

被害発生率指標の不確定性を考慮したシステム信頼性解析

System Reliability Analysis Taking Account of Uncertainty in Estimation of Failure Rate Index of Structural Units

○能島暢呂（岐阜大学工学部） 杉戸真太（岐阜大学工学部）

Nobuoto NOJIMA : Department of Civil Engineering, Gifu University
1-1 Yanagido, Gifu 501-1193
Tel/Fax: +81-58-293-2416, E-mail: nojima@cive.gifu-u.ac.jp

Masata SUGITO : *ditto*
Tel/Fax: +81-58-293-2420, E-mail: sugito@cive.gifu-u.ac.jp

A failure rate index, which represents an average number of failures per structural unit, is one of frequently-used measures for description of seismic damage and its empirical prediction. Because of an uncertainty resulting from statistical insufficiency, it is appropriate to treat the failure rate as a probabilistic variable rather than a deterministic value. This study presents a consistent methodology to deal with the uncertainty in the failure rate and its propagative effect to system reliability. First, a probabilistic density function (PDF) of the failure rate is derived using Bayesian statistical method. Next, analytical solutions of PDF of component and system reliability involving the uncertainty are derived for basic configurations of networks such as series, parallel, series-parallel, and parallel-series systems. For practical purposes, first-order approximation forms of PDF are derived as the beta distribution in terms of the mean and the standard deviation of the failure rate.

1. 序論

一般的に、地域防災計画の立案に先だって行われる被害想定作業のように、被害予測の対象施設が広範かつ多数になる場合には、過去の震害事例に基づく経験的な被害予測が行われる場合が多い。ここでは、次式で定義される「被害発生率」という指標が多用されている。

$$\begin{aligned} \text{「被害発生率」} \\ &= \text{単位長さ（施設数）あたり平均（期待）被害数} \\ &= \frac{\text{被害発生数}}{\text{施設延長距離（総施設数）}} \end{aligned} \quad (1)$$

この被害発生率の具体的な利用形態は多岐にわたるが、おおまかに分類すると以下のようになる。

- 被害発生率を地域別に集計することにより、被害の空間的分布を把握する。
- 被害発生率を影響要因別に集計することにより、被害

を支配する要因について分析する。

- さらに、被害発生率を被説明変数とした統計処理を行い、フラジリティー関数や被害予測式を構築する。
- 想定地震のもとで、フラジリティー関数や被害予測式を適用して被害発生率を算出し、被害規模を予測する。（地震直後にはこの段階がリアルタイム処理される。）

いずれの目的にせよ、式(1)で被害発生率を算定するにあたっては、以下の2つの理由により、「条件細分化による推定精度」と「データ充実による統計的推定精度」が、トレードオフの関係にあることに注意が必要である。

- (1) 被害発生の原因を詳細に分析するためには、影響要因（地震動強度、地盤条件、液状化の有無、構造物の耐震強度に関する要因など）ごとに統計データを細分化して式(1)を適用し、多変量解析などの統計処理を適用することが必要である。これにより被害発生に寄与

する条件を統一し、不確定性を除去することが可能となる。

- (2) 安定した被害発生率を得るためには、ある程度まとまった延長距離を対象として式(1)を適用し、統計的推定精度の向上をはかる必要がある。例えば、10kmあたり1箇所の被害の場合と、200kmあたり20箇所の被害の場合では、被害発生率が同じ0.1(箇所/km)を与えるが、明らかに後者の方が統計的な確からしきが高い。

このように、統計データとしての不完全さ・不十分さゆえに、式(1)で算出される被害発生率の点推定値は、常に統計的不確定性をはらんでいるといえる。ところが実務的には、上記(1)の側面が重視される一方で、(2)の側面は見落とされがちである。つまり、被害発生率の不確定性の影響が議論の対象とされる機会が少ないために、ばらつきへの配慮を欠いたまま被害発生率が利用されていることが多い。

災害のように稀な現象においては、同一条件下での繰り返し観測によるデータ充足が期待できないため、不確定性を格段に低減できる見込みは小さい。数少ないデータからパラメータ推定を行う必要がある場合、ベイズ確率の方法に基づく統計的推論^{1),2)}が有効であることが知られており、これまで、歴史地震データに基づく地震発生率の算定^{3),4)}、労働災害の発生頻度の分析⁵⁾、工学システムの信頼性解析⁶⁾、リアルタイム地震防災における意思決定支援⁷⁾などにおいて、効果的に用いられてきた。

本研究は、以上のような背景のもとで、ベイズ的推論を被害発生率の推定に適用し、その不確定性を定量的に評価するための方法論を構築することを狙いとしている。ベイズ的推論においては、被害発生率を確率変数として扱うため、推定結果を確率分布の形で得ることができる。本研究ではこのことを利用して、ネットワークのシステム信頼度の確率分布を誘導することにより、被害発生率の不確定性の影響を定量的に評価することとする。

以下、2.では、先に述べた被害発生率の算定における統計的不確定性に関する具体例として、兵庫県南部地震における神戸市水道局の配水管被害データを用いて説明する。3.では、被害データにベイズ的推論を適用して、被害発生率の確率分布と被害箇所数の予測分布を誘導する。さらに4.では、システム要素ならびに、直列・並列システムや並直列・直並列システムといった、基本ネットワークのシステム信頼度の確率分布を誘導する。さらに5.では、誘導されたシステム信頼度の確率分布を、モーメント法によりベータ分布で近似し、より複雑なネットワークのシステム信頼度の確率分布を簡便に求める方法を示し、例として、 K -out-of- N システムをとりあげる。

