

## 児童生徒の豊かな発想力を育成するための授業の開発

永田英之<sup>1</sup>, 菱川洋介<sup>2</sup>, 各務至<sup>3</sup>, 菊池一人<sup>4</sup>, 淀川雅夫<sup>3</sup>,

予測困難なこれからの社会を生きていく児童生徒にとって、豊かな発想力は重要な生きる力の1つであると考え。本研究ではそのような力の育成に向け、身近な場面から疑問や問題と感じたことを、学習した内容を生かし、自己もしくは他者と協働して解決する姿を目指した授業を開発し、実践を行った。本論文では、教材開発、授業実践の内容、及び実践結果の考察について述べる。

<キーワード>生きる力, 教科等横断的, PDCA サイクル

### 1. はじめに

本研究では、児童生徒の豊かな発想力の育成に、身近な場面から疑問や問題を見出すことと、学習した内容を活用し、自己もしくは他者と協働して解決する活動を取り入れた授業が有用であると考え、授業開発及び実践を行った。本授業の実践を通して、児童生徒が多様な考え方や多くの知識を身に付け、自由な発想で新たな問題を見出して解決し、新たな知識や経験を体得しようとする姿を目指す。

平成 29, 30 年に告示された学習指導要領 ([1] 等) によると、学校教育には「子供たちが様々な変化に積極的に向き合い、他者と協働して課題を解決していくこと」や、「様々な情報を見極め知識の概念的な理解を実現し情報を再構成するなどして新たな価値につなげていくこと」、「複雑な状況変化の中で目的を再構築することができるようにすること」が求められていると記している。その根拠には、社会のグローバル化や科学技術の革新が進み、社会構造や雇用環境が大きく、また急速に変化しており、予測困難な時代となっていることが挙げられている。

このことを踏まえ、これからの社会を創る児童生徒が「より良い社会とは何か」や「目指す社会の実現のために何をすべきか」と主体的に考え行動できるようにするために、豊

かな発想力の育成が必要不可欠であると我々は考えた。

本研究で育成する児童生徒の姿や力を、具体的に以下のように定めた。

- 日常生活で起こる様々な事柄に対して「なぜ、どうして」や「本当にそうなのか」と考えようとする姿
- 学習内容を活用して問題解決する力
- 自ら見出した疑問や問題を、粘り強く考えて解決する力

そして、このような姿や力の育成に向け、以下の3点を重視した授業について考えた。

- 身近な事象から児童生徒が疑問を感じることのできる導入
- 根拠を明らかにして順序立てて問題解決する活動
- 学習内容を広げたり深めたりする応用場面

身近な事象から児童生徒が「なぜ、どうして」と感じる導入を設けることで、問題や疑問を主体的に捉え、解決したいと考える姿を目指す。また、根拠を明らかにして順序立てて問題解決する活動を通して、見出した疑問や問題を粘り強く考えて解決する姿や力の育成を目指す。さらに、関連する疑問や問題を児童生徒が自発的に考え、学習内容を活用して解決

<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部

<sup>3</sup>岐阜大学教育学部附属小中学校

<sup>4</sup>岐阜県大垣市立興文中学校

する応用場面を設けることで、学習内容の有用性を実感するとともに、児童生徒がPDCAサイクルを自発的に回そうとする姿を目指す。

## 2. 教材について

本研究では、パラボラアンテナや懐中電灯のリフレクター（先端部分）に用いられている回転放物面と呼ばれる形状に着目する題材を取り上げた。これらの道具を見たり使用したりすることは、児童生徒にとって身近な場面である。一方で、それらがなぜ回転放物面の形状であるのか、他の形状では駄目なのかということについて疑問視したことは少ないのではないかと捉えている。ゆえに、本研究で目指す授業の題材として適していると判断し、教材研究を進めた。なお、本教材は数学と理科の教科等横断的な題材である。

### 2.1. 教材研究の概要

二次曲線は高等学校数学で詳しく学習する内容である。しかし、二次曲線の性質がどのように活用されているのかを取り扱う場面は多くない。その背景を踏まえ、本研究では、二次曲線の性質が活用されている場面を題材に取り上げた。3次元実ユークリッド空間において、回転放物面（以下、放物面）は関数  $z = a(x^2 + y^2)$  (ただし、 $a \neq 0$ ) で与えられる。放物面の形状をした具体物は、次の物理的性質を持つ。

- 軸に対して平行に進んできた光は、放物面上で反射し、ある1点(焦点)を通る。
- 焦点から放物面上に放たれた光は、放物面上で反射し、軸に対して平行に進んでいく。

この性質は放物線特有の性質であり、事象を統合、数学化して証明することができる。一方、高等学校数学で学習する双曲線や楕円のような曲線では、成り立たない。詳細は、資料1を参照されたい。

