# ベイズ推定に基づく被害の逐次推定に関する考察

岐阜大学工学部　能島暢呂

**1.　はじめに**　　地震後早期に被害状況を把握することは，緊急対応を迅速・正確に行うための要件である．しかし，誤りのない確認情報の蓄積を待っていては災害対応が後手に回るばかりであることは，阪神・淡路大震災が残した大きな教訓の一つであり，被害の全貌の概略を即時推定して初動体制を確立するとともに，確認情報を取り込んで推定結果を更新し，精度の向上を図ることが重要である．筆者はこの問題にベイズ推定法に基づく統計的推論[1)]が有用であることに着目して，地震動強度情報に応じて被害推定の確率分布を更新しベイズ決定方式により期待被害を最小化する意思決定モデル[2)]および，被害情報に応じて要素被害率をベイズ推定しシステム信頼性解析に応用する方法[3)]を提案した．本研究は後者の概念を推し進めて，(1) 経験的判断に基づく被害発生率の事前分布の導入，(2) 被害箇所数の逐次推定のモデル化，(3) 逐次確率比検定に基づく逐次決定過程のモデル化，の 3 点について検討を行う．

**2.　被害発生率のベイズ推定と被害箇所数の逐次推定**　　**図 1** のように，全長 $L_T$ の構造物において被害が全長にわたって一様ランダムに発生すると仮定する．この構造物の一部の長さ $L_0$ を調べたところ $n_0$ 箇所の被害が発生していることが明らかになったとして，単位長さあたりの被害発生率 $\lambda$ を推定する問題を考える．被害箇所数 $n$ はポアソン分布に従うので，$\lambda$ の最尤推定量は $\hat{\lambda} = \frac{n_0}{L_0}$ で与えられるが，ベイズ推定法を適用する場合には，$P(n|L_0, \lambda) = \frac{(\lambda L_0)^n e^{-\lambda L_0}}{n!}$ が尤度関数となる．被害発生率に関して何の手がかりもない状態では，$\lambda$ の事前分布は一様分布と仮定できるので，$n_0$ 箇所の被害情報が得られた後の $\lambda$ の事後分布は，ガンマ分布 $f_\Lambda(\lambda|L_0, n_0) = \frac{L_0(\lambda L_0)^{n_0} e^{-\lambda L_0}}{n_0!}$ となる．一方，被害調査とは独立に地震動強度情報に基づいて「長さ $L_0'$ あたり $n_0'$ 箇所の被害が予想される」というおおよその経験的判断を下すことができる場合，$\lambda$ の共役事前分布としてガンマ分布を用いれば，$\lambda$ の事後分布は次式で与えられる．

$$f_\Lambda(\lambda|L_0', n_0', L_0, n_0) = \frac{(L_0 + L_0')\{\lambda(L_0 + L_0')\}^{n_0 + n_0'} e^{-\lambda(L_0 + L_0')}}{(n_0 + n_0')!} \quad (1)$$

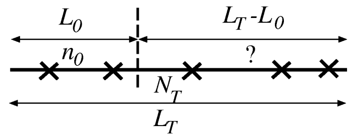


**図 1　確認情報と被害推定**

この場合，長さ $L$ の構造物の被害箇所数が $n$ となる確率は，ポアソン分布と式 (1) の複合分布より負の二項分布で与えられる．

$$P(n, L) = \int_0^\infty \frac{(\lambda L)^n e^{-\lambda L}}{n!} \, f_\Lambda(\lambda|L_0', n_0', L_0, n_0) \, d\lambda = \frac{(n + n_0 + n_0')!}{n!(n_0 + n_0')!} \left( \frac{L}{L + L_0 + L_0'} \right)^n \left( \frac{L_0 + L_0'}{L + L_0 + L_0'} \right)^{n_0 + n_0' + 1} \quad (2)$$

次に，$L_T$ のうち $L_0$ だけ調査が済んで $n_0$ 箇所の被害が確認された段階で，残る $L = L_T - L_0$ における被害数を推定し，総被害箇所数 $N_T$ を逐次推定する．被害発生率を確定的に算出して被害推定に用いると，総被害箇所数は $\widetilde{N_T}(L_0) = n_0 L_T / L_0$ で推定されるが，ベイズ推定を用いると，確認済みの被害箇所数 $n_0$ と式 (2) の平均 $\mu_N$ および標準偏差 $\sigma_N$ を用いて変動を見込んだ推定式を得ることができる．(ただし分布形状のひずみに注意が必要である.)

$$\widehat{N_T}(L_0) = n_0 + \mu_N \pm \sigma_N = n_0 + \frac{L_T - L_0}{L_0 + L_0'}(n_0 + n_0' + 1) \pm \frac{\sqrt{(L_T - L_0)(L_T + L_0')(n_0 + n_0' + 1)}}{L_0 + L_0'} \quad (3)$$