2. 被害発生率算定の具体的事例

ここでは、被害発生率が算定された具体的事例を挙げて、本研究の位置付けを明らかにする。文献⁸⁾では、1995年兵庫県南部地震における神戸市、西宮市、芦屋市の3市の配水管被害データを用いた被害分析が行われている。被害要因としては、「管の被害箇所及び形態」、「管種」、「管径」、「震度階」、「表層地質」、「液状化率」の6要因が挙げられ、2項目ずつのクロス集計がまとめられている。表1はこのうち、神戸市水道局の「管種」と「管径」のクロス集計結果⁸⁾を抜粋したものであり、被害箇所数、埋設延長距離(km)、被害発生率(箇所/km)の数値が示されている。

全データを用いた集計(表1右下欄)では、管路延長1678.69 kmに1056箇所の被害が発生しており、被害発生率は0.629(箇所/km)となっている。管種別の集計値(表1最右列 Subtotal欄)をみると、被害発生率は、铸铁管(CIP) 1.520、塩化ビニール管(VP) 0.464、鉄管(SP) 0.466、ダクトイル铸铁管(DIP) 0.439の順となっている。一方、管径別の集計値(表1最下行 Subtotal欄)をみると、 $\phi 75$ mm以下で1.734、 $\phi 200$ – 250 mmで0.914、 $\phi 100$ – 150 mmで0.878、 $\phi 300$ – 450 mmで0.833、 $\phi 500$ mm以上で0.582の順となっている。これらの結果は、耐震性に優れている管種ほど低く、管径が大きいほど低いという一般的傾向とほぼ整合した数値を示しているものの、部分的には、やや矛盾した点が認められる。また、埋設延長が短い $\phi 75$ mm以下の場合のクロス集計をみると、CIPの被害発生率が13.23と「異常値」ともいえる過大な数値となっているほか、DIPの被害発生率(0.649)がVP(0.576)を上回る数値となっている。

このような事例を引き合いに出すまでもなく、アイテム数やカテゴリー数を増やして条件を細分化するほど、要因分析の分解能が向上する点で望ましい反面、条件に合致するデータが乏しくなるために、統計的安定性の低下を招き、様々な矛盾や異常値の原因となることは明らかである。実際に、被害予測式を構築するために多変量解析を適用する場合には、こうした問題に直面することが多いが、「異常値」の扱い方については経験的判断によらざるを得ないのが現状である。

3. ベイズ的推論による被害発生率の確率分布

2.では、被害発生率算定の具体的事例を通じて統計的不確定性の問題の一端を紹介したが、ここでは簡単な数理モデルを用いて、不確定性の定量的評価を行う。

まず図1のように、全長 L_0 の構造物を考え、被害が全

Table 1 Damage Statistics of Water Distribution Pipelines in Hyogoken-Nambu Earthquake (Kobe City) ⁸⁾

| ↓ Type of pipes | Pipe diameter (mm)→ | −φ75 | φ100–150 | φ200–250 | φ300–450 | φ500– | Unknown | Subtotal |
|----------------------------|----------------------|-------|----------|----------|----------|-------|---------|----------|
| DIP [Ductile Iron Pipe] | No. of damage | 4 | 336 | 131 | 101 | 7 | 0 | 579 |
| | Buried length (km) | 6.167 | 756.1 | 258.1 | 199.7 | 95.06 | 3.230 | 1318.0 |
| | Failure rate (/km) λ | 0.649 | 0.444 | 0.508 | 0.506 | 0.074 | 0 | 0.439 |
| CIP [Cast Iron Pipe] | No. of damage | 7 | 170 | 99 | 62 | 10 | 0 | 348 |
| | Buried length (km) | 0.529 | 85.8 | 47.15 | 60.56 | 32.89 | 1.973 | 228.9 |
| | Failure rate (/km) λ | 13.23 | 1.981 | 2.100 | 1.024 | 0.304 | 0 | 1.520 |
| VP [Vinyl Pipe] | No. of damage | 5 | 0 | 0 | – | – | 0 | 5 |
| | Buried length (km) | 8.674 | 1.954 | 0.061 | – | – | 0.083 | 10.77 |
| | Failure rate (/km) λ | 0.576 | 0 | 0 | – | – | 0 | 0.464 |
| SP [Steel Pipe] | No. of damage | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 0 | 11 |
| | Buried length (km) | 0 | 0.723 | 5.196 | 6.463 | 11.22 | 0 | 23.60 |
| | Failure rate (/km) λ | 0 | 1.383 | 0.385 | 0.619 | 0.357 | 0 | 0.466 |
| Unknown | No. of damage | 3 | 69 | 10 | 19 | 11 | 0 | 113 |
| | Buried length (km) | 4.234 | 47.45 | 11.10 | 20.03 | 10.30 | 4.303 | 97.42 |
| | Failure rate (/km) λ | 0.709 | 1.454 | 0.901 | 0.948 | 1.165 | 0 | 1.160 |
| Equipment | No. of damage | 15 | 207 | 52 | 53 | 54 | 0 | 381 |
| Subtotal | No. of damage | 34 | 783 | 294 | 239 | 87 | 0 | 1056 |
| | Buried length (km) | 19.60 | 892.0 | 321.6 | 286.8 | 149.5 | 9.589 | 1678.69 |
| | Failure rate (/km) λ | 1.734 | 0.878 | 0.914 | 0.833 | 0.582 | 0 | 0.629 |

