

多面的思考力の向上を目指した教材の開発と実践

佐橋杏奈¹, 橋爪亜美¹, 菱川洋介²

本研究では、「ガモフの宝さがし」と呼ばれる問題の改題について研究し、教材化を試みた。この問題は、中学校数学で学ぶ相似、高等学校数学で学ぶベクトルや複素数平面、大学数学で学ぶ行列などの知識を用いて解決することのできる内容である。本教材の実践を通して、大学生の多面的思考力の向上と、学んだ知識を統合・発展的に捉え直して考えようとする姿の育成を目指す。本論文では、教材開発、授業実践の内容、及び実践結果の考察について述べる。

<キーワード>多面的思考力, 批判的思考, 統合・発展

1. はじめに

本研究の目的は、多面的思考力を向上することのできる教材の開発である。多面的思考力は、未知の問題に対して試行錯誤しながら解決しようとしたり、自ら導いた結論が本当に正しいかどうか判断したり、他により良い解決手段はないか模索したりするために必要な力の1つである。特に、学習過程においては、学習内容を統合・発展的に捉え直すことで、その定着と深化を図る意味でも重要な力の1つである。

本研究の背景を、2つ述べる。1つ目は、大学生の論理的思考力の低下に対する懸念である。大学入試を乗り越えてきた学生は、様々な問題を解いてきた経験がある。しかし、計算はできるが証明する力は乏しかったり、自らの解答に自信が持てず、解答例を見て正しいかどうかを判断したりする姿が散見される。実際、著者が担当する大学1年生の講義では、微分法や積分法の計算問題の正答率が高いが、証明等の記述問題の正答率は著しく減少する傾向にある。また、計算問題の正答例を求められることがしばしばあり、自身の計算が正答であるか否かを自ら判断できない姿が散見される。

2つ目は、教師を目指す学生にとって、多面的思考力は必要な資質・能力の1つと捉える

からである。数学の学習活動において、自らの導き出した解答や考え方を省察することで、より良い方法を模索したり、既習内容と相对比较したりするなどして、統合・発展的に学習内容を体系化していくことは重要な視点である。また、平成29年に告示された学習指導要領解説 ([6]) においては、D データの活用領域で批判的に考察する力や姿の重要性が記述されている。これらの学習内容及び活動を教師が実現していくためには、教師自身が数学的な考え方をを用いて学習を捉え、表現できることが必要不可欠である。

以上の背景より、多様な方法で問題解決する活動を通して、多面的に思考する良さを体感するとともにその力を高められること、及び学んだ知識を統合・発展的に捉え直して考えようとする姿の実現を目指した。

2. 教材研究

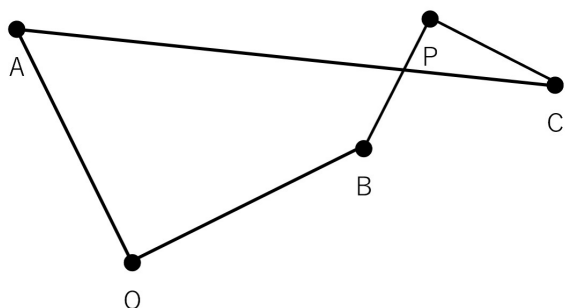
本教材では、「ガモフの宝さがし」 ([3]) と呼ばれる問題の改題を扱う。この問題は、三角形の相似、ベクトル、複素数平面などの知識を活用して解決できる問題としてよく知られている ([5], [7])。よって、この問題の解決を通して、中学校数学から大学数学までの幅広い知識が活用できるとともに、既習内容を統合・発展的に捉え直すことができると考える。

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

2.1. 場面の設定と問題

場面の設定と問題について述べる。以下の図のように、平面上に点 O と点 P があり、手順に従って距離 d を与える。



(手順)

- ①点 A を 1 つ定める。
- ②点 A を、点 O を中心として時計回りに 90° 回転させる。その点を B とする。
- ③点 B を、点 P を中心として反時計回りに 90° 回転させる。その点を C とする。
- ④線分 AC の長さを d とする。

この場面において、以下の問題を考える。

問題 距離 d の値は点 A の定め方によって変化するか。

この問題に対して、次節では以下の命題が成り立つことを示していく。

命題 1. 距離 d の値は、点 A の定める位置に依らず一意的に定まり、その値は点 O から点 P までの距離の $\sqrt{2}$ 倍である。

2.2. 命題 1 の証明について

本節では、命題 1 を以下の 4 種類の方法で証明する。

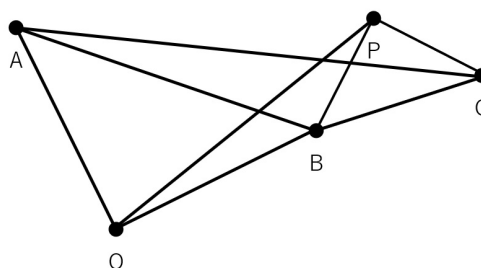
- (1) 三角形の相似による解法
- (2) ベクトルによる解法
- (3) 行列（線形変換）による解法
- (4) 複素数による解法

