば、運動方程式は多少複雑になっても力の釣り合いを考えると良いことに慣れてきていることを期待したい。

このときの質量 m_1 の運動方程式は、減衰を考慮しない式(64)に対して、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 (x_1 - x_0) - k_2 (x_1 - x_2) - c_1 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \quad (67)$$

のようになるだけであり、整理すると、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} - c_1 \frac{dx_2}{dt} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = k_1 X_0 \sin \omega t \quad (68)$$

となる。同様に、質量 m_2 に関しては、減衰を考慮しない式(64)に対して、

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 - c_1 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) - c_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (69)$$

となり、整理すると、

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - c_1 \frac{dx_1}{dt} + (c_1 + c_2) \frac{dx_2}{dt} - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0 \quad (70)$$

となる。

3. 数値シミュレーションの方法

式(68)や式(70)で与えられるような微分方程式について、数学的に一般解を求めようとすると容易ではないことは想像できよう。したがって、ここでは数学的ではなく、数値的に(数値シミュレーションによって)求める方法を考えてみる。

3.1 テイラー展開の紹介

はじめに、ばねに取り付けた錘が運動するような、滑らかな動きを数値的に求める方法を考えてみよう。ある時刻の状態から、わずかに時間が経過する間の変化を求めることができれば、これを元の値に加えることによって、少し後の状態が求められることになる。これを繰り返していけば、時々刻々と変化する状態をシミュレーションすることができる。このように、わずかな変化を求める方法として、数式(関数)で表現される現象を導関数から計算される数式項の無限和として求めるという、テイラー展開がある。

図4のように、関数 y が時間 t とともに滑らかに変化すると考える。時刻 t の $y(t)$ の値から、わずかに時間が経過した $t+\Delta t$ 時刻の値 $y(t+\Delta t)$ を求めるとき、式(71)のテイラー展開を用いることができる。

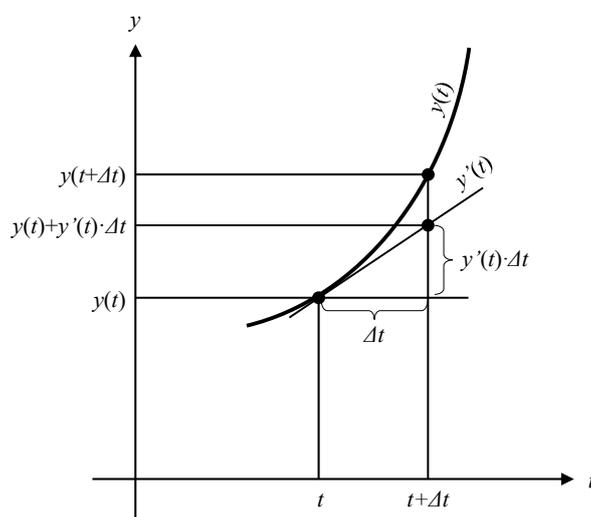


図4 テイラー展開の第1項目を考慮する場合

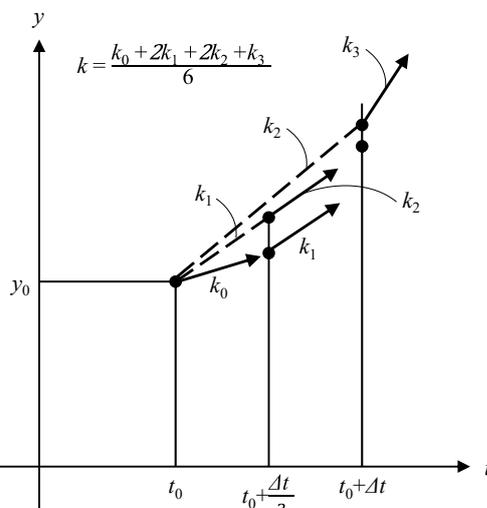


図5 4次ルンゲ・クッタ法による勾配(微分値)の求め方

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{1}{1!} y'(t) \Delta t + \frac{1}{2!} y''(t) \Delta t^2 + \frac{1}{3!} y'''(t) \Delta t^3 + \dots \quad (71)$$

すなわち、時刻 t における y の微分値に Δt のべき乗と係数を乗じたものを、元の y の値に加えることによって、 $t + \Delta t$ 時刻の値 $y(t + \Delta t)$ を求めることができるということである。

図4にはテイラー展開の第1項目(1階微分の項)だけを加えた点を示すが、 y の変化率がそれ程大きくなければ、それなりの結果が得られることがわかる。これは最も簡単な方法で、オイラー法と呼ばれている。

テイラー展開の第2項目までを考慮するとより精度が上がるが、この場合には2階微分の計算が必要になる。これを2階微分しないで、近似的に求める工夫をしたものが2次ルンゲ・クッタ法である。さらに、テイラー展開の第4項目までを考慮するものが4次ルンゲ・クッタ法で、一般にルンゲ・クッタ法と呼ばれているのはこれである。図5に示すように4つの点の傾きを求めて、これを式(72)のように重み付け平均したものを次のステップのための傾きとするものである。ルンゲ・クッタ法ではテイラー展開の第4項目までを考慮することになるため、非常に正確な予測が可能になる。

$$y_1 = y_0 + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6} \Delta t \quad (72)$$