### 2.2 教具について

本実践で扱った教具（反射板）の作成法を紹介する。

<使用する道具>

ダンボール、工作用紙、アルミテープ、

レーザーポインタ、カッター、のり  
関数描画ソフト

(手順1) まず、工作用紙を短冊状に切り、そこにアルミテープを貼り、光を反射する板を準備する。(資料2 写真1)

(手順2) 次に、関数描画ソフトを用いて、関数を入力する。なお、目盛りの密度を細かく設定して出力し、目の細かい方眼にしておくといよい。グラフを紙に印刷し、ダンボールに貼る。(資料2 写真2)

(手順3) 最後に、曲線に合わせてカッターで切れ込みを入れ、アルミテープを貼った工作用紙を差し込む。(資料2 写真3)

資料2 写真4のように、方眼の直線を目印にしてレーザーポインタで光を当て、反射する光の直線を観察することができる。

## 3. 授業の概要

2章で述べた教材を用いた授業の展開について述べる。なお、本授業は中学生と高校生を対象とした6時間構成の展開である。

### 3.1 授業のねらい

本研究で開発した授業のねらいは、以下の通りである。

- (a) 身近な場面から問題を見出し、学んだ知識を生かして解決することができる。
- (b) 相違性に着目して関連する新たな問題を見出し、自発的に解決しようとしている。

### 3.2 授業の構成

授業の構成について、展開に分けて述べる。なお、指導案と学習プリントについては、それぞれ資料3と資料4を参照されたい。

#### (1) 導入

身近な放物面（パラボラアンテナ、オリンピックの採火台の凹面鏡、懐中電灯のリフレクター）の写真を見せ、その形状に着目させる。「これらはなぜこのような形をしているのか。他の形ではいけないのか。」と問い、それぞれの用途から理由の見通しを持たせる。

その後、用語「回転放物面」を紹介する。具

体的に、放物線  $y = ax^2 (a \neq 0)$  を  $z$  軸で回転させた曲面と定義する。また、最初に示した写真に放物線が隠れていることをスライドで確認し、放物面の性質を知るために放物線についてどんな性質があるのか学習していくことを伝え、本時の課題を提示する。

放物線の性質について明らかにしよう

## (2) 展開 I

2.2 で示した教具を使って光の反射する様子を動画で見せ、気付いた点を全体で交流する。その際に、動画を複数回再生し、「軸に対して平行に進んできた光はすべて、 $y$  軸上のある 1 点を通っている」ことを全員で確認する。

次に、この現象を数学的に証明していくために、事象を数学化する。記号や場面の詳細は、資料 1 を参照されたい。なお、多くの記号を用いたり、場面が複雑であることから、現象とリンクさせながら手順を丁寧に説明する。その後、動画を見て気づいた点を数学の問題に置き換えて証明するために、以下の問題を提示する。

直線  $m$  は直線  $k: x = x_0$  に関係なく  $y$  軸上のある 1 点を通っているだろうか。

提示した後、「何を示せばいいのか」や「どのように示していけばいいのか」と問いかけ、解決の見通しを持たせる。

解決の見通しを立てたら、必要な知識として三角関数の定義と加法定理についてワークシートを使い学習する。ここでは三角関数の正接について扱う。角度  $\theta$  が鋭角と鈍角の場合に分けて導入するが、 $\tan\theta = (\text{傾き})$  であることと、 $\tan\theta$  と  $\tan(90^\circ - \theta)$  の関係が鋭角でも鈍角でも成り立つことを確認し、知識を統合する。また、正接に関する加法定理を紹介し、練習問題を解かせることで、定理の有用性を伝える。

必要な知識について言及した後、グループで解決する活動に移る。証明や計算が複雑であることから、考える放物線を  $y = x^2$  と簡略化した上で解決させる。ここで、微分法を習得していない場合は、傾きを授業者から与える。証明や計算が苦手だったり解決の見通し

が立っていない生徒のために、解決のステップを記したワークシートを準備する。一方、手順なしに自力で証明ができる生徒に対しては、チャレンジ問題として手順を記していないワークシートも用意する。活動を終えた段階で、全体で交流し、解決できていることを確認する。授業者から全体に「 $y$  軸上のある 1 点を通ると言ってもいいだろうか」と問い、数学的に得られた結果を事象の場面に戻すとともに、そう言い切れる根拠についても確認する。

展開 I の最後に「どんな放物線でも解決できているか」と問い、扱う関数を簡略化したことを振り返らせ、放物線  $y = ax^2$  についても同様に解決できるか確かめさせる。その後、導入で質問した「なぜパラボラアンテナや懐中電灯の先端は放物面なのか」について生徒の解答を全体で交流し、放物線の性質とパラボラアンテナ、懐中電灯の仕組みの詳細を紹介する。

## (3) 展開 II

放物線と形状の似た曲線として、双曲線と楕円を紹介する。この 2 つの曲線について、放物線と同様に反射した光がある 1 点に集まりそうかを問う。生徒が予想を立てたところで実験動画を見せ、1 点に集まりそうにないことを全体で確認する。