なお、他にも 2 直線が垂直に交わる条件を用いた 1 次関数による解法が考えられるが、(2) と同様と考え、ここでは触れないこととする。

以下、2 次元平面上 \mathbb{R}^2 で問題を扱う。ゆえに、(1) から (4) において、点 O の座標を $(0, 0)$ 、点 P の座標を (p_1, p_2) 、点 A の座標を (a_1, a_2) 、点 B の座標を (b_1, b_2) 、点 C の座標を (c_1, c_2) と定める。

(1) 三角形の相似による解法

この方法は、各点の座標を設定することなく、証明できる方法である。以下の図のように、線分 AB , BC , OP の補助線を引く。



(証明) $\triangle ABC$ と $\triangle OBP$ が相似であることを示す。 $\angle OBA = \angle PBC = 45^\circ$ であることと $\angle ABP$ が共通であることから、 $\angle ABC = \angle OBP$ となる。また、直角二等辺三角形であることから、 $OB:AB=BP:BC=1:\sqrt{2}$ である。以上より、 $\triangle ABC$ と $\triangle OBP$ が相似である。

このことから、 $AC = \sqrt{2}OP$ が示される。なお、点 B が線分 OP 上にあるように点 A を定めた場合は、直角二等辺三角形の辺の長さの比から直ちに示されることに注意しておく。□

(2) ベクトルによる解法

命題 1 を示すために、次の補題を準備する。

補題 1. \mathbb{R}^2 上において、点 O の座標を $(0, 0)$ 、点 A の座標を (a_1, a_2) とし、ベクトル \vec{OA} を考える。このとき、点 O を中心として $\pi/2$ 回転させたベクトルは、 $(-a_2, a_1)$ となる。また、点 O を中心として $-\pi/2$ 回転させたベクトルは、 $(a_2, -a_1)$ となる。

以下、命題 1 の証明を述べる。

(証明) \vec{AC} の成分が、点 A の座標に依らないことを示す。点 B は点 A を点 O を中心として

$-\pi/2$ 回転させた点である。よって、補題 1 より、点 B の座標は $(a_2, -a_1)$ となる。また、

$$\vec{PB} = (a_2 - p_1, -a_1 - p_2)$$

が得られる。点 C は点 B を点 P を中心として $\pi/2$ 回転させると得られる。このことから、補題 1 と \vec{PB} の成分表示を用いることで、

$$(c_1, c_2) = (a_1 + p_2 + p_1, a_2 - p_1 + p_2)$$

が得られる。

ゆえに、 $\vec{AC} = (p_1 + p_2, -p_1 + p_2)$ となり、点 A の座標に依らないことがわかる。さらに、

$$|\vec{AC}|^2 = 2(p_1^2 + p_2^2)$$

となり、命題が示された。□

(3) 行列（線形変換）による解法

一般的に知られている \mathbb{R}^2 上で原点を中心として角度 θ 回転させる線形変換は、次のように与えられる。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対し、

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

(証明) $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = {}^t(c_1, c_2)$ とする。点 B は点 A を点 O を中心として $-\pi/2$ 回転させた点である。よって、

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

となる。また、点 C は点 B を点 P を中心として $\pi/2$ 回転して定まることから、

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 - p_1 \\ b_2 - p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + p_2 + p_1 \\ a_2 - p_1 + p_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。

以上のことから、

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ -p_1 + p_2 \end{pmatrix}$$

となり、(2) と同様に示される。□

(4) 複素数による解法

まず、 \mathbb{R}^2 の座標を複素平面上の点と同一視し、以下のように表し直す。但し、 i は虚数単位を表す。

$$A(a_1, a_2) \Leftrightarrow \alpha = a_1 + ia_2$$

$$B(b_1, b_2) \Leftrightarrow \beta = b_1 + ib_2$$

$$C(c_1, c_2) \Leftrightarrow \gamma = c_1 + ic_2$$

$$P(p_1, p_2) \Leftrightarrow \rho = p_1 + ip_2$$

複素平面上の平行移動は、複素数の加法によって表現される。また、原点を中心とする回転移動は、複素数の極座標表示と乗法によって表現される。このことを用いて、命題 1 を証明する。

(証明) 点 B は点 A を点 O を中心として $-\pi/2$ 回転させた点である。よって、

$$\beta = e^{-i\frac{\pi}{2}} \alpha = a_2 - ia_1$$

となる。また、点 C は点 B を点 P を中心として $\pi/2$ 回転して定まることから、

$$\begin{aligned} \beta - \rho &= (a_2 - p_1) + i(-a_1 - p_2) \\ \gamma &= e^{i\frac{\pi}{2}}(\beta - \rho) + \rho \\ &= \{(a_1 + p_1 + p_2) + i(a_2 - p_1 + p_2)\} \end{aligned}$$

となる。

以上のことから、

$$\gamma - \alpha = (p_1 + p_2) + i(-p_1 + p_2)$$

となるので、(2) と同様に示される。□

2.3. 場面の一般化

本節では、2.1 で設定した問題の一般化について考察する。具体的には、条件を変えた問題が、命題 1 のような性質を保存するか否かを考察する。本研究で考察した観点は、以下の 3 点である。