**3.　被害発生率の逐次確率比検定による逐次決定過程のモデル化**　　いま「被害発生率が $\lambda_0$（帰無仮説 $H_0$）以下であれば緊急対応を行わず，$\lambda_1$（対立仮説 $H_1$）以上であれば緊急対応を行う（$\lambda_0 < \lambda_1$）」という行動のルールを想定して，被害情報が蓄積されるプロセスにおける意思決定のタイミングについて考察するため，Wald による逐次確率比検定 (SPRT）[4)] を導入する．まず，微小区間 $\Delta L$ ごとに被害の有無を調べる逐次検査を行い，尤度比に基づく仮説検定を行うことを考える．逐次確率比検定の方法では，区間 $m\Delta L$ を調査した段階での被害箇所数を $k$ として，尤度比 $R_m$ が

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} < R_m \left( = \frac{f_\Lambda(\lambda_1|L_0', n_0')}{f_\Lambda(\lambda_0|L_0', n_0')} \cdot \frac{\theta_1^k (1 - \theta_1)^{m-k}}{\theta_0^k (1 - \theta_0)^{m-k}} \right) < \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (4)$$

を満たす間は決定を保留し，尤度比が上限を破れば仮説 $H_1$ を採用，下限を破れば仮説 $H_0$ を採用する．ここで $\theta_0 = 1 - e^{-\lambda_0 \Delta L}$ および $\theta_1 = 1 - e^{-\lambda_1 \Delta L}$ は，それぞれ仮説 $H_0$，仮説 $H_1$ のもとでの区間 $\Delta L$ の被害発生確率であり，$\alpha$ は仮説 $H_0$ が正しいのに棄却する誤り（第一種の誤り）を犯す確率（生産者危険），$\beta$ は仮説 $H_0$ が正しくないのに棄却しない誤り（第二種の誤り）を犯す確率（消費者危険）である．式 (4) を整理すると，$m$ に対する $k$ の条件式

$$\frac{\left(\log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \cdot m - n_0' \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_1 - \lambda_0) L_0' + \log \frac{\beta}{1-\alpha}}{\log \frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}} < k < \frac{\left(\log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \cdot m - n_0' \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_1 - \lambda_0) L_0' + \log \frac{1-\beta}{\alpha}}{\log \frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}} \quad (5)$$

が得られる．さらに $\Delta L \to 0$ の極限をとると二項分布がポアソン分布に収束することから，式 (1) を用いて尤度比を算出した場合と同じ結果が得られ，結局，式 (5) は $L_0$ に対する $n_0$ の条件式として次のように書き換えられる．

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_0)(L_0+L_0')+\log\frac{\beta}{1-\alpha}}{\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} - n_0' < n_0 < \frac{(\lambda_1-\lambda_0)(L_0+L_0')+\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} - n_0' \qquad (6)$$

事前分布を規定する $L_0'$ と $n_0'$ は，式 (6) の上下限値を $n^* = n_0' - \frac{\lambda_1-\lambda_0}{\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}L_0'$ だけ下方にシフトさせるので，結論に達するまでの平均調査長さ $\overline{L_V}$ は，次式の括弧内第二項に示す補正項の分だけ，$H_0$ のもとでは長く，$H_1$ のもとでは短くなる．

$$\overline{L_V} = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)\log\frac{1-\alpha}{\beta}+\alpha\log\frac{\alpha}{1-\beta}}{\lambda_0\log\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-(\lambda_0-\lambda_1)}\,(1+\xi_0), \quad \text{ここに}\ \ \xi_0 = \dfrac{\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{-\log\frac{\beta}{1-\alpha}}\,n^* & (H_0\text{のもとで}) \\ \dfrac{\beta\log\frac{\beta}{1-\alpha}+(1-\beta)\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\lambda_1\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-(\lambda_1-\lambda_0)}\,(1-\xi_1), \quad \text{ここに}\ \ \xi_1 = \dfrac{\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\log\frac{1-\beta}{\alpha}}\,n^* & (H_1\text{のもとで}) \end{cases} \qquad (7)$$

## 4. 仮想的な被災パターンによる数値計算例

以上の逐次推定手法を用いた数値計算例を示す．パラメータは，$L_T = 100$，$L_0' = 20$，$n_0' = 3$，$\lambda_0 = 0.1$，$\lambda_1 = 0.2$，$\alpha = \beta = 0.05$，とした．モンテカルロ法を用いて，$\lambda = 0.05$（Case 1）および $\lambda = 0.4$（Case 2）を母数とする指数乱数により被害間隔を与えて仮想的な被害パターンを生成し，実際の被害箇所数 $N_T$ はそれぞれ 6，32 となった．