その後、双曲線と楕円の式を全体で紹介し、放物線の場合と同じように明らかにできるかどうか、グループ活動を行う。ここでも、傾きについては、生徒の習熟に応じて授業者から提示する。その後、全体で内容について交流し、放物線と同様の性質が成り立たないことと、その根拠を確認する。

最後に、展開 I と展開 II で明らかにしてきたことを踏まえ、見た目では判断が付きにくい 3 種類の曲線（放物線・双曲線・半円）の反射板を用意し、どれが放物線であるかを問い、学習内容を確認する。

## (4) 展開 III

様々な曲線についてパソコンを用いて自由に出力し、放物線の性質が他の曲線で成り立つ場合があるかどうかを実験から確認する活動を行う。前の活動と同じように反射板を作

成し、実際に光を当てて、反射の様子を確認する。確認を終えてから、全体で実験の結果をグループごとに交流をする。

#### (5) まとめ

今回扱った放物線以外の二次曲線、双曲線・半円の形状をしたものを紹介する。また、今後も日常生活で身近で見かける曲線や図形に対し、今回のようにどんな性質が活用されているのだろうかとか疑問を持ち、実際に証明や実験等を行おうとする姿を願い、本実践を終える。

### 4. 実践結果と考察

本教材の実践を以下のように行った。

日時：令和2年12月11日（金）120分

場所：岐阜大学教育学部 A棟426教室

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座4年生  
24人

本授業は中学生や高校生を対象として考案したが、諸事情により実践することができなかつたため、大学生に対する実践で代替した。また、今回の実践案は6時間を想定して作成したが、実践時間が120分であったため、3.2に記した(3)展開Ⅱの双曲線と楕円に関する問題解決は省いた。

#### 4.1 実践の様子

##### (1) 導入

放物面の紹介としてパラボラアンテナ・オリンピックの採火台の凹面鏡・懐中電灯のリフレクターの写真を見せたが、パラボラアンテナの写真には学生の反応が悪かった。しかし、この3種のものは似ている形状だということに気付いている学生は多かった。「これらはなぜこのような形をしているのか」を問いかけた後に、回転放物面の定義を紹介し、写真のものにも放物線が隠れていることを確認した。その後、課題として「放物線の性質を明らかにしよう。」を提示し、放物線にはどんな性質があるのか調べていくことを認識させ、展開1へと繋げた。

##### (2) 展開Ⅰ

まず放物線の性質を擬似的に行った実験動画を一度見せ、何か気付くことはないか問い

かけた。これには何も反応がなく、「もう一度動画を流すからどこかに着目して見よう」としてもう一度動画を見せた。そして学生が「軸上の1つの点を通っている」と発言をし、複数の学生がそのことに気付いていた。最後に「y軸上に着目して見よう」としてもう一度動画を見せ、全員が「y軸上のある1点を通っている」ことを確認できた。

次に場面設定として、動画で見せた物理現象を数学的に表現した。直線の名称で文字が多く出てくるのでワークシートに図を4つ載せ、現象とリンクさせながら1つ1つ説明をした。学生はワークシートやスライドを見ながら理解しているようであった。数学的に表現をした接線を引くや線対称の説明も頷きながら聞いていた。

ここで、問いとして「直線 $m$ は直線 $k: x = x_0$ に関係なく、y軸上のある1点を通るだろうか」を提示した。これを証明していく上で見通しをもたせるためにまず「何を示したらいいのか」を問いかけた。これに対して多くの学生が「直線 $m$ を求める」や「反射した直線 $m$ のy切片の値を求める」など見通しをもっていた。また、それに続けて「どのように示していけばいいのか」の問いかけに対して「直線の通る1点と傾きが分かれば、求められる」と直線の求め方も見通しをもっていたと感じた。

その後、証明に必要な正接・加法定理についての学習を行った。今回は大学生に対して行ったので、 $\theta$ の大きさに関わらず $\tan\theta =$  (傾き)であることは理解できている学生が多く、確認程度で進めた。時間の都合で $\tan\theta$ と $\tan(90^\circ - \theta)$ の関係についての学習は割愛した。正接・加法定理の練習問題もほとんどの学生ができていた。ここまでを証明の準備として、これらをもとにして個人で証明を行った。文字が多く計算が複雑になるため、 $a = 1$ の簡単な放物線から計算させた。

多くの学生は証明の手順の書いてあるワークシートに取り組んでいたが、一部の学生は手順の書いていないワークシートに取り組んでいた。ステップごとに学生の様子を記していく。

(ステップ1)

$\tan\theta$  はほとんどの学生が文字を使って表せていたが、 $\tan\alpha$  は表せていない学生が数人いた。その学生に対しては、前の黒板を用いて直角三角形を描き、 $\tan\theta$  と  $\tan(90^\circ - \theta)$  の関係について説明をした。