- (1) 回転する角度を変える
- (2) 移動する回数を増やす
- (3) 移動する距離の割合を変える

以下、それぞれの観点について、考察した内容について詳しく述べる。□

(1) 回転する角度を変える

$-\pi < \theta_1, \theta_2 < \pi$ とし、以下のように問題の手順を一般化する。

- ①点 A を定める。
- ②点 A を、点 O を中心として θ_1 回転させる。その点を B とする。
- ③点 B を、点 P を中心として θ_2 回転させる。その点を C とする。
- ④線分 AC の長さを d とする。

例えば、2.2(4) の複素数による解法を用いて考察すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \beta &= e^{i\theta_1} \alpha, \\ \gamma &= e^{i\theta_2}(\beta - \rho) + \rho = e^{i\theta_2}(e^{i\theta_1} \alpha - \rho) + \rho \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \alpha + (1 - e^{i\theta_2})\rho, \quad (2.1) \\ \gamma - \alpha &= (e^{i(\theta_1+\theta_2)} - 1)\alpha + (1 - e^{i\theta_2})\rho. \end{aligned}$$

このことから、 $\theta_1 + \theta_2 = 0$ のとき、距離 d は点 A に依らないことが分かる。それ以外の場合は、 \overrightarrow{AC} は点 A の定め方に依って変化する。

(2) 移動する回数を増やす

(1) の④を、以下のように変える。

- ④点 Q がある。点 C を、点 Q を中心として θ_3 回転 ($-\pi < \theta_3 < \pi$) させ、その点を D とする。線分 AD の距離を d とする。

複素数による解法を用いて考察する。点 Q 及び D を表す複素数を、それぞれ ξ, δ とする。このとき、(2.1) より、

$$\begin{aligned} \delta &= e^{i\theta_3}(\gamma - \xi) + \xi \\ &= e^{i\theta_3} \{ e^{i(\theta_1+\theta_2)} \alpha + (1 - e^{i\theta_2})\rho - \xi \} + \xi \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \alpha + (e^{i\theta_3} - e^{i(\theta_2+\theta_3)})\rho + (1 - e^{i\theta_3})\xi \end{aligned}$$

となる。よって、距離 d は、

$$\begin{aligned} \delta - \alpha &= (e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} - 1)\alpha \\ &\quad + (e^{i\theta_3} - e^{i(\theta_2+\theta_3)})\rho + (1 - e^{i\theta_3})\xi \end{aligned}$$

によって与えられる。ゆえに、 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi k$ ($k = -1, 0, 1$) のとき、距離 d は点 A に依らないことが分かる。

移動回数を一般化しても同様の結果が得られるため、省略する。

(3) 移動する距離の割合を変える

a, b を正の実数とする。(1) の②と③の設定を、以下のように拡張する。

- ②点 A を、点 O を中心として θ_1 回転させる。その点を A' とし、B を $\overrightarrow{OB} = a\overrightarrow{OA'}$ を満たす点とする。

- ③点 B を、点 P を中心として θ_2 回転させる。その点を B' とし、C を $\overrightarrow{PC} = b\overrightarrow{PB'}$ を満たす点とする。

複素数による解法を用いると、

$$\begin{aligned} \beta &= ae^{i\theta_1} \alpha, \\ \gamma &= be^{i\theta_2}(\beta - \rho) + \rho \\ &= abe^{i(\theta_1+\theta_2)} \alpha + (1 - be^{i\theta_2})\rho, \\ \gamma - \alpha &= (abe^{i(\theta_1+\theta_2)} - 1)\alpha + (1 - be^{i\theta_2})\rho \end{aligned}$$