3.2 プログラムの考え方

式(8)の 2 階同次線形微分方程式で表される運動の様子を、数学的に一般解を求めて表示するのではなく、数値的に求める方法を考えてみよう。

式(8)から加速度 $a[\text{m/s}^2]$ を求めると、次のようになる。

$$\alpha = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{c}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{k}{m} y = -\frac{c}{m} v - \frac{k}{m} y \quad (73)$$

ここで、 v は速度 $[\text{m/s}]$ であり、

$$v = \frac{dy}{dt} \quad (74)$$

である。

ここで、最も簡単なオイラー法で考えると次のようになる。ある時刻 t の y の値と、速度 v の値が初期値として与えられるとき、式(73)から、その瞬間の加速度 α を求めることができる。すなわち、タイムステップを Δt とすると、 $t+\Delta t$ 時刻の y の値と v の値は次のように求まる。

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v(t)\Delta t \quad (75)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \alpha(t)\Delta t$$

この値を使えば、次のステップのための α と v の値が求まることから、さらに次のステップの y と v の値が求まる。このような具合に、このプロセスを繰り返していけばよい。ここでオイラー法は単純に各時刻の y と v の傾きをそのまま用いているが、4 次ルンゲ・クッタ法では式(72)のように 4 つの傾きを求めて、重み付け平均したものをを用いることになる。

3.3 強制振動のシミュレーション方法

式(25)のような強制振動による運動をシミュレーションする場合は、加速度を次のように表現するだけでよい。

$$\alpha = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{c}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{k}{m} y + \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (76)$$

右辺の第3項目が強制振動成分であり、時刻 t を代入して計算していけばよい。

また、式(68)と式(70)で表されるような連立運動方程式の場合も、上記の手順を各々の質量に対して順次繰り返していくことによってシミュレーションすることができる。

3.4 VBA によるプログラミング

Excel のマクロで使用できるのは Visual Basic というプログラム言語である。正式には Excel などのアプリケーションの中で用いられるような機能になっていることから、Visual Basic for Applications (VBA) と呼ばれている。VBA の詳細については専門書にゆずるが、BASIC とほぼ同様の、ユーザーフレンドリーなプログラム言語である。なお、プログラムの詳細については文献[1]などを参照いただければ幸いである。

図 6 に、式(8)の 2 階同次線形微分方程式をシミュレーションする VBA プログラムを示す(ファイル名: 1_One_freedom_vibration_Ver4.xlsm)。これは後述する図 7 に示す Excel シートに組み込まれているものであり、同シート上のセル内のデータを入力し、「Run」をクリックすることによって、計算結果を自動出力するものである。

プログラム中の番号と対応させながら、以下に簡単に説明を加える。

- ① Public 宣言 → ここに示した変数 mas (質量), vdc (粘性減衰係数), sct (ばね定数) は引数としてやりとりしなくても、どのサブプロシージャ(サブルーチン)でも使える。
- ② Sub One_freedom_vibration() → 「One_freedom_vibration」という名前のサブプロシージャの始まり。ここでは、これがメインプログラムであるが、その場合でも Sub がつく。終了は End Sub となる。
- ③ mas = Range("E5") → Range は Excel シートのセル番号を指定するコマンド。ここでは E5 セル内のデータを、変数 mas の値として代入している。以下同様。
- ④ Call Graph_Range → サブプロシージャ Graph_Range() の呼び出し。
- ⑤ Range("C22").Select → C22 セルを選択し、⑧の ActiveCell. の原点(0,0)セルとして指定する。
- ⑥ For i=1 To tim_steps ~ Next i: For から Next までの範囲を、i の値を 1 から tim_steps まで、1 ずつ増やして繰り返し計算する。
- ⑦ Call Runge_Kutta(tim, dt, dis, vel, acc, dis_new, vel_new) → サブプロシージャ Runge_Kutta の呼び出し。括弧内は Runge_Kutta とデータをやり取りするための引数。
- ⑧ ActiveCell.Offset(i - 1, 0), Value = tim → ActiveCell.Offset(0, 0) は、⑤の Range("C22").Select で指定した C22 セルであり、ここに tim の値を出力する。
- ⑨ Sub Runge_Kutta(tim, dt, dis, vel, acc, dis_new, vel_new) → 4 次ルンゲ・クッタ法の計算のサブプロシージャ。式(56)の内容を計算している。dis_new と vel_new が次のステップのための dis と vel の値となる。
- ⑩ Function vel_dot → vel_dot を関数(Function)として定義するためのサブプロシージャ。式(73)で表された加速度 α を関数 vel_dot として定義している。
- ⑪ Function dis_dot → dis_dot を関数(Function)として定義するためのサブプロシージャ。y の微分値である速度 v を関数 dis_dot として定義している。

Public mas, vdc, sct

①

+++++

Sub One_freedom_vibration() ②

mas = Range("E5") ③
vdc = Range("E6")
sct = Range("E7")

dis_0 = Range("E10")
vel_0 = Range("E11")

tim_end = Range("E13")
dt = Range("E14")

tim_st = 0
tim_step = tim_end / dt + 1

'+++++

Call Graph_Range ④

'+++++

Range("C22").Select ⑤

For i = 1 To 1000 ⑥

ActiveCell.Offset(i - 1, 0).ClearContents
ActiveCell.Offset(i - 1, 1).ClearContents
ActiveCell.Offset(i - 1, 2).ClearContents
ActiveCell.Offset(i - 1, 3).ClearContents
ActiveCell.Offset(i - 1, 5).ClearContents
ActiveCell.Offset(i - 1, 6).ClearContents