(ステップ2)

$\beta = 90^\circ - (\theta + \alpha)$  の関係について気付いている学生が多くいたが、これもまたステップ1と同じように  $\tan\{90^\circ - (\theta + \alpha)\} = \frac{1}{\tan(\theta + \alpha)}$  の変形や加法定理を活用できていない学生もいた。

(ステップ3)

$\alpha = \beta$  から  $\tan\alpha = \tan\beta$  を導いている学生は少なかった。ある程度時間がたってから、全体に向けてヒントとして、入射角と反射角が等しいことや反射した直線と元の直線は線対称であることを確認した。そこから  $\alpha = \beta$  の関係を導いている学生が増えていた。

(ステップ4)

ステップ3までできている学生は切片の値まで求められていた。直線  $m$  を求められた学生には、計算した結果、証明の結論がどうなるのか考えさせた。

計算を終えて、この問いの結論はどうなるのか問いかけると、「切片の値が定数になっているから  $y$  軸上のある1点を通る」と自らの計算をもとに答えていた。次にどんな放物線でも「直線  $m$  は直線  $k: x = x_0$  に関係なく、 $y$  軸上のある1点を通る」ことが言えるのか問いかけ、 $y = ax^2$  について同様に証明させた。多くの学生が1から計算するのではなく、前の計算結果をもとにして計算していた。問いの結論を問いかけると、「切片の値が定数になっているから  $y$  軸上のある1点を通る」「 $a$  の値によって通る点が変わるが、定数である」などと答えた。時間の都合で双曲線・楕円(円)についての証明は割愛した。

証明の結果をもとに導入での問いかけをもう一度問いかけ、放物線の性質・パラボラアンテナ・懐中電灯の仕組みを紹介した。

(3) 展開Ⅱ, 展開Ⅲ

用意しておいた3つの曲線に光を当てて反射する様子から放物線を見つける活動を行っ

た。時間の都合で3つの曲線の反射板はあらかじめ用意した。4つのグループに分かれ、曲線とレーザーポインターを配り、今日学習をした放物線の性質をもとに放物線を見つけさせた。見た目では区別がつかないように3種の曲線を似た形にしたが、多くの学生は光を当てる前に放物線がどれかは見当がついていたようだった。そのため、「見た目ではなく今日学習したことをもとに、根拠をもって放物線を見つけよう」と声を掛けた。どのグループも光の当て方に気をつけながら、 $y$  軸上を通る光の位置に着目して反射の様子を観察していた。あるグループでは、光と  $y$  軸との交点をペンで指しながら、光を動かすと共にその点が動くのかを確かめている姿が見られた。全体でどの曲線が放物線だったかを確認すると、 $y$  軸上のある1点を通ることからどのグループも放物線を当てていた。

次に、グループごとに様々な曲線について反射の様子を観察する活動を行った。関数描画ソフトを用いて自由に曲線を出力したものに光を当てて反射の様子を確認した。1つのグループは  $a$  の値を小さく設定した放物線を出力していた。一見放物線には見えないが性質が成り立つのかどうか疑問に持ち、これを出力したと言っていた。他のグループでは  $y = \cos x$  を出力していた。放物線に似ている曲線だからという理由が多かった。他にも、 $y = x^3$ 、 $y = x^4$  などどうなるのだろうかに興味を持っているグループがあった。あるグループは「曲線の一部では反射した光が  $y$  軸上のある1点を通っているかもしれない」と言っていたため、「放物線の性質を証明したように、この曲線についても数学的に証明してみると明らかになるよ」と声を掛け、具体的な問題から数学に戻すサイクルができるように促した。

最後に4グループが作成した曲線を見せ、光が  $y$  軸上のある1点を通るかどうかについて全体で交流をした。

(4) まとめ

今回扱った放物線以外の二次曲線、双曲線・半円(楕円)が身近のどんなところで見かけるかを紹介し、これらや他の曲線・図形はどん

な性質があって活用させているのか、「今回のように実際に証明や実験を行ってほしい」とし、アンケートを書いてもらい、授業を終えた。

#### 4.2 アンケートの内容とその結果

本実践では授業後にアンケートを実施した。以下、アンケートの質問内容及び結果を示していく。質問に関しては、

1. 当てはまらない
2. やや当てはまらない
3. やや当てはまる
4. 当てはまる

の4つの選択肢を用意した。

(回答者数 24 人)

(1) 今回の授業を受けてみて、楽しいと感じましたか。

回答 1, 0人 2, 0人 3, 4人 4, 20人

(2) 実際に計算したり、実験することで、今日の学習内容の理解が深まりましたか。

回答 1, 0人 2, 0人 3, 3人 4, 21人

(3) 数学が日常のどんな場面で利用させているのか、もっと調べたり考えたりしたいと感じましたか。それはどんなことですか。

回答 1, 1人 2, 1人 3, 8人 4, 14人  
回答例

- ・スポーツに関すること
- ・建築物との関わり
- ・放物面をもっと探してみたい
- ・放物線は他にどのように利用されているか

(4) その他、感想・ご意見等を記入してください。

回答例

- ・光が焦点に集まることを実際に体験できて面白かった。
- ・身近なものや数学との関連について実感することができた。
- ・焦点を通ることが理解できてもイメージが浮かばなかったため、動画や実際に確かめることができ良かったです。