となる。このことから、 $\theta_1 + \theta_2 = 0$ かつ $ab = 1$ のとき、距離 d は点 A に依らないことが分かる。

3. 教材の実践について

教材の実践内容について述べる。実践の日時及び対象は以下の通りである。

日時：令和3年12月16日(木) 13:00~14:30

令和3年12月23日(木) 13:00~14:30

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座1年生
20名

3.1. 実践のねらい

本実践のねらいを、以下のように定めた。

(1) 問題を解決する活動と複数の解法に触れる場面を通して、それぞれの解法の良さを相対的に比較し、多面的に思考する良さを見いだすことができる。

(2) 問題の条件を変えて考察する活動を通して、演繹的に解決する有用性を見いだすことができる。

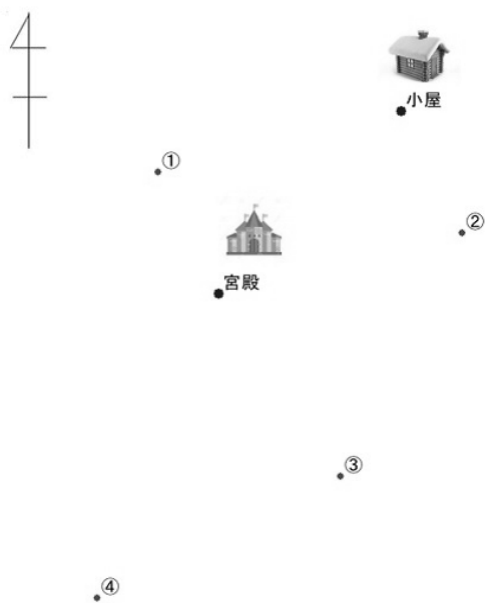
3.2. 実践で取り扱う問題について

2.1 で示した問題を、宝さがしの場面として取り扱う。

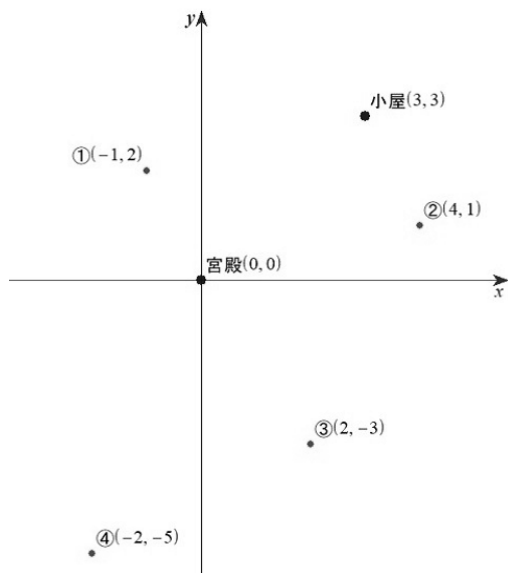
問題

このジャングルのある場所に宝を埋めた。まず、地点Aから宮殿に向かって歩き、左に90度回って、Aから宮殿までの距離と同じ距離を歩く。到達した地点をBとしよう。次に、地点Bから小屋に向かって歩き、右に90度回って、Bから小屋までの距離と同じ距離を歩く。到達した地点をCとしよう。地点Aから地点Cまでの距離をdとすると、宝は宮殿から真北に距離dのところ埋められている。

①～④のどれかが地点Aである。



また、追究の場面では、以下のように具体的な座標を与えて考察させる。



3.3. 実践の流れ

本実践の指導案については、参考資料1を参照されたい。

(1) 導入

まず、2.1で述べた問題場面を「宝さがしの問題」と称し、問題文と地図を載せたプリント（参考資料3-1）を配布する。ここでは、点Aの候補を4点挙げている。その選択を学生に委ねることで問題に取り組みやすくなることと、展開Iにおいて点Aの位置がどこでもよいことを帰納的に見通すことができるように工夫している。

プリントを配布後、グループ毎に点Aの候補から1点を選び、実際に測って距離を求めさせ、全体で交流させる。実際には、全てのグループの結果はおおよそ等しくなる。その事実に対する疑問を学生から引き出すことがねらいである。その後、以下の課題を提示する。

(課題) この手紙の謎について調べよう。

(2) 展開I

導入で見いだした疑問を具体的に解決していく。ここで、地図を2次元平面上に表現し直したプリント（参考資料3-2）を配布し、グループ追究を行う。

1つの方法で解決できたグループには、「他に謎はないだろうか」と問い、問題について深めさせるように机間指導で声掛けを行う。一方で、「他に解法がないか」と問わないことに注意する。その理由は、様々な問題を自ら設けて解決する過程で複数の解法を模索したり、全体交流の場で他の解法に触れ、自らの解法と相対的に比較したりすることが、本実践で大切にしたい学びだからである。

グループ追究後、全体で交流する。この場面を通して、多様な考え方に触れるとともに、解法を相対的に比較しながら、より良い考え方を思考する機会とする。

(3) 展開II

ここでは、展開Iで扱った問題を学生自らが発展させ、同じような結論が得られるか否かについて深めさせる。ここでは、2.3で述べた

ような一般化を各グループが設定して解決する活動を想定している。

グループ活動後は、設定した問題、解法、結論について全体交流を行う。その後、本時で学んだことをまとめさせる。

4. 実践結果の考察

実践前後の調査や実践時の学生の姿から、本実践のねらいについて考察していく。

4.1. 実践前後の調査結果について

実践前後に調査（参考資料 2）を実践対象（20人）に対して行った。その結果は以下の通りである。

(1) 実践前調査の結果

□(1)			
解けている	13	解けていない	7
		実数解のみ	2
		虚数解のみ	2
		解けない	3

□(2)			
極形式で表現している	3	解けていない	17
		$x=1$ のみ	13
		解けない	4

② 解法の個数		方法の内訳	
1個	12	2次関数	5
2個	6	円と直線の関係	16
3個	1	相加相乗平均	2
4個	1	三角関数	6
		ベクトル	0
		方程式	2

(2) 実践後調査の結果

① 解法の内訳	
極形式を用いる	14
因数分解	5
無回答	1

② 解法の個数		方法の内訳	
1個	4	2次関数	9
2個	14	円と直線の関係	20
3個	1	相加相乗平均	2
4個	0	三角関数	7
5個	1	ベクトル	1
		方程式	1