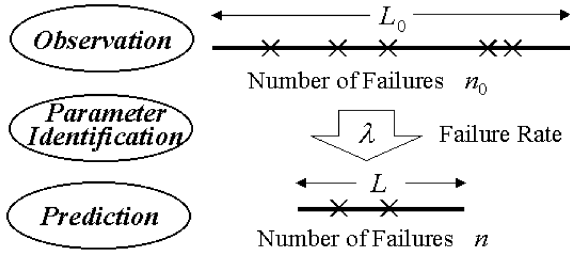


Fig.1 Estimation of Failure Rate Based on Damage Observation and Future Prediction of Failures

長にわたって一様かつランダムに発生すると仮定する。単位長さあたりの被害発生率を λ とすると、被害箇所数 n はポアソン分布に従う。

$$P(n|\lambda) = \frac{(\lambda L_0)^n e^{-\lambda L_0}}{n!} \quad (2)$$

いま、ある地震によって、この構造物に n_0 箇所の被害が観測された場合、被害発生率 λ の最尤推定量は

$$\hat{\lambda} = \frac{n_0}{L_0} \quad (3)$$

で与えられるが、本研究ではこの点推定値を用いることなく、被害発生率の推定値の不確定性を考慮するため、ベイズの推論を用いて、確率分布を求める。さらに、同一の条件に従う長さ L の構造物に生じる被害発生数 N の予測分布を求める。

被害発生率の尤度関数は式 (2) で与えられるから、事前分布を「あいまいな事前分布」とした場合、 n_0 箇所の被害を観測したという情報を得た後の λ の事後分布は、次式

のようにガンマ分布となる。

$$\begin{aligned} f_{\Lambda}(\lambda) &= P(\lambda|n_0) = \frac{P(n_0|\lambda)}{\int_0^{\infty} P(n_0|\lambda)d\lambda} \\ &= \frac{L_0(\lambda L_0)^{n_0} e^{-\lambda L_0}}{n_0!} \end{aligned} \quad (4)$$

この分布のモードは式 (3) に一致し、期待値と標準偏差は、

$$\mu_{\lambda} = \frac{n_0 + 1}{L_0} \quad (5)$$

$$\sigma_{\lambda} = \frac{\sqrt{n_0 + 1}}{L_0} \quad (6)$$

で与えられる。図 2 は、 $L_0 = 200$ において $n_0 = 0, 20, 40, 60, 80, 100$ と変化させた場合の $f_{\Lambda}(\lambda)$ である。被災履歴がない ($n_0 = 0$) 場合にも発生率は 0 とはならず、指数分布の確率分布を持つことがわかる。図 3 は、 $\hat{\lambda}$ を一定値 0.5 に保ち、 $L_0 = 10, 20, 50, 100, 200, 500$ と変化させた場合 (すなわち $n_0 = 5, 10, 25, 50, 100, 250$) の $f_{\Lambda}(\lambda)$ を示したものである。被害発生率算定のためのデータが豊富に得られるに従って、ばらつきが減少している。

被害発生率 λ の分布が式 (4) で与えられた場合、長さ L の構造物の被害発生箇所数が n となる確率の予測分布²⁾ は、式 (2) と式 (4) の混合分布として、次式のように負の二項分布で与えられる。

$$\begin{aligned} P(N = n|n_0) &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda L)^n e^{-\lambda L}}{n!} f_{\Lambda}(\lambda)d\lambda \\ &= \frac{(n + n_0)!}{n!n_0!} \left(\frac{L}{L + L_0} \right)^n \left(\frac{L_0}{L + L_0} \right)^{n_0+1} \end{aligned} \quad (7)$$

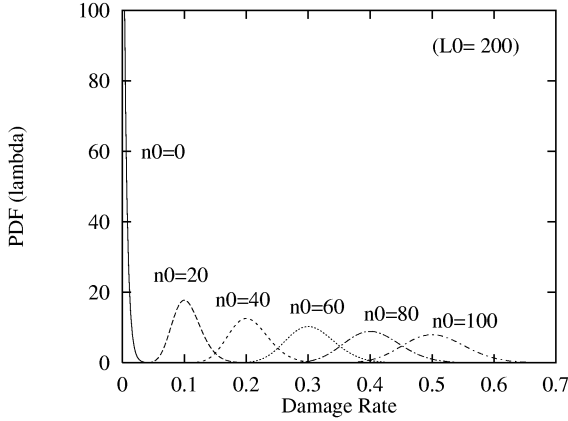


Fig.2 Probabilistic Density Function of Failure Rate with Various Observation of Number of Failures (Eq.(4))