#### 4.3 ねらいの達成度と課題について

3.1で記した授業のねらいに関する達成度と改善に向けた課題について、4.1と4.2の内容をもとに考察する。

ねらい(a)について

このねらいはやや達成できたと考える。その理由を、学生の反応とワークシートをもとに述べる。

まず、身近な場面から問題を見出すことについては、実際に動画を見せたことで、学生が放物線の性質を発見し、問題を見出すことができていた。一方、時間の都合上、展開Iの事象を数学化する部分をスライドで説明したため、問題を数学化する部分では不十分だったといえる。丁寧に説明したことから学生の理解は良かったものの、学生と共に問題を数学化した方が、学生にとって見出した問題の場面と数学的解決をより強く結びつけられたのではないかと考える。

展開Iの問題解決場面では、直線の傾きと三角関数の関係を表すことができるものの、ステップに沿って解決することが困難と感じている姿が多かった。そのため、授業者から話し合っ解決してもよいことを伝えると、ほとんどの学生が周りの学生と話し合っ取り組んでいた。結果として、ほとんどの学生が他者と相談しながら解決できていたことが、学生の姿やワークシートから読み取れた。その後、 $y = ax^2$ でも同様に証明をさせた時には、ほとんどの学生が $a = 1$ の計算結果をもとにして直線 $m$ の式まで求められていた。

課題を2つ述べる。1つ目は、展開Iの証明の手順をより細分化して取り組みやすくする必要があると考える。それにより、個人追っで自力解決する姿が増え、解決できたことに対する達成感を生徒に与えられるのではないかと考える。2つ目は、導入で生徒に放物線を作ってもらっ反射の様子を実験・観察する活動を取り入れることで、事象とその数学化が生徒の中でより強く結びつくのではないかと考える。グループごとに様々な放物線を作り、「どんな放物線でも焦点を必ず通る」ことを確認した方が、「なぜ、どうして」とより疑問を感じやすいのではないかと考える。

ねらい (b) について

このねらいは達成できたと考える。その理由を、活動の様子とアンケートの結果をもとに述べる。

まず、活動の様子から考察する。展開Ⅱ、展開Ⅲでは、グループの一人の子が光を当てただけでなく、「自分も光を当ててみたい」と実際に確かめようとする姿が見られた。どの曲線についても y 軸に着目して「ある 1 点を通るものは放物線」、「通らないものは放物線でない」と判断ができていた。また、グループ毎で様々な曲線について反射の様子を観察する活動では、各々が確認してみたいと思う曲線を挙げ、積極的に取り組んでいた。例えば、「この関数はどうかな」や「これは放物線に似ているけどどうかな」、「係数を大きくしたらもっと放物線に近くなる」などと、放物線と関連付けたり全く関係ない曲線について考えたりしていた。中には「なぜだろう」と自問し、放物線のときと同じように数学的に確認しようとする姿も見られた。

次に、アンケート項目 (2) 及び (3) の結果から考察する。質問 (2) について、肯定率が 100% であったことから、全員が実際に計算・実験することで学習内容の理解が深まったと回答している。数学的に証明するだけではなく、実験を通して自分の目で事象を確かめることで明らかにした内容の理解が深まり、新たな問題場面を見出して解決しようと発想する姿につながったと捉えている。また、(3) の質問について、3、4 を回答する学生が合わせて 22 人と、ほぼ全員が日常の場面で数学が利用させているのか調べたり、考えたりしたいと感じていると答えている。本実践を通して、日常生活に潜む疑問や問題に興味や関心を持ち、解決しようとする姿が実現できたのではないかと考える。

## 5. おわりに

本実践を終え、学習者が自由に発想し、学習の楽しさを感じながら主体的に活動する姿が実現できたと考えている。一方、考察で述べた課題について研究を継続し、本授業の改善や新たな教材開発に繋げ、本研究で目指す

児童生徒の姿の実現に向けて尽力していきたいと考える。

結びに、本授業の実践のために貴重な時間をご提供いただいた岐阜大学教育学部数学教育講座の学生の皆様、本実践に対して様々なご助言をいただいた岐阜県教育委員会学校支援課の竹中俊文先生、岐阜県立本巣松陽高等学校教諭の不破真之介先生に感謝の意を表す。