(1) と (2) の大問 2 について、導き出した解法の個数の平均に関する有意水準 1% の片側 t 検定を行った。その結果、 p 値：0.0043 (< 0.01) となり、有意水準 1% で実践前と実践後の結果に有意差があることが分かった。

4.2. 学生の姿

実践中の学生の姿について、(1) 導入、(2) 展開 I、(3) 展開 II、(4) 実践後のアンケート調査の 4 場面に分けて述べる。

(1) 導入

問題を提示した後、地点 A の候補となる 4 点のどれか 1 つを各グループに選んでもらい、プリントの図を使って実際に宝までの距離を測らせた。実際に作図したことによる誤差は $\pm 1\text{mm}$ 程度であった。グループによっては選んだ点以外の点からも作図して距離を測っており、どの点から測っても同じ距離が出るのではないかということ予想していた。

各グループの測った距離を交流し、どの 4 点から測っても同じ距離になることを確認した。学生は「え、どうして？」のように呟きながら、その事実を疑問に感じていたようである。その上で、課題を提示した。

(2) 展開 I

グループ追究では方法を指定しなかったため、個人追究の後にグループ内で交流したり、初めから相談しながら解決したり等、様々であった。6 グループが取り組んだ解法の内訳は、以下の通りである。

- 三角形の相似…1 グループ
- ベクトル…5 グループ
- 三角関数…1 グループ
- 行列…1 グループ
- 複素数…1 グループ

(グループ数は延べ数)

個人追究の時間を設けたグループでは、様々なアイデアを持ち寄って議論していたことから、複数の解法を見いだすことができていた。また、相談しながら解決するグループは、手

順を丁寧に整理しながら根拠を明らかにして解決しようとする姿が見られた。

全体交流の場面では、自らのグループの解法を説明するだけでなく、解決の方針や根拠を分かりやすく伝えようとする姿が全てのグループで見られた。中には、他のグループの発表を受け、自らのグループの主張を相対的に比較し、共通点や相違点を明示するグループもあった。また、発表を聞きながら、「そんな考え方もあるのか」や「なるほど」のような驚嘆や納得の反応が多く見られた。

(3) 展開Ⅱ

展開Ⅰの発表後、条件を変えても同じような性質を満たすかどうかを問い、グループ追究の時間を設けた。考察した内容の内訳は以下の通りである。

- 回転角度を変える…3グループ
- 移動回数を増やす…1グループ
- 移動する距離の割合を変える…2グループ

各グループの考察場面においては、数値を変更して帰納的に考察する姿だけでなく、回転する角度を θ と置いたり、移動する距離の割合を a と置いたりして、演繹的に解決しようとする姿があった。そして、演繹的に解決することで、展開Ⅰでは見いだせなかった性質をまとめているグループが散見された。具体的には、2.3で論じた内容である。また、小屋の位置を一般化して考察することで、導入に提示した問題の特徴を見いだす姿や、一般化しすぎて問題が複雑になり、時間内に考察しきれなかった姿もあった。

なお、展開Ⅰ及びⅡの追究時間が予定より長引いたため、終末の全体交流を省略した。

4.3. 実践後のアンケート調査について

実践後にアンケート調査（参考資料2）を行った。その内容を整理した結果、以下のよう到大別できた。

(1) 多様な考え方で解決する良さを体感できた記述…17人

(2) 条件を変えたり一般化したりして問題を捉え直し、演繹的に解決する良さを体感できた記述…10人

以下、具体的な記述を一部抜粋して記載する。

(1) について

- ・1つの問題に対して、複素数平面や行列など様々な方向から考えることができる。
- ・1つの問題でも考え方が沢山あって、交流して、それを知った時に面白いと思えることを久しぶりに感じれました。
- ・1つの問題を解くのに様々な解き方があって、それぞれの解き方で答えに近づいていくことができるのが面白いと思った。
- ・1つの問題でも多くのアプローチがあり、グループでも違ったので色々学びがあった。
- ・同じ問題に対しても色々なアプローチの仕方があることを学んだ。何通りも考え方があって答えが定まっていない問題は考えていて楽しいことが分かった。

(2) について

- ・一般化することを意識したことがあまり無かったので、新たな発見をした。
- ・どこかで一度、これまでの学習に立ち返ることで、当時以上の知識の応用や派生ができる。
- ・直接、最終的な結果を出そうとするのではなく、何か1つ変えてみたり、この点、条件を掘り下げようといった切り口にすることで考えやすく（問題を捉えやすく）なる。
- ・1つの疑問に対して、色々な視点から条件を変えることで、結論は似ていても、色々な近付き方ができることが分かった。

その他に、グループ追究や全体交流による学習効果の向上に関する記述があった。

- ・グループワークを行うことで一人ではできなくても多数が集まれば解くことができたり、分からないことが分かるようになることを学んだ。
- ・複数人だと効率が上がるだけでなく、自分が考えもしなかった発想や見落とししていた点などを知ることができ、一人の時よりも格段に課題を進めれた。