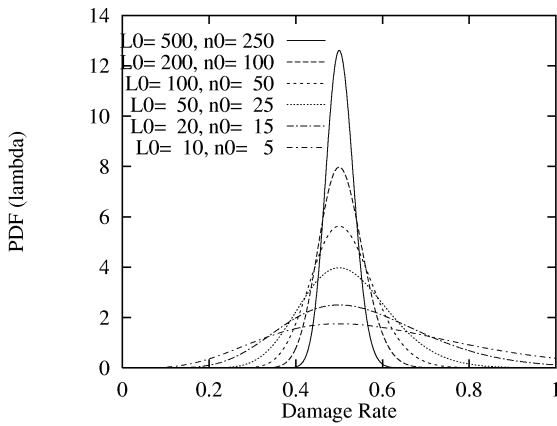


Fig.3 Probabilistic Density Function of Failure Rate with Various Combination of Inspected Length and Number of Failures (Eq.(4))

従って、長さ L に発生する被害箇所数 n の期待値は、

$$\bar{n} = \frac{n_0 + 1}{L_0} L = \mu_\lambda L \quad (8)$$

となる。図 4 は、 $L = 1$ のシステム要素において、 $\lambda = 0.5$ としたポアソン分布と、 $L_0 = 2, n_0 = 1$ とした場合 (ケース 1) と、 $L_0 = 20, n_0 = 10$ (ケース 2) および $L_0 = 200, n_0 = 100$ (ケース 3) とした場合の負の二項分布を比較したものである。ケース 1 のように観測データが非常に乏しい場合には、負の二項分布はポアソン分布から大きく乖離し、ばらつきが大きいことがわかる一方、ケース 2 とケース 3 ではほとんど差異は見られない。

4. 被害発生率に基づくシステム信頼度の確率分布

4.1 システム要素の信頼度の確率分布

3. に示したように、ベイズの推論を用いると、被害発生率 λ は式 (4) に従う確率変数であると解釈できる。一般

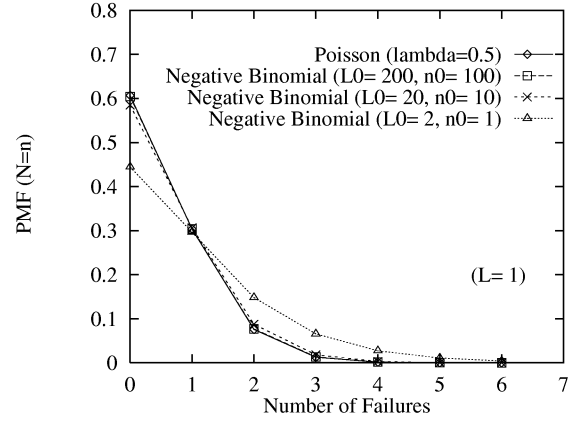


Fig.4 Probability Mass Function of Number of Failures (Eqs.(2)(7))

には、長さ L に発生する被害個数 n の確率 $P(N = n)$ の確率分布の誘導は困難であるが、 $n = 0$ の場合、すなわち、長さ L に被害が発生しない確率 (信頼度) $r = P(N = 0)$ の確率分布は比較的容易に誘導される。つまり、長さ L の信頼度を確率変数 λ の関数として

$$r = g(\lambda) = e^{-\lambda L} \quad (9)$$

とすると、 $0 \leq r \leq 1$ であり、関数 $r = g(\lambda)$ の確率密度関数は、確率変数の関数の確率密度関数の誘導法¹⁾により、

$$f_R(r) = f_\Lambda(g^{-1}) \left| \frac{dg^{-1}}{dr} \right| \quad (10)$$

において、

$$g^{-1}(r) = \lambda = -\frac{\ln r}{L} \quad (11)$$

$$\left| \frac{dg^{-1}}{dr} \right| = \left| \frac{d\lambda}{dr} \right| = \frac{1}{rL} \quad (12)$$

とおくことによって、次式で与えられる。

$$f_R(r) = \frac{r^{\frac{L_0}{L}-1} (-\ln r)^{n_0}}{\left(\frac{L}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (13)$$

この関数の r の定義域 $[0,1]$ での積分値は 1 であり、信頼度 r のモード、期待値、標準偏差は、それぞれ、

$$r_{mode} = e^{-\frac{n_0}{L_0} L} = e^{-\hat{\lambda} L} \quad (14)$$

$$\mu_R = \left(\frac{L_0}{L + L_0}\right)^{n_0+1} \quad (15)$$

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{L_0}{2L + L_0}\right)^{n_0+1} - \left(\frac{L_0}{L + L_0}\right)^{2(n_0+1)}} \quad (16)$$

となる。式 (15) は、式 (7) に $n = 0$ を代入した結果に一致する。期待値と分散は、 $L_0 \rightarrow \infty$ の極限で、それぞれ $e^{-\mu_\lambda L}$ および 0 に収束する。

図 5 は図 3 と同様に、 $\hat{\lambda}$ を一定値 0.5 に保ち、 $L_0 =$

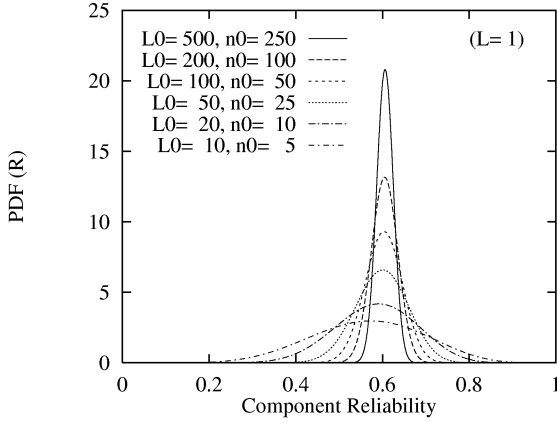


Fig.5 Probability Density Function of Component Reliability (Eq.(13))