Next i

'+++++

tim = tim_st
dis = dis_0
vel = vel_0
Range("C22").Select

For i = 1 To tim_step

Call Runge_Kutta(tim, dt, dis, vel, acc, dis_new, vel_new) ⑦

ActiveCell.Offset(i - 1, 0).Value = tim ⑧
ActiveCell.Offset(i - 1, 1).Value = dis
ActiveCell.Offset(i - 1, 2).Value = vel
ActiveCell.Offset(i - 1, 3).Value = acc

Application.ScreenUpdating = True
DoEvents

DoEvents

```
Range("C18").Value = tim  
Range("D18").Value = dis
```

```
tim = tim + dt  
dis = dis_new  
vel = vel_new
```

Next i

```
'+++++
```

```
Range("H22").Select  
nn = 0
```

```
For n = 1 To tim_step
```

```
If ActiveCell.Offset(n - 1, -1).Value = 1 Then
```

```
nn = nn + 1  
ActiveCell.Offset(nn - 1, 0).Value = nn  
a = ActiveCell.Offset(n - 1, -4).Value  
ActiveCell.Offset(nn - 1, 1).Value = a
```

End If

Next n

End Sub

```
'+++++
```

```
Sub Runge_Kutta(tim, dt, dis, vel, acc, dis_new, vel_new)
```

⑨

```
acc1 = vel_dot(tim, dis, vel)  
vel1 = dis_dot(tim, dis, vel)  
acc2 = vel_dot(tim + dt / 2, dis + vel1 * dt / 2, vel + acc1 * dt / 2)  
vel2 = dis_dot(tim + dt / 2, dis + vel1 * dt / 2, vel + acc1 * dt / 2)  
acc3 = vel_dot(tim + dt / 2, dis + vel2 * dt / 2, vel + acc2 * dt / 2)  
vel3 = dis_dot(tim + dt / 2, dis + vel2 * dt / 2, vel + acc2 * dt / 2)  
acc4 = vel_dot(tim + dt, dis + vel3 * dt, vel + acc3 * dt)  
vel4 = dis_dot(tim + dt, dis + vel3 * dt, vel + acc3 * dt)
```

```
acc_c = (acc1 + 2 * acc2 + 2 * acc3 + acc4) / 6  
vel_c = (vel1 + 2 * vel2 + 2 * vel3 + vel4) / 6
```

```
vel_new = vel + acc_c * dt  
dis_new = dis + vel_c * dt  
acc = acc_c
```

End Sub

```
'+++++
```

Function vel_dot(tim, dis, vel) ⑩

vel_dot = -vdc / mas * vel - sct / mas * dis

End Function

'++++++++End of File++++++++'

Function dis_dot(tim, dis, vel) ⑪

dis_dot = vel

End Function

'++++++++End of File++++++++'

Sub Graph_Range()

With ActiveSheet.ChartObjects(1).Chart
.Axes(xlValue).MinimumScale = -Range("E10")
.Axes(xlValue).MaximumScale = Range("E10")
.Axes(xlCategory).MinimumScale = 0
.Axes(xlCategory).MaximumScale = Range("E13")
End With

With ActiveSheet.ChartObjects(2).Chart
.Axes(xlValue).MinimumScale = -Range("E10")
.Axes(xlValue).MaximumScale = Range("E10")
.Axes(xlCategory).MinimumScale = 0
.Axes(xlCategory).MaximumScale = 1
End With

End Sub

'++++++++End of File++++++++'

図 6 2 階微分方程式をシミュレーションするプログラム
(ファイル名: 1_One_freedom_vibration_Ver4.xlsm)

4. Excel による計算の実際

4.1 マクロの起動の仕方

マクロを起動した場合、悪意のあるマクロウイルスなどに感染する場合がありますので、Excel にはセキュリティ機能が設定されている。このため VBA を起動するために、以下の手順が必要である。

< Excel2016 の場合 >

1. Excel を開いた状態でツールバー上部に「開発」タブが表示されていない場合は、以下の手順で表示する。 <ファイル>タブ → <オプション> → <リボンのユーザー設定> → <メインタブ> ウィンドウの中の「開発」にチェックをつけて <OK> ボタンをクリックする。これによってツールバー上部に「開発」タブが表示される。
2. 「開発」タブをクリックして「マクロのセキュリティ」をクリックすると、「セキュリティセンター」ダイアログボックスが開く。 → 「マクロの設定」を選択し、マクロの設定を「警告を表示して全てのマクロを無効にする」を選択する。 → OK で終了。
3. 一旦 Excel ファイルを閉じ、再度マクロを含む Excel (.xlsm) ファイルを開くと「セキュリティの警告」メッセージバーが表示される。この中の <コンテンツの有効化> をクリックする。 → 「セキュリティに関する通知」ウィンドウが表示されたら、この中の <マクロを有効にする> ボタンをクリックする。
4. 以上でマクロの使用が可能になることから、Excel シート上の「Run」ボタンを押すことによって計算が開始される。
5. プログラムを見たり編集したりする場合は、「開発」タブ → <マクロ> とすると、「マクロ」ダイアログボックスが表示される。
6. もしプログラムに誤りがある場合や、0 で割算したような場合は、「実行」時に「コンパイルエラー」と表示され、誤りの部分が選択されるので OK ボタンを押す。誤りを修正した後に、プログラムを記述したコードウィンドウ上部のツールバー内にある、四角ボタン(リセット)を押すこと。リセットボタンを押さないと、次に「実行」ボタンを押しても再計算されない。
7. プログラムがどうしても動かない場合は以下の手順を試して欲しい。プログラムを記述したコードウィンドウ上部のツールバー (Excel シートのツールバーではない) の「ツール」をクリック → 「参照設定」 → 「参照設定」ウィンドウ内で、何らかの項目に「参照不可」となっているものにチェックが入っていたらこれを外す。 → OK。