・1つの問いに対しても、考え方は無限大にあるのだということを、他の班の発表を聞いて学んだ。

4.4. 本実践のねらいに対する考察

4.1 から 4.3 で示した結果を踏まえ、本実践のねらいに対する達成度について述べる。

(1) 問題を解決する活動と複数の解法に触れる場面を通して、それぞれの解法の良さを相対的に比較し、多面的に思考する良さを見いだすことができる。

このねらいについて、達成できたと考える。その理由について述べる。

4.3 で示したアンケート調査において、1つの問題に対して様々な方法で解決することに楽しさや面白さを感じた記述が 20 人中 17 人を占めていた。学生の具体的な記述からも、その内容が読み取れた。

また、4.2 の学生の姿からは、グループ活動や全体交流の場で、自分では思いつかなかったアイデアに触れて驚嘆や納得の反応があったことが挙げられる。特に、グループ活動では、「その解法の方がわかりやすいね」「こうするともっとわかりやすいのでは」のように複数の解法を相対的に比較し、省察する姿が見られた。

さらに、本実践を通して、4.1 で示した実践前後の調査の大問 2 における解法の個数の平均の差に有意差が認められたことから、多様な方法で解決しようとする姿の実現にも繋がったと考えられる。

以上のことから、多面的に思考する良さを見いだせていたと判断した。

(2) 問題の条件を変えて考察する活動を通して、演繹的に解決する有用性を見いだすことができる。

このねらいについて、やや達成できたと考えられる。その理由について述べる。

4.2 の学生の姿から考察する。帰納的・類推的に推論立てた上で、一般化して演繹的に解決しようとする学生の姿が見られた。また、一般化して問題解決したことで新たな性質を発

見できたことから、演繹的に解決する良さを体感できたと考える。一方で、一般化しすぎて計算や証明が複雑になり、時間内に解決できなかったグループもあったことは課題点として捉えている。これらのことは、4.3 のアンケート結果からも読み取れる。

また、4.1 の実践前後の調査結果では、高次方程式の解法として複素数（極形式）を用いようとする人数が増えたことから、複素数による解法の有用性を感じるとともに、それを活用しようとする姿の変容が表れたと考える。しかし、その人数が全体の 7 割であり、十分な結果が得られたとは考えられない。

4.5. 今後の課題について

今後の課題について、2点述べる。

1点目は、実践の時間配分である。具体的には、展開Ⅰ及びⅡにおける追究場面で想定を超える時間がかかり、展開Ⅱの全体交流ができなかった。そのため、ねらい(2)に対する学習が不十分となってしまった。授業の構成と時間配分について再考する必要があると考える。

2点目は、本教材のような問題を継続的に取り扱う必要性である。多面的思考力や論理的思考力の育成には、そのような力を働かせることのできる機会が継続的に必要であることを、実践のねらい(2)の考察を通して再認識できた。この点について、講義における発問や教材の工夫を継続的に行っていきたいと考える。

5. おわりに

本実践を通して、学生に対して多面的に思考する機会を与えられたことと、受講する学生が数学の楽しさを体感しながら問題解決してもらえたことが良かったと捉えている。また、問題を自ら一般化して捉え直して考察する数学的活動の良さを学生が体感できたことも、本実践の成果といえると考えられる。一方、多面的思考力の育成は、このような実践を継続する上に成り立つものであることが再確認できた。この力の育成は教員を養成する上でも重要であり、大学の講義の在り方について再考する機会としていきたい。

また、本実践は大学生を対象に実施したが、中学校数学3年生の学習单元である相似の利活用や、高等学校数学における発展的学習として取り扱える可能性がある。今後は、学習者の対象を広げ、実践及びその効果を検証したいと考えている。

最後に、本実践に協力いただいた岐阜大学教育学部数学教育講座1年生の皆様、本実践を行う上でご指導いただいた岐阜県教育委員会学校支援課の田中聡和先生、岐阜県立本巣松陽高等学校教諭の不破真之介先生に感謝の意を表す。

参考文献

- [1] 大島利雄 他, 数学B, 数研出版, 2013.
- [2] 大島利雄 他, 数学Ⅲ, 数研出版, 2013.
- [3] ジョージ・ガモフ (崎川範行 訳), 1, 2, 3... 無限大, 白揚社, 2004.
- [4] 相馬一彦 他, 数学の世界3, 大日本図書, 2021.
- [5] 中村好則, 「ガモフの宝探し」問題の改題の活用に関する考察, 岩手大学教育学部研究年報 **79**(2020), 1-21.
- [6] 文部科学省, 中学校学習指導要領解説数学編, 2018.
- [7] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説数学編, 2019.