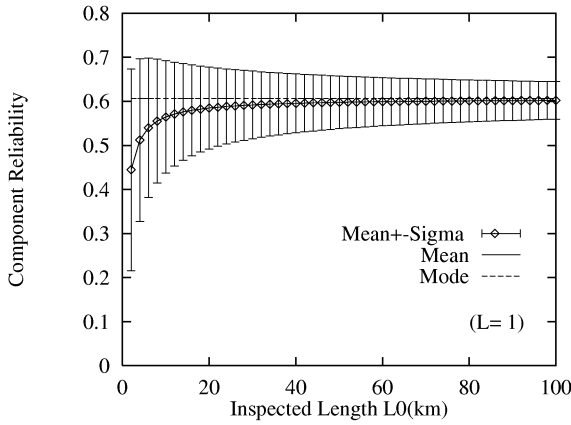


Fig.6 Mode, Mean, and Standard Deviation of Component Reliability

10, 20, 50, 100, 200, 500 と変化させた場合 (すなわち $n_0 = 5, 10, 25, 50, 100, 250$) の $L = 1$ のシステム要素の要素信頼度の確率密度関数を求めたものである。図 6 は同じ条件で、 r_{mode} (破線) および $\mu_R \pm \sigma_R$ をプロットしたものである。このケースでは、要素信頼度の確率分布が原点方向に長い裾野を持つために、最尤推定量 $\hat{\lambda}$ に基づく r_{mode} は要素信頼度を過大評価する傾向にあり、データが少ない (L_0 が小さい) 場合に特に著しい。

4.2 直列および並列システムのシステム信頼度の確率分布

4.1 で扱った長さ L の要素構造物を k 個組み合わせさせた直列システム、および、 m 個組み合わせさせた並列システムを考え、個々の要素の破壊が相互に独立であると仮定したうえで、それぞれの信頼度 r_S, r_P の確率分布を求める。直列システムおよび並列システムのシステム信頼度は、式 (13)

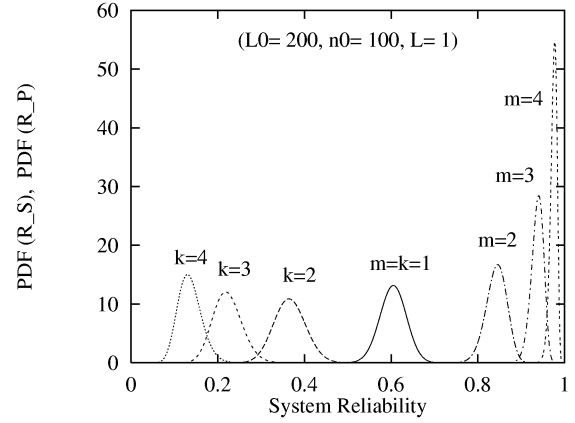


Fig.7 Probability Density Function of Reliability of Series and Parallel Systems (Eqs.(25)(26))

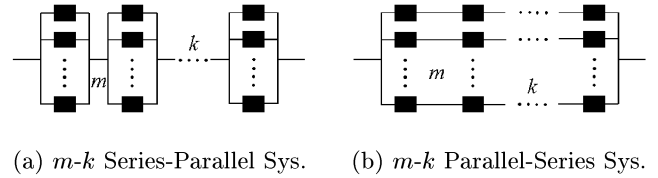


Fig.8 Basic Networks Composed of $m \times k$ Components

の確率分布に従う要素信頼度 r の関数として、それぞれ

$$r_S = \prod_{i=1}^k r = r^k \quad (17)$$

$$r_P = \prod_{i=1}^m r = 1 - (1 - r)^m \quad (18)$$

で与えられるから、その確率密度関数はそれぞれ、式 (25) および式 (26) のようになる (後のページにまとめて記載)。同一要素数からなるシステムの中で、直列システムは信頼度の下限を与え、並列システムは上限を与えるものである。図 5 において、 $L_0 = 200, n_0 = 100$ (表 1 の DIP の $\phi 300\text{--}400\text{mm}$ の場合がきわめてこの条件に近い) とした $L = 1$ の要素信頼度を用いて、要素数 $k = m = 4$ までの直列システムおよび並列システムの信頼度の確率密度関数を求めた結果を図 7 に示す。

4.3 $m - k$ 直並列および $m - k$ 並直列システムのシステム信頼度の確率分布

図 8 のように、長さ L の要素構造物を m 行 k 列のマトリクス状に配置し、 m 要素の並列システムを k 個直列に連結した「 $m - k$ 直並列システム」および k 要素の直列システムを m 個並列に連結した「 $m - k$ 並直列システム」を考える⁹⁾。個々の要素の破壊が相互に独立であると仮定すると、それぞれの信頼度 r_{SP}, r_{PS} は、式 (13) の確率