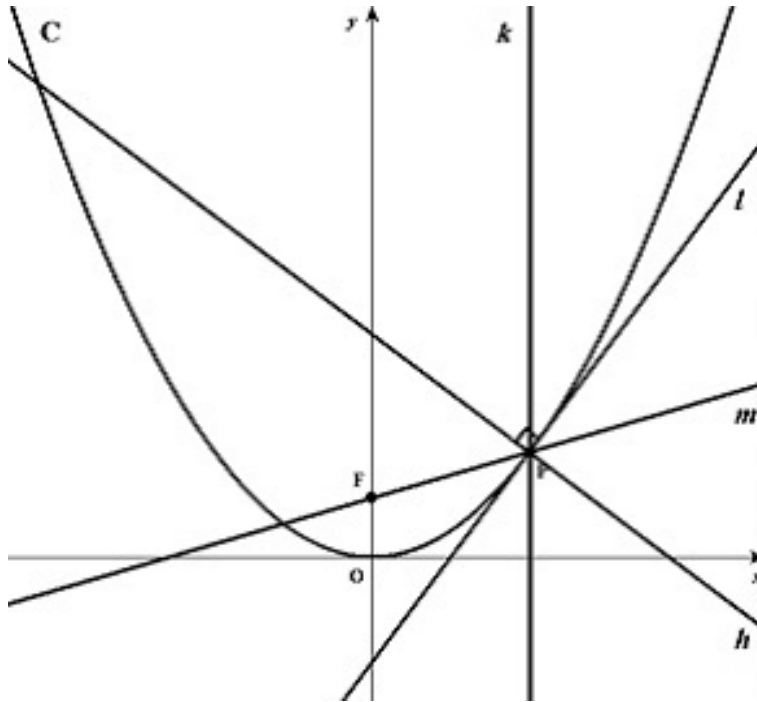
## 参考文献

- [1] 文部科学省、小学校学習指導要領解説 算数編、2018.
- [2] 文部科学省、中学校学習指導要領解説 数学編、2018.
- [3] 文部科学省、高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編、2019.
- [4] 文部科学省、中学校学習指導要領解説 総合的な学習の時間編、2018.
- [5] 文部科学省、高等学校学習指導要領解説 総合的な探究の時間編、2019.
- [6] 山本慎 入江幸右衛門他、最新 数学Ⅲ、数研出版、2011.
- [7] 相馬一彦 他、新版 数学の世界3、大日本図書、2016.

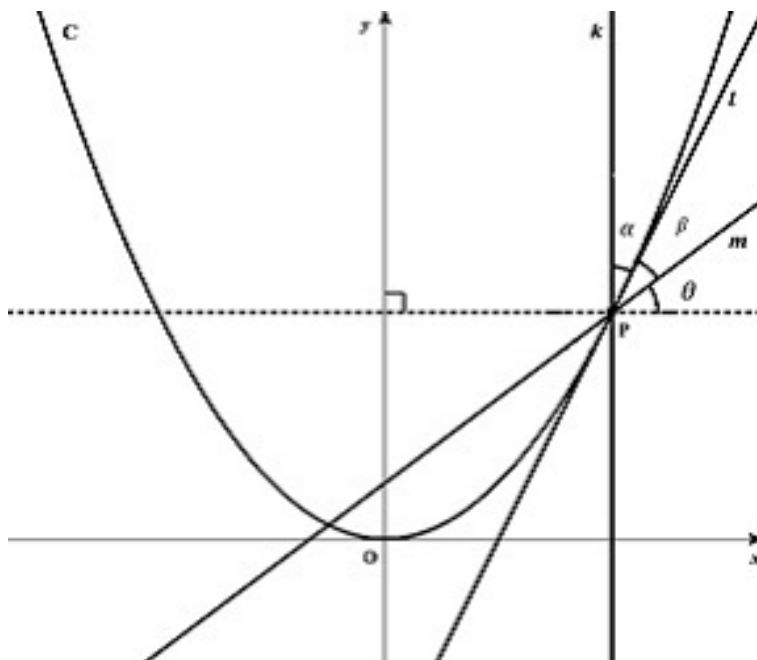
資料1 2.1 教材研究の詳細

(1) 放物線に関する以下の問いを考える。

問： $a > 0$ とする。放物線 $y = ax^2$ と直線 $k: x = x_0$ の交点を $P(x_0, ax_0^2)$ とする。 $C$ 上の点 $P$ に対する接線を $l$ とし、点 $P$ を通り直線 $l$ に対して垂直な直線を $h$ とする。直線 $h$ に対して、直線 $k$ に線対称な直線を $m$ とする。このとき、直線 $m$ の切片は $x_0$ の値に依存しないことを示せ。



(証明) 直線 $m$ を $y = cx + d$ とする。このとき、 $d$ が $x_0$ の値によらず一定であることを示す。 $x$ 軸と直線 $m$ のなす角を $\theta$ 、直線 $k$ と直線 $l$ のなす角を $\alpha$ 、直線 $m$ と直線 $l$ のなす角を $\beta$ と表す。