参考資料1 学習指導案

1. 実践のねらい

- ・問題を解決する活動と複数の解法に触れる場面を通して、それぞれの解法の良さを相対的に比較し、多面的に思考する良さを見いだすことができる。
- ・問題の条件を変えて考察する活動を通して、演繹的に解決する有用性を見いだすことができる。

2. 本時の展開

過程	主な学習活動（◎発問、○予想される学生の反応）	指導・補助
<p>15分</p> <p>実践前調査問題を行う。</p> <p>導入</p> <p>20分</p> <p>問題を提示する。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>このジャングルのある場所に宝を埋めた。</p> <p>まず、地点Aから宮殿に向かって歩き、左に90度回って、Aから宮殿までの距離と同じ距離を歩く。到達した地点をBとしよう。次に、地点Bから小屋に向かって歩き、右に90度回って、Bから小屋までの距離と同じ距離を歩く。到達した地点をCとしよう。</p> <p>地点Aから地点Cまでの距離をdとすると、宝は宮殿から真北に距離dのところ埋められている。①～④のどれかが地点Aである。</p> </div> <p>プロジェクターの投影や配布プリントを用いて、全体で操作の確認を行う。</p> <p>◎①～④のどれか1点を、グループで決めましょう。</p> <p>◎では、実際に決めた点を始点として、距離dを測ってみましょう。皆さんに測ってもらった距離を発表してもらった後に、正解を発表します。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>宮殿から宝までの距離をそれぞれ求めよう。</p> </div> <p>グループに分かれて、宮殿から宝までの距離を確認する。定規や分度器、コンパスを使って、活動プリント①に直線や点を書き込んでいく。</p> <p>◎宝までの距離はいくつでしたか。</p> <p>○△cmでした。</p> <p>○あれ。みんなほとんど同じ距離なの？ どうして？</p> <p>○4か所とも正解の地点ってこと？</p> <p>○どうしてだろう。</p>	<p>指導・補助</p> <p>・「左に90度回る」「右に90度回る」という操作は間違えやすいので、全体で確認する。</p> <p>・全てのグループに求めた距離を発表してもらうことで、学生の疑問を引き出すだけでなく、この問題の仕組みに帰納的に気付くことを促す。</p>
<p>展開I</p> <p>60分</p>	<p>◎この手紙にはどうやら謎が隠されているみたいですね。その謎について調べてみましょう。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>この手紙の謎について調べよう。</p> </div>	

	<p>場面設定</p> <ul style="list-style-type: none"> ・座標平面上で考える。y軸の正の方向を北とする。 ・宮殿は原点 (0, 0), 小屋は (3, 3) である。 ・①～④の座標はそれぞれ① (-1, 2), ② (4, 1), ③ (2, -3), ④ (-2, -5) である。 <ul style="list-style-type: none"> ・グループごとに調べ方は自由である。 ・調べていくうちに気になることが増えたら, さらにそのことについて調べる。 ・調べた内容は, 活動後に発表してもらおう。1グループ発表時間は 5 分とする。発表資料を準備し, タブレット等で撮影して, 説明してもよいことを伝える。 <p><発表例></p> <p>○地点 A は①～④のどこでもよい。距離は常に 6 になる。</p> <p>○前のグループはベクトルで解決していたが, 私たちのグループは複素数を用いて解決した。</p> <p>発表後, 他のグループの発表を聞いたり見たりして, 感じたことをグループ内で議論してもらおう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・グループ活動時間内で, 個人で考える時間と意見をまとめる時間に分けてもよい。意見をまとめるときは一人の意見に偏らないように注意する。 ・教科書やタブレット等を用いて, 数学の知識に関する内容を調べてよいことを伝える。 ・追究が終わり, 時間が余っているグループがいた場合は, 「他に謎はないだろうか」などと問い, 問題について深めさせるように机間指導する。
<p>展開Ⅱ 60分</p>	<p>◎地点Aは①～④のどこでも良いことが分かりました。では, この手紙の条件を変えたり付け加えたりして, 同じようなことがいえるのか, 考えてみましょう。</p> <p><調べる内容の例></p> <ul style="list-style-type: none"> ・4か所以外でも同じ位置にたどり着くのか。 ・小屋はどの位置でもいいのか。 ・曲がり方を変えても同じことがいえるか。 ・曲がる回数を増やすとどうなるか。 ・Aの位置が1つになるときはどんなときか。 <ul style="list-style-type: none"> ・調べた内容は, 活動後に発表してもらおう。1グループ発表時間は 5 分とする。発表資料を準備し, タブレット等で撮影して, 説明してもよいことを伝える。 	<ul style="list-style-type: none"> ・着目する条件の例を挙げる。 ・問題が思いつかないグループがいた場合は, 他のグループに聞いてヒントをもらってもよいことを伝える。
<p>まとめ 10分 15分</p>	<p>◎今回の授業で学んだと思うことを書いて, グループで交流しましょう。</p> <p>実践後調査問題を行う。</p>	

参考資料2 実践前後調査問題, アンケート

実践前調査 15分 番号 _____

以下の問いに答えてください。

① (5分)

次の方程式の解を求められるところまで求めてください。但し, x は複素数を表します。

(1) $x^4 = 81$

(2) $x^5 = 1$

2 (10分)

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき, $x + y$ の最大値を求める方法を思いつくだけ挙げてください。

実践後調査 15分 番号 _____

以下の問いに答えてください。

□ (10分)

x を複素数とします。次の方程式の解を求めるために、どのような手順で解こうと考えるか、記してください。また、そのように考えた理由を説明してください。

(1) $x^6 = 1$

(手順)

(理由)