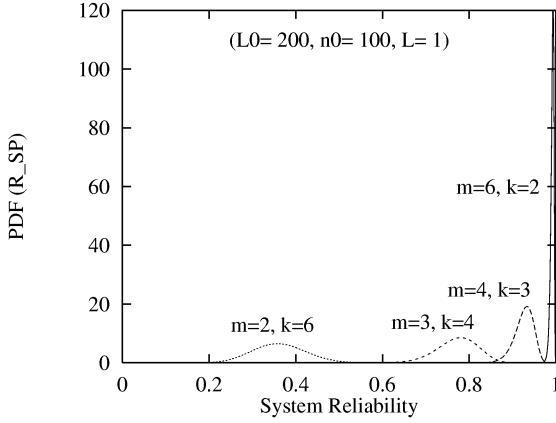


Fig.9 Derived PDF of Series-Parallel Systems (Eq.(27))

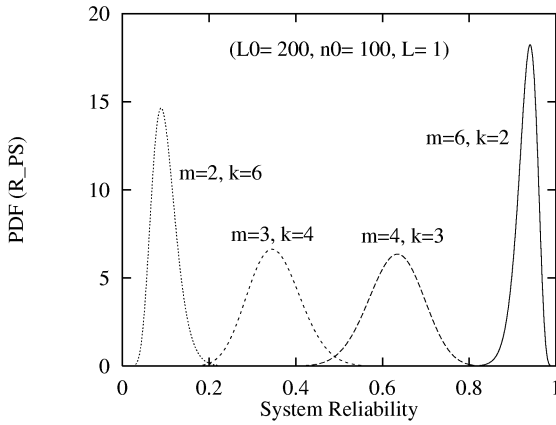


Fig.10 Derived PDF of Parallel-Series Systems (Eq.(28))

分布に従う要素信頼度 r の関数として、

$$r_{SP} = \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^m r = \{1 - (1 - r)^m\}^k \quad (19)$$

$$r_{PS} = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^k r = 1 - (1 - r^k)^m \quad (20)$$

与えられるから、確率密度関数はそれぞれ、式 (27) および式 (28) のようになる (後のページにまとめて記載)。両式において、 $m = 1$ とすると k 要素の直列システムとなって式 (25) に一致し、 $k = 1$ とすると m 要素の並列システムとなって式 (26) に一致する。

図 7 と同じ条件 ($L_0 = 200, n_0 = 100$) で $L = 1$ のシステム要素の要素信頼度を求め、 $m \times k = 12$ の要素からなる基本ネットワークにおいて、 m および k の組合せを変化させた場合の、直並列システムおよび並列システムの信頼度の確率密度関数を、それぞれ図 9、図 10 に示す。

なお、式 (25) ~ (28) の誘導に関しては、

$$r_S = g_S(\lambda) = e^{-\lambda k L} \quad (21)$$

$$r_P = g_P(\lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda L})^m \quad (22)$$

$$r_{SP} = g_{SP}(\lambda) = \{1 - (1 - e^{-\lambda L})^m\}^k \quad (23)$$

$$r_{PS} = g_{PS}(\lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda k L})^m \quad (24)$$

として、式 (4) の確率分布に従う確率変数 λ の関数として直接誘導しても、全く同じ結果を得る。

5. システム信頼度の確率分布の近似

3. においては、並直列あるいは直並列といった基本ネットワークのシステム信頼度の確率分布を誘導したが、一般のネットワーク・システムでは解析解の誘導は困難である。ここでは、確率密度関数の二次までのモーメントを適合させるモーメント法により、解析解の近似解を求めることを考える。近似解の確率分布としては、システム信頼度が $[0,1]$ の上下限値を持つことから、 p および q をパラメータとするベータ分布

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad (29)$$

を採用するものとする。

まず、確率変数 λ の関数 $Y = g(\lambda)$ の期待値 μ_Y と標準偏差 σ_Y は、 $g(\lambda)$ の $\lambda = \mu_\lambda$ まわりのテーラー展開により、 λ の期待値 μ_λ と標準偏差 σ_λ を用いて、次式で一次近似される¹⁾。

$$\mu_Y \simeq g(\mu_\lambda) \quad (30)$$

$$\sigma_Y \simeq \sigma_\lambda \cdot \left| \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=\mu_\lambda} \quad (31)$$

この近似式に、式 (5)(6) より求めた $\mu_\lambda, \sigma_\lambda$ を代入し、式 (9) および式 (21) ~ (24) の期待値と標準偏差を一次近似すると、式 (32) ~ (41) を得る (後のページにまとめて記載)。

ベータ分布のパラメータ p および q は、上記により求められた期待値と標準偏差の近似値 μ_Y および σ_Y を用いて、モーメント法により次式で得ることができる¹⁰⁾。

$$p = \mu_Y \left\{ \frac{\mu_Y(1-\mu_Y)}{\sigma_Y^2} - 1 \right\} \quad (42)$$

$$q = (1-\mu_Y) \left\{ \frac{\mu_Y(1-\mu_Y)}{\sigma_Y^2} - 1 \right\} \quad (43)$$