直線  $l$  の傾きが  $2ax_0$  であることから、定義より

$$\tan \theta = c, \quad \tan \alpha = \left( \tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)^{-1} = \frac{1}{2ax_0}$$

となる。さらに、 $\tan \beta$  は加法定理より

$$\tan \beta = \tan \left( \frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha) \right) = (\tan(\theta + \alpha))^{-1} = \frac{2ax_0 - c}{1 + 2acx_0}$$

となる。ここで、直線  $k$  と直線  $m$  は直線  $h$  について線対称であり、直線  $l$  は直線  $h$  の垂線であることから、 $\alpha = \beta$  である。それゆえに、

$$\frac{1}{2ax_0} = \frac{2ax_0 - c}{1 + 2acx_0}$$

となり、結果として、 $c = ax_0 - \frac{1}{4ax_0}$  を得る。最後に、直線  $m$  は点  $P$  を通ることから、 $d = \frac{1}{4a}$  が得られる。□

(2) 次に、(1) の問題が双曲線の場合には成り立たないことを示す。 $a > 0, b > 0$  とする。上記の問題における放物線を、以下の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

に置き換え、 $y > 0$  についてのみ考える。まず、直線  $m$  を  $y = cx + d$  とおく。また、 $y > 0$  より、双曲線の式は

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$$

と変形できる。この双曲線上の点  $P \left( x_0, \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 + a^2} \right)$  における接線  $l$  の傾きは  $\frac{bx_0}{a \sqrt{x_0^2 + a^2}}$  である

ことから、定義より

$$\tan \theta = c, \quad \tan \alpha = \frac{a \sqrt{x_0^2 + a^2}}{bx_0}$$

が得られる。さらに、加法定理によって

$$\tan \beta = (\tan(\theta + \alpha))^{-1} = \frac{bx_0 - ac \sqrt{x_0^2 + a^2}}{cbx_0 + a \sqrt{x_0^2 + a^2}}$$

と表される。 $\alpha = \beta$  であることから、直線  $m$  の傾き  $c$  は、

$$c = \frac{bx_0}{2a \sqrt{x_0^2 + a^2}} - \frac{a \sqrt{x_0^2 + a^2}}{2bx_0}$$

となる。よって、直線  $m$  の切片は、 $d = \frac{(a^2 + b^2)(x_0^2 + a^2) + (ab)^2}{2ab \sqrt{x_0^2 + a^2}}$  となる。

以上より、直線  $m$  の切片は、 $x_0$  の値に依存することが示された。□

(3) 最後に、(1)の問題が楕円の場合にも成り立たないことを紹介する。 $a > 0, b > 0$ とする。  
 (1)の問題における放物線を、以下の楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

に置き換え、 $y < 0$ についてのみ考える。(2)と同様に計算することで、直線  $m$  の方程式は、

$$y = \left( \frac{bx_0}{2a\sqrt{a^2 - x_0^2}} - \frac{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}{2bx_0} \right) x + \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - x_0^2) - (ab)^2}{2ab\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