4.2 自由振動の場合

式(8)の2階同次線形微分方程式をシミュレーションする Excel シートを図7に示す。このシートには図6のVBAプログラムが含まれており、上記の手順でコードウィンドウを開いて確認することができる。図7の図中の番号は以下のように対応している。

- ① 微分方程式の係数や初期値などを入力するセル。英語表記としているが、質量をはじめとする各パラメータを入力できる。英語表記の右のセル(たとえば、「Mass」の右にある「mas」)はVBAプログラムで用いた記号である。
- ② 「Run」ボタンを押すと計算を実行する。
- ③ 計算結果がセルに自動表示される。
- ④ 結果を示すグラフ。なお、このグラフはプログラムで描いているのではなく、③の計算結果を用いて通常のExcelのグラフ表示法で描いたものである。VBAプログラムによって、入力する初期変位や解析終了時間に対応するように、グラフの横軸と縦軸の最大値(と最小値)が変更されるようになっている。
- ⑤ 自由振動の動きを視覚的に分かるようにしたアニメーションである。
- ⑥ 自由振動のピークをカウントし、そこから対数減衰率と減衰比をシミュレーション結果に基づいて計算している。

是非、各パラメータの大小によって振動の様子がどのように変わるか、試してみて欲しい。

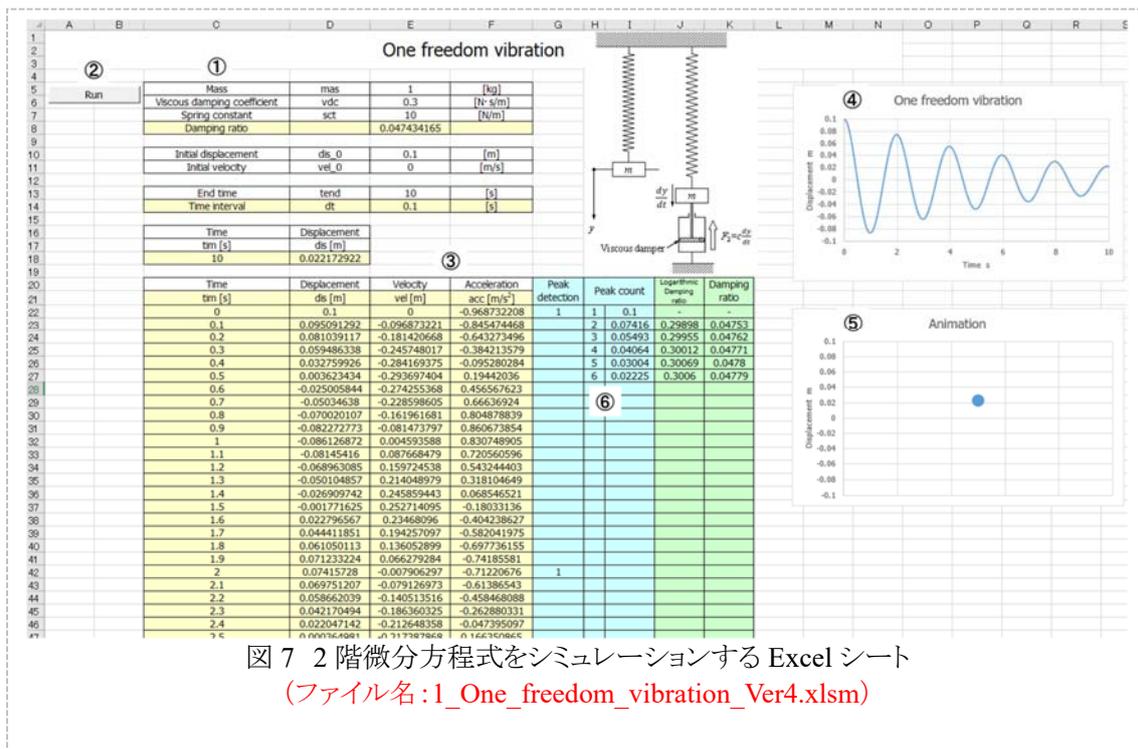


図7 2階微分方程式をシミュレーションする Excel シート
(ファイル名: 1_One_freedom_vibration_Ver4.xlsm)