図 11 および図 12 の破線は、図 9、図 10 に示した厳密解の近似分布であり、実線で示した厳密解と重ねてプロットしたものである。両者に差異はほとんど認められないことから、ほぼ正しく近似できていることがわかる。この結果より、確率分布を厳密に誘導できない場合でも、システム信頼度の関数 $g(\lambda)$ が与えられさえすれば、ベータ分布による近似で確率分布を十分よく表現できるといえる。

$$f_{R_S}(r) = \frac{r^{\frac{L_0}{kL}-1}(-\ln r)^{n_0}}{\left(\frac{kL}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (25)$$

$$f_{R_P}(r) = \frac{\{1 - (1-r)^{\frac{1}{m}}\}^{\frac{L_0}{L}-1} (1-r)^{\frac{1}{m}-1} \left[-\ln\{1 - (1-r)^{\frac{1}{m}}\}\right]^{n_0}}{m \left(\frac{L}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (26)$$

$$f_{R_{SP}}(r) = \frac{\{1 - (1-r^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{m}}\}^{\frac{L_0}{L}-1} \cdot (1-r^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{m}-1} \cdot r^{\frac{1}{k}-1} \left[-\ln\{1 - (1-r^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{m}}\}\right]^{n_0}}{mk \left(\frac{L}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (27)$$

$$f_{R_{PS}}(r) = \frac{\{1 - (1-r)^{\frac{1}{m}}\}^{\frac{L_0}{kL}-1} \cdot (1-r)^{\frac{1}{m}-1} \left[-\ln\{1 - (1-r)^{\frac{1}{m}}\}\right]^{n_0}}{m \left(\frac{kL}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (28)$$

$$\mu_R = e^{-\mu_\lambda L} \quad (32)$$

$$\mu_{R_S} = e^{-\mu_\lambda kL} \quad (33)$$

$$\mu_{R_P} = 1 - (1 - e^{-\mu_\lambda L})^m \quad (34)$$

$$\mu_{R_{SP}} = \{1 - (1 - e^{-\mu_\lambda L})^m\}^k \quad (35)$$

$$\mu_{R_{PS}} = 1 - (1 - e^{-\mu_\lambda kL})^m \quad (36)$$

$$\sigma_R = \sigma_\lambda \cdot L e^{-\mu_\lambda L} \quad (37)$$

$$\sigma_{R_S} = \sigma_\lambda \cdot kL e^{-\mu_\lambda kL} \quad (38)$$

$$\sigma_{R_P} = \sigma_\lambda \cdot mL (1 - e^{-\mu_\lambda L})^{m-1} e^{-\mu_\lambda L} \quad (39)$$

$$\sigma_{R_{SP}} = \sigma_\lambda \cdot mkL \{(1 - (1 - e^{-\mu_\lambda L})^m)\}^{k-1} \cdot (1 - e^{-\mu_\lambda L})^{m-1} e^{-\mu_\lambda L} \quad (40)$$

$$\sigma_{R_{PS}} = \sigma_\lambda \cdot mkL (1 - e^{-\mu_\lambda kL})^{m-1} e^{-\mu_\lambda kL} \quad (41)$$

例えば、 N 個のシステム要素のうち K 個が健全であればシステム機能が保持される K -out-of- N システム⁹⁾ の信頼度は、

$$R_{KN} = \sum_{i=K}^N \binom{N}{i} r^i (1-r)^{N-i} \quad (44)$$

で与えられるので、上と同様にして、システム信頼度の平均値 $\mu_{R_{KN}}$ と標準偏差 $\sigma_{R_{KN}}$ を得る。

$$\mu_{R_{KN}} = \sum_{i=K}^N \binom{N}{i} e^{-\mu_\lambda iL} (1 - e^{-\mu_\lambda L})^{N-i} \quad (45)$$

$$\sigma_{R_{KN}} = \sigma_\lambda \cdot \left| \sum_{i=K}^N \binom{N}{i} L (N e^{-\mu_\lambda L} - i) \cdot e^{-\mu_\lambda iL} (1 - e^{-\mu_\lambda L})^{N-i-1} \right| \quad (46)$$

両式において、 $K=1$ とすると N 要素の並列システムとなつて μ_{R_P} 、 σ_{R_P} と一致し、 $K=N$ とすると N 要素の直列システムとなつて μ_{R_S} 、 σ_{R_S} と一致する。図 13 は、図 7 と同じ条件 ($L_0=200, n_0=100$) により $L=1$ のシステム要素の要素信頼度を求め、システム要素数を $N=12$ に固定し、 $K=4 \sim 11$ と変化させた場合のシステム信頼度をベータ分布で近似したものである。

最後に、被害発生率の確率分布が異なる k 個の要素からなるネットワークの場合には、式 (30)(31) の代わりに次式

を用いればよいことを付記しておく¹⁾。

$$\mu_Y \simeq g(\mu_{\lambda_1}, \mu_{\lambda_2}, \dots, \mu_{\lambda_k}) \quad (47)$$

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_{\lambda_i}^2 \cdot \left. \frac{dg}{d\lambda_i} \right|_{\lambda=\mu_{\lambda_i}}}^2 \quad (48)$$

6. 結論

本研究では、被害発生率の推定における不確定性を、ベイズの推論を利用して確率分布で評価するとともに、システム信頼性解析に与える影響について、確率論的考察を行った。得られた成果を以下に要約する。

- (1) 被害の一樣ランダム性の仮定のもとで、観測された被害データから推定される被害発生率の確率分布が、ガンマ分布で与えられること (式 (4) ~ (6)) に基づいて、システム要素信頼度の確率分布を誘導し (式 (13))、その期待値と標準偏差を求めた (式 (15)(16)) .
- (2) 基本ネットワークとして、直列・並列システム、並直列・直並列システムをとりあげ、被害発生時の独立性の仮定のもとで、それぞれのシステム信頼度の確率分布を誘導した (式 (25) ~ (28)) .
- (3) ネットワークのシステム信頼度の確率分布が、ベータ