(2) $x^7 = 1$

(手順)

(理由)

2 (5分)

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき, $x + y$ の最大値を求める方法を思いつくだけ挙げてください。

アンケート

今回の授業を受けて、自分が学んだと思うことを自由に記述してください。

MATH HUNTERS

このジャングルのある場所に宝を埋めた。

まず、地点 A から宮殿に向かって歩き、左に 90 度回って、A から宮殿までの距離と同じ距離を歩く。到達した地点を B としよう。

次に、地点 B から小屋に向かって歩き、右に 90 度回って、B から小屋までの距離と同じ距離を歩く。到達した地点を C としよう。

地点 A から地点 C までの距離を d とすると、宝は宮殿から真北に距離 d のところに埋められている。

①～④のどれかが地点 A である。



①

②

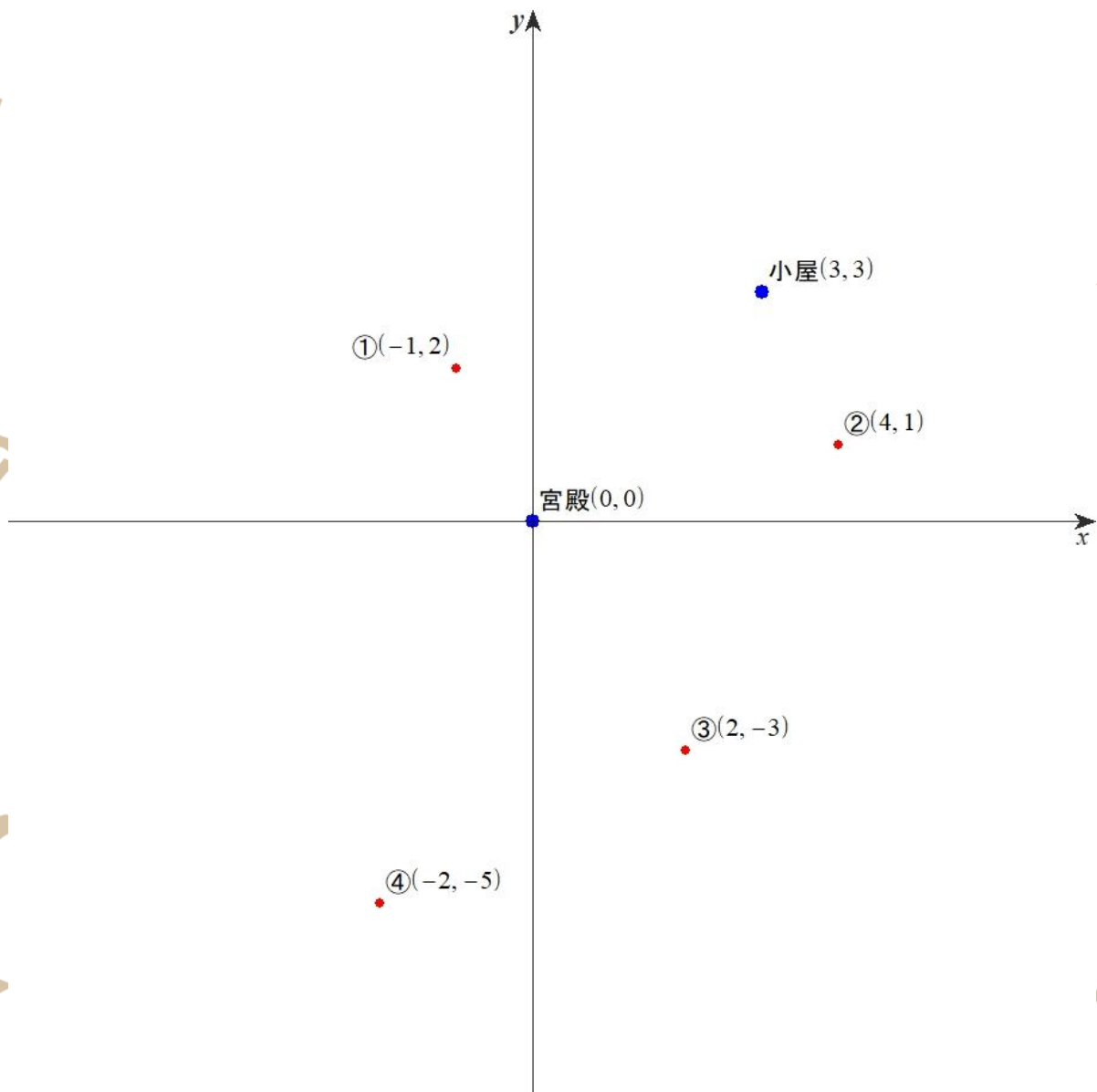
③

④



この手紙の謎について調べよう。

- 活動プリント①の場面を座標平面上で考える。y軸の正の方向を北とする。
- 宮殿の位置は原点(0, 0), 小屋の位置は(3, 3)である。
- ①~④の座標はそれぞれ
①(-1, 2), ②(4, 1), ③(2, -3), ④(-2, -5)である。



(自由にってください)