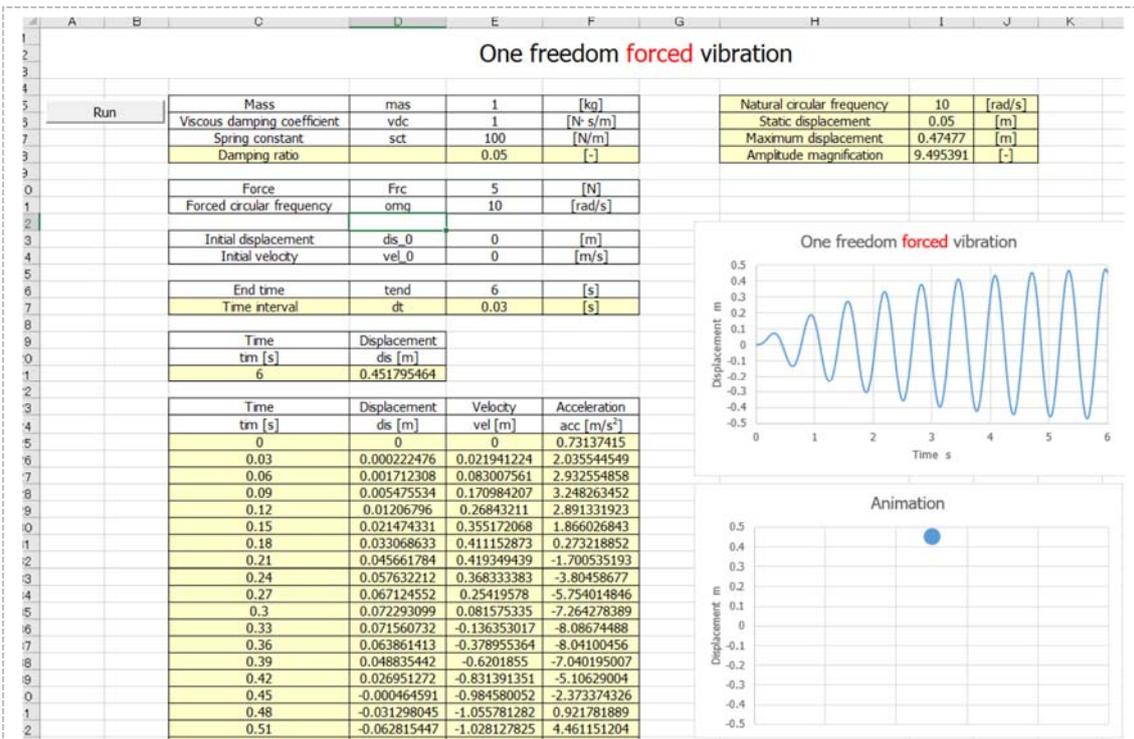


図 8 強制外力による振動の様子をシミュレーションする Excel シート
(ファイル名: 2_One_freedom_forced_vibration_Ver4.xlsm)

4.3 強制振動の場合

式(25)で与えられる強制振動のシミュレーションを行う Excel シート(ファイル名: 2_One_freedom_forced_vibration_Ver4.xlsm)を図 8 に示す. ここでは, 強制外力, 強制外力の円振動数を入力するセルが増えているが, 基本的に図 7 の Excel シートとほとんど同じである. また, プログラムにおいても式(76)に示す強制力項の計算を行うために, 図 6 で朱文字とした Function 文が図 9 のように変わっているだけである. ここで, vel_dot の右辺第 3 項目が強制外力を表している.

'+++++

Function vel_dot(tim, dis, vel)

$$\text{vel_dot} = -\text{vdc} / \text{mas} * \text{vel} - \text{sct} / \text{mas} * \text{dis} + \text{Frc} / \text{mas} * \text{Cos}(\text{omg} * \text{tim})$$