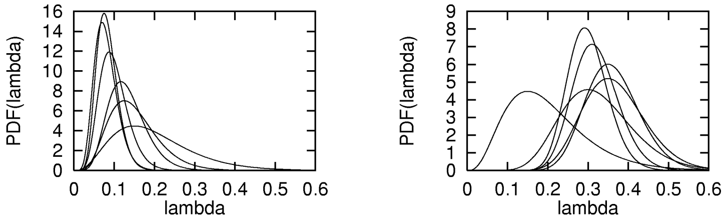


**図 2　被害発生率の逐次推定（左：Case 1，右：Case 2）**

**図 2** は被害発生率の逐次推定の結果を，$L_0 = 0, 20, 40, 60, 80, 100$ について示したものであり，事後分布の分散はこの順に単調減少している．同一の事前分布から出発しながら，被害情報の蓄積によって，真値に漸近して行く様子がわかる．**図 3** と **図 4** はそれぞれ Case 1 と Case 2 における被害の逐次推定の結果を示す．横軸は調査済みの距離 $L_0$，縦軸は被害箇所数で，点線は各段階で確認済みの被害箇所数 $n_0$，△は単純推定値 $\widetilde{N_T}(L_0)$ を表わす．式 (3) による逐次推定結果 $\widehat{N_T}(L_0)$ はエラーバー付きで示している．調査開始後の初期段階では経験的判断に基づく事前分布の影響を受け，推定結果と実際の被害箇所数との差はやや開いているものの，実被害を概略的に捉えている．特に，$\widetilde{N_T}(L_0)$ は初期段階において推定値が大きく変動するのに対し，$\widehat{N_T}(L_0)$ は比較的安定した傾向を示す．図中の二本の直線は条件式 (6) の上下限値を表わす．逐次確率比検定の結果，Case 1 では $L_0 = 58$ まで「緊急対応を行わない」という決定が保留され，警戒体制の解除まで慎重な態度が持続されている．一方，Case 2 では $L_0 = 16$ で「緊急対応を行う」ことが決定され，重大な意思決定が迅速に行われている．なお，$H_0$ および $H_1$ のもとでの $\overline{L_V}$ は，それぞれ 88.7, 66.7 であった．

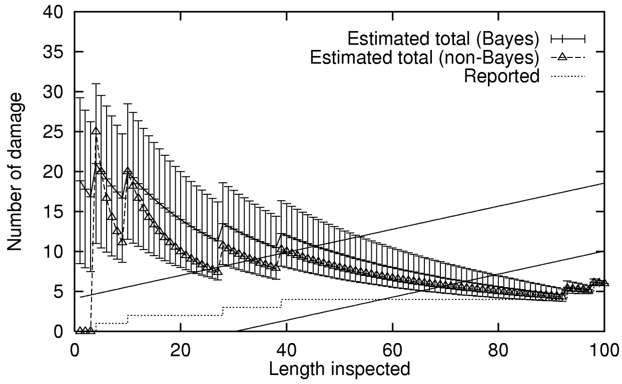


**図 3　Case 1 ($\lambda = 0.05$) における被害の逐次推定**

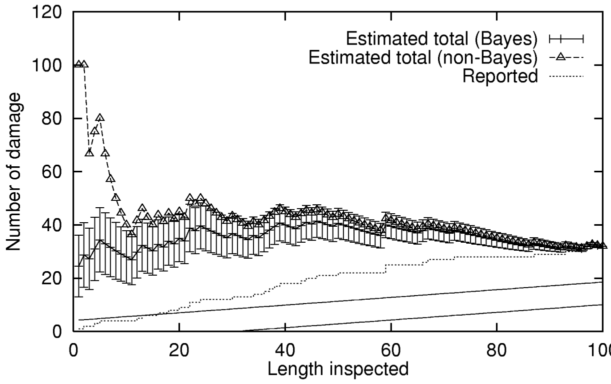


**図 4　Case 2 ($\lambda = 0.4$) における被害の逐次推定**

## 5. おわりに

適切な事前予測は事後対応の迅速化に寄与する一方，楽観的な態度（正常化のバイアス）は意思決定の遅延や判断の誤謬につながる.「危機管理の鉄則[5]」といわれる心構え（“Information hungry”, “Prepare for the worst”, “Better than nothing” など）は，本研究で示したように数理モデルに翻訳した解釈が可能であり，定量的考察によって理解をより深めることができる．今後，ベイズ決定方式による意思決定モデル[2]とあわせて，地震災害時の「情報〜被害推定〜行動」に関する数理モデルを構築し，即時対応への有効活用を目指して行きたい．

**【参考文献】**　1) Ang, A. H-S and Tang, W. H.（伊藤學・亀田弘行共訳）：土木・建築のための確率・統計の基礎，丸善，1977.　2) 能島暢呂・杉戸真太：地震時緊急対応における意思決定プロセスのモデル化とその最適化，第 25 回地震工学研究発表会講演論文集，1999.7，pp.1025–1028.　3) 能島暢呂：被害発生率のベイズ推定に基づくシステム信頼性解析，第 48 回土木学会中国支部研究発表会，1996.5，I-35.　4) 三根久・河合一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982, pp.70–89.　5) 佐々淳行：完本　危機管理のノウハウ，PART 1　信頼されるリーダーの条件，文藝春秋，pp.15–180.