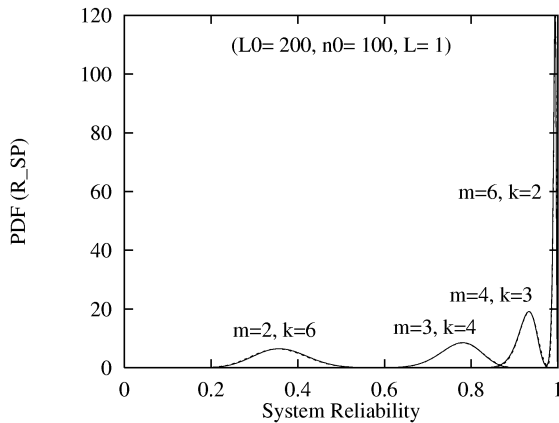


Fig.11 Approximated PDF of Series-Parallel Systems (Dashed Lines : Eqs.(29)(35)(40)(42)(43), Solid Lines : Derived PDF)

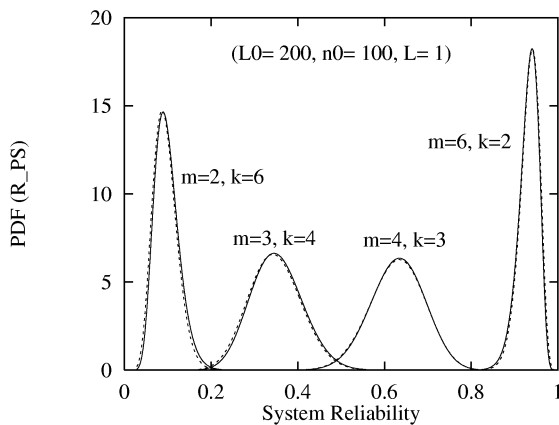


Fig.12 Approximated PDF of Parallel-Series Systems (Dashed Lines : Eqs.(29)(36)(41) ~ (43), Solid Lines : Derived PDF)

分布で適切に一次近似されることを示し (式 (29) ~ (31)(42)(43), 上記の基本ネットワークと K -out-of- N システムに対し, モーメント法を用いたパラメータ同定結果を示した (式 (32) ~ (41)(45)(46)) .

被害予測で用いられる被害発生率は, 数回の被害データを包括的に統計処理して算定されるのが通常であり, 被害発生率の不確定性を定量評価するには, 本来, 予測式そのもののばらつきを検討するのが妥当であるといえる. この点については本研究で詳しく扱わなかったため, 今後の課題としたい. いずれにせよ, 「推定結果の数値のひとり歩き」を防ぐ意味で, 被害発生率の不確定性に起因する誤差伝播には十分な注意が払われるべきであり, その解析的扱いについての一検討手法を提案した.

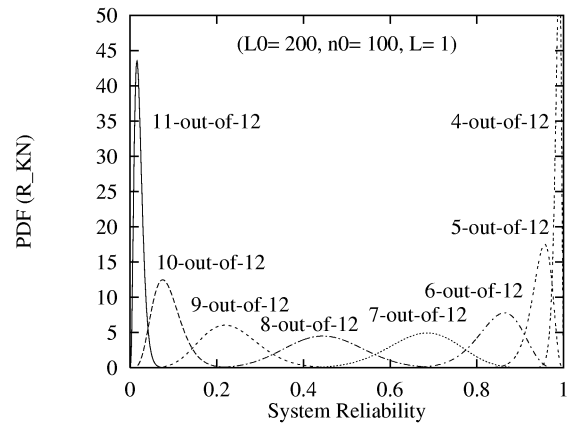


Fig.13 Approximated PDF of K -out-of- N Systems (Eqs.(29)(42)(43)(45)(46))

参考文献

- 1) Ang, A. H-S and Tang, W. H. (伊藤學, 亀田弘行共訳), 土木・建築のための確率・統計の基礎, (1977), 丸善.
- 2) 繁樹算男, ベイズ統計入門, (1985), 東京大学出版会.
- 3) Benjamin, J. R., Probabilistic Models for Seismic Force Design, *Proc. of ASCE*, Vol.94, No.ST5, (1968), pp.1175-1196.
- 4) 亀田弘行, 地震危険度の解析における歴史地震資料の評価について, 土木学会論文報告集, 第 273 号, (1978), pp.135-138.
- 5) 花安繁郎, 災害頻度率の変動を考慮した労働災害の発生特性に関する研究, 土木学会論文集, No.498/VI-24, (1994), pp.115-124.
- 6) Sharma, K. K. and Bhutani, R. K., Bayesian Reliability Analysis of a Parallel System, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.37, (1992), pp.227-230.
- 7) 能島暢呂・杉戸真太・金澤伸治, 地震時緊急対応における被害情報の逐次処理手法, 第 2 回リアルタイム地震防災シンポジウム論文集, (2000), pp.51-58.
- 8) 日本水道協会, 1995 年兵庫県南部地震による水道管路の被害と分析, 水道協会雑誌, (1996), pp.72-114.
- 9) 三根久・河合一, 信頼性・保全性の数理, 朝倉書店, pp.70-89, 1982 年.
- 10) 蓑谷千鳳彦, すぐに役立つ統計分布, (1998), 東京図書.