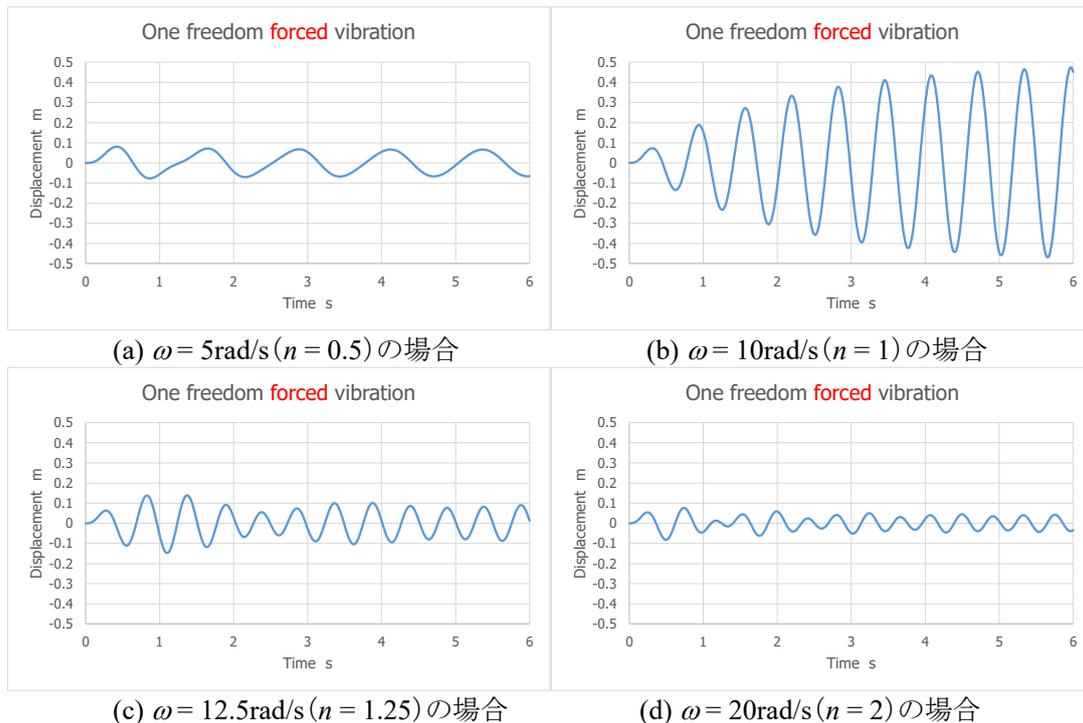
End Function

'+++++

図 9 自由振動から強制振動へのプログラム変更箇所

図 10 は図 8 の Excel シートにおける強制外力の円振動数 (Forced circular frequency) を変化させた場合におけるシミュレーション結果である. このように円振動数, すなわち, 振動数比の変化によって, 強制振動の特性(応答)は大きく異なることを見える化できることがわかる. なお, 一部の結果には最初の波形に乱れが見られるが, それは自由振動の成分が加わっているためであり, 開始数秒後には殆ど乱れが無くなっていることも見て取れる.

このように, Excel という汎用性の高いソフトウェアを使用して自由振動や強制振動のシミュレ-



(a) $\omega = 5\text{rad/s}$ ($n = 0.5$) の場合

(b) $\omega = 10\text{rad/s}$ ($n = 1$) の場合

(c) $\omega = 12.5\text{rad/s}$ ($n = 1.25$) の場合

(d) $\omega = 20\text{rad/s}$ ($n = 2$) の場合

図 10 強制外力による振動シミュレーション結果

(ファイル名: 2_One_freedom_forced_vibration_Ver4.xlsm)

シミュレーションを行えることは、初学者には理解しにくい挙動を見える化し、理解を深める方法(ツール)として有効であると考えている。

5. 強制変位振動を対象としたシミュレーション結果と理論解並びに実験結果との比較

金沢工業大学工学部機械工学科では 3 年次に機械工学専門実験・演習[2]が開講され、その中の一つに「振動工学実験」がある。これは、**図 11** に示すような実験装置を用いて、左側の錘(駆動壁)を、背後に取り付けたモータによって振幅 10mm で振動させるものであり、**図 2**(1 自由度系)、並びに**図 3**(2 自由度系)における動的な挙動に関する理解を深めるとともに、動吸振器の原理を修得することを目的とするものである。

この実験装置では、モータの回転数を変えることによって強制変位の円振動数を変え、これによって動かされる錘 1(質量 m_1)と錘 2(質量 m_2)の振幅を測定して理論値と比較させる内容となっている。なお、1 自由度系として実験する場合には、錘 2 をクリップで固定することで動かないようにして具現化している。実験装置の錘の質量やばね定数が明らかになっていることから、これを用いてシミュレーションを行い、理論値および実験値と比較してみることにする。

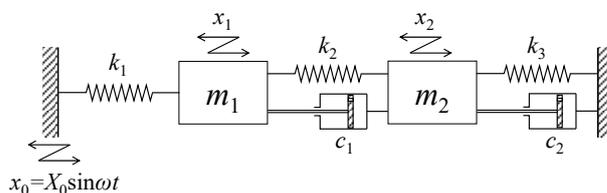


図 11 機械工学専門実験・演習「振動工学実験」で使用する実験装置の外観とモデル図との対応関係(2 自由度系の場合)

5.1 1自由度系の場合

図 12 に、このシミュレーションを行うための Excel シート (ファイル名: [3_One_freedom_forced_displacement_vibration_Ver4.xlsm](#)) を示す. 基本的な VBA プログラムは 図 6 や 図 9 で示したものと大差ないことから、是非、マクロプログラムを直接参照して頂ければ幸甚である。「振動工学実験」で利用することを想定し、質量、粘性減衰係数、ばね定数に加えて、強

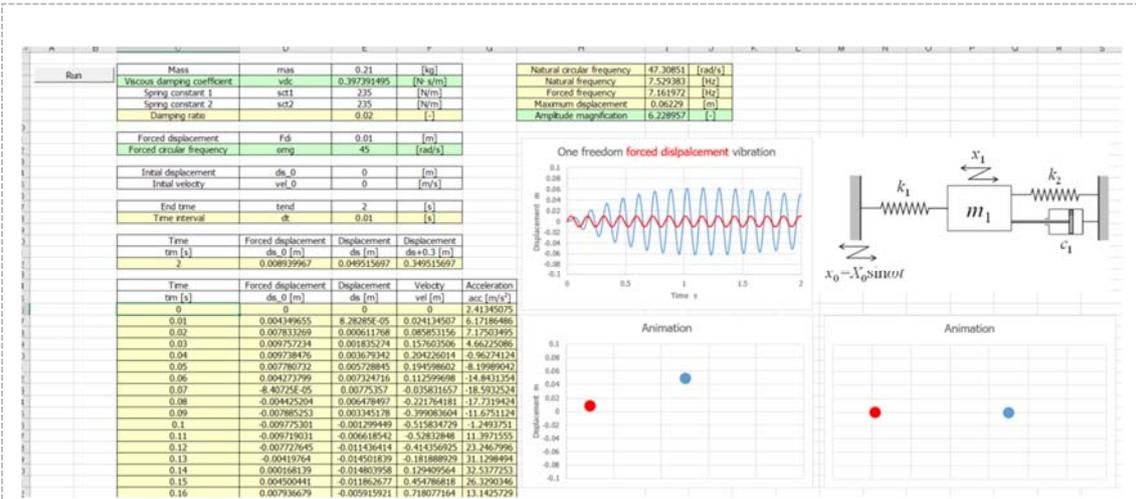
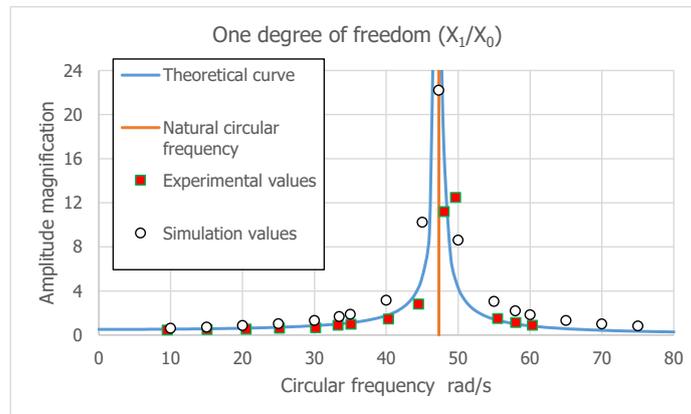
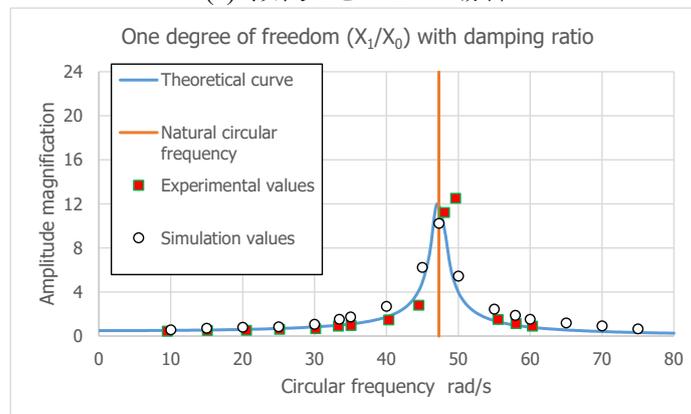


図 12 1 自由度系強制変位振動をシミュレーションする Excel シート (ファイル名: [3_One_freedom_forced_displacement_vibration_Ver4.xlsm](#))



(a) 減衰比を 0 とした場合



(b) 減衰比を 0.02 とした場合

図 13 シミュレーション結果と理論解並びに実験結果との比較 (1 自由度系の場合)

制変位の円振動数を入力するのみという、シンプルなものに仕上げたつもりである。また、モデル図とアニメーションを上下に配置することで、見える化による理解がより深まるようにした。

図 13 にシミュレーション結果(プロット:○)と実験値(プロット:■), 並びに式(59)で求めることのできる理論値(実線)を比較した結果を示し, (a)はシミュレーションと理論値で減衰比を 0 とした場合, (b)は減衰比を 0.02 とした場合である。

この結果から, シミュレーション結果と理論解並びに実験結果は十分な精度で一致していることが確認でき, とりわけ, 減衰比を考慮した場合の方が一致の傾向は強いことが見て取れる。さらに, 文章での表現は難しいが, 円振動数を適宜変更・入力しシミュレーションすることによって, 強制変位と錘 1(質量 m_1)の位相が(減衰)固有円振動数を境にして同位相から逆位相へ変化する様子も見て取れる。

5.2 2自由度系の場合

図 14 に、このシミュレーションを行うための Excel シート (ファイル名 :

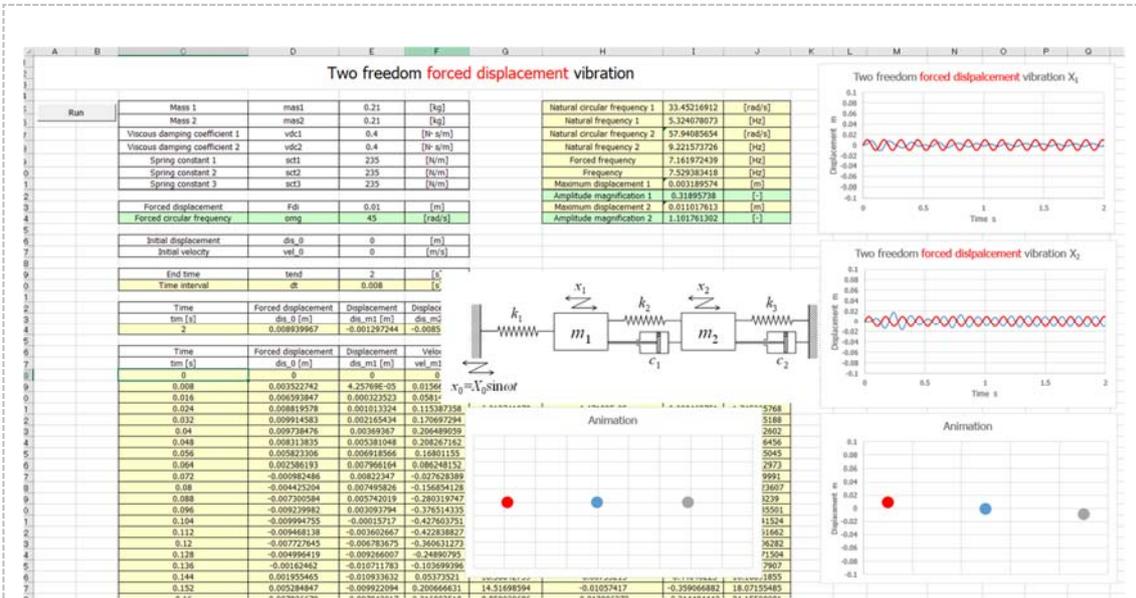
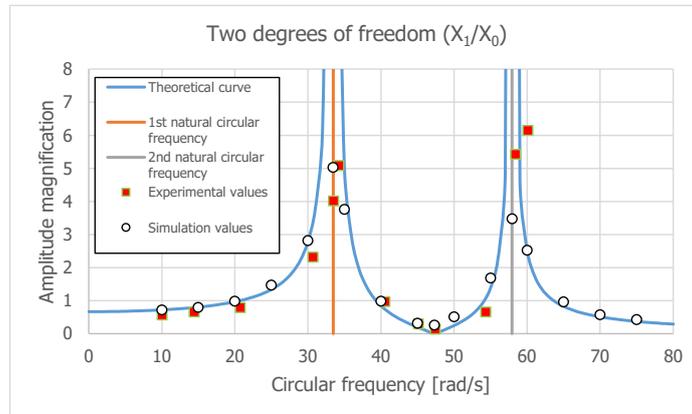
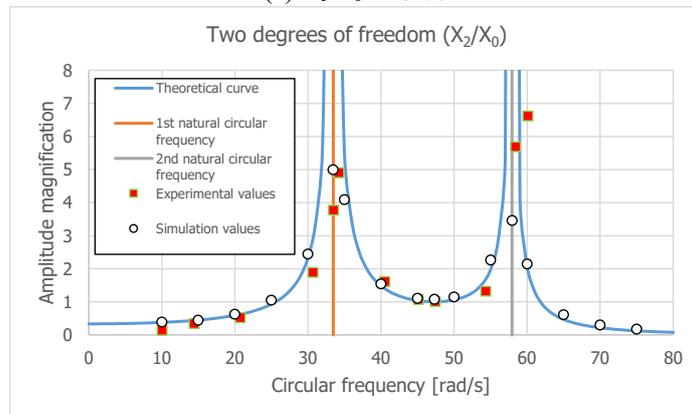


図 14 2 自由度系強制変位振動をシミュレーションする Excel シート
(ファイル名 : 4_Two_freedom_forced_displacement_vibration_Ver4.xlsm)



(a) X_1/X_0 の場合



(b) X_2/X_0 の場合

図 15 シミュレーション結果と理論解並びに実験結果との比較 (2 自由度系の場合)

4_Two_freedom_forced_displacement_vibration_Ver4.xlsm)を示す。なお、粘性減衰を考慮しない場合には、自由振動の影響がずっと残ってしまうため、ここでは、式(68)と式(70)で与えられる減衰を考慮した場合で比較した。

図 15 に錘 1 と錘 2 の駆動壁(強制変位)に対する振幅倍率の比較を、理論値、実験値、シミュレーション結果について示す。1 自由度系の場合と同様に、シミュレーション結果がかなりよく一致していることがわかる。

最後に、図 13(1 自由度系)や図 15(2 自由度系)で示した実験結果を得た際の実験装置の挙動の一部をムービーとして整理したファイルをご覧頂きたい。これらを比較し、Excel によるシミュレーションも駆使することを通じて、強制変位振動によって生じる共振現象に加えて、位相の変化、さらには動吸振器の原理を理解してもらうことができれば幸甚である。

6. おわりに

微分方程式によって与えられる振動現象(問題)を, Excel に標準装備されている VBA を用いてシミュレーションする手法について解説した. 微分方程式の係数の違いによって振動の様子がどのように変わるかを瞬時に見比べることや, 強制外力の周期などによってばね系がどのように動くかを理解しやすくしたりすることができる. 言うまでも無く, Excel は非常に汎用性の高いソフトウェアであることから, 大学や高専などの高等教育機関における講義の補助教材として活用いただければ, 誠に幸いである.

7. 謝辞

本稿は文献[3]を改訂したものである。文献[3]の作成と公開にご尽力頂きました故 増山 豊 本学名誉教授に深甚なる謝意を示す。合わせて、「振動工学実験」の実験装置を管理する金沢工業大学プロジェクト教育センターの関係各位に御礼申し上げる。

8. 参考文献

- [1] 増山 豊:Excel で解く機械系の運動力学—振動問題からフライトシミュレーションまで—, 共立出版, (2002).
- [2] 金沢工業大学:機械工学専門実験・演習 A&B テキスト.
- [3] 増山 豊, 畝田道雄:Excel で見てみよう振動工学, 私立大学情報教育協会教育コンテンツ相互利用システム, 登録日:2017/5/11.