となる。ゆえに、楕円の場合にも直線  $m$  の切片は  $x_0$  の値に依存する。

資料 2

写真 1

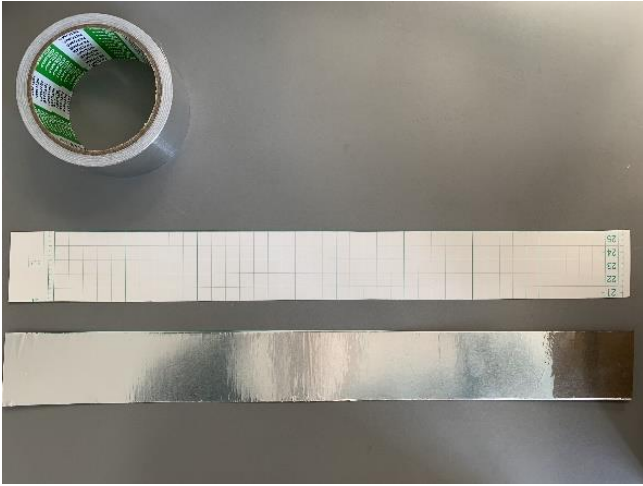


写真 2

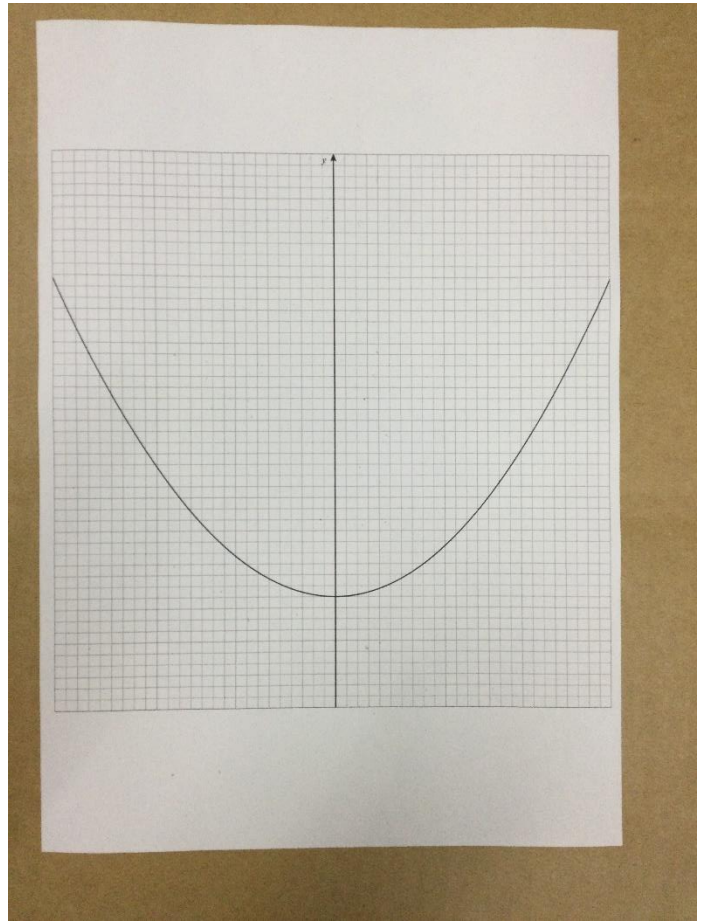


写真 3

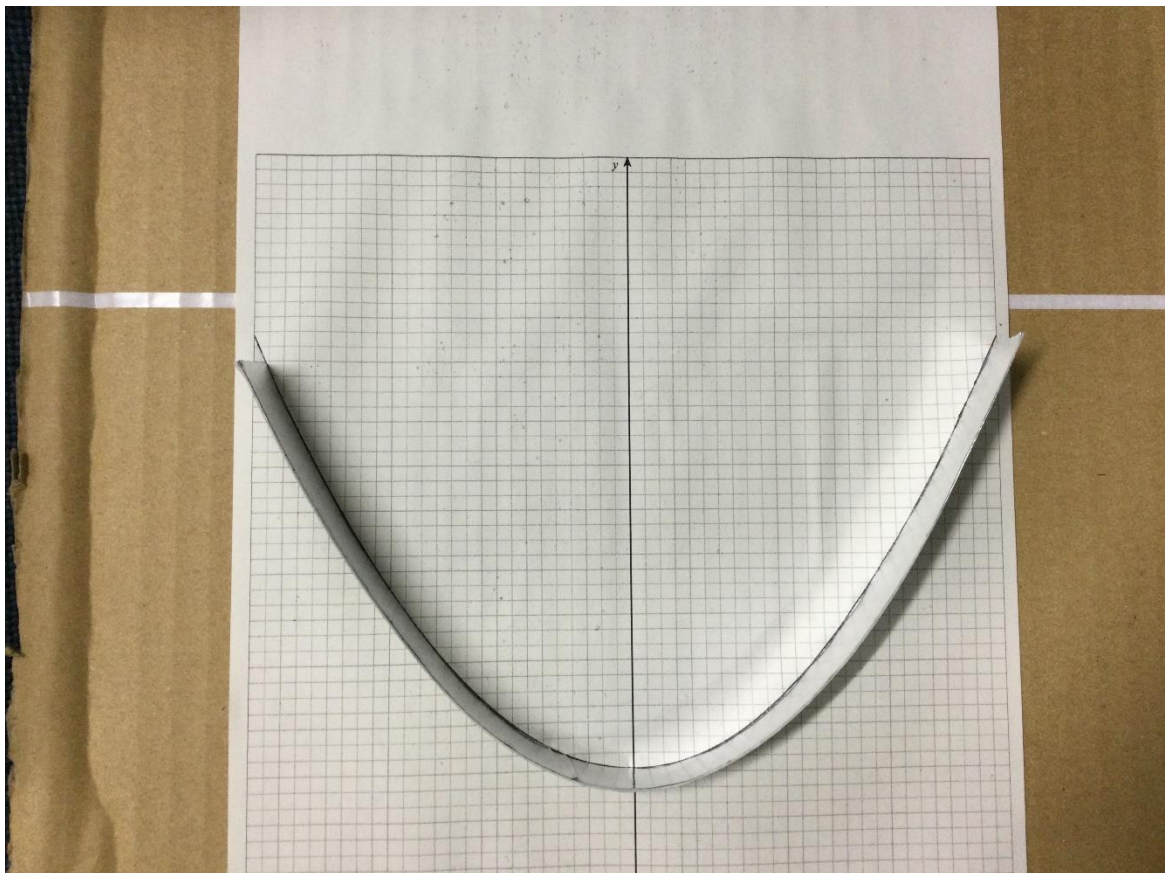


写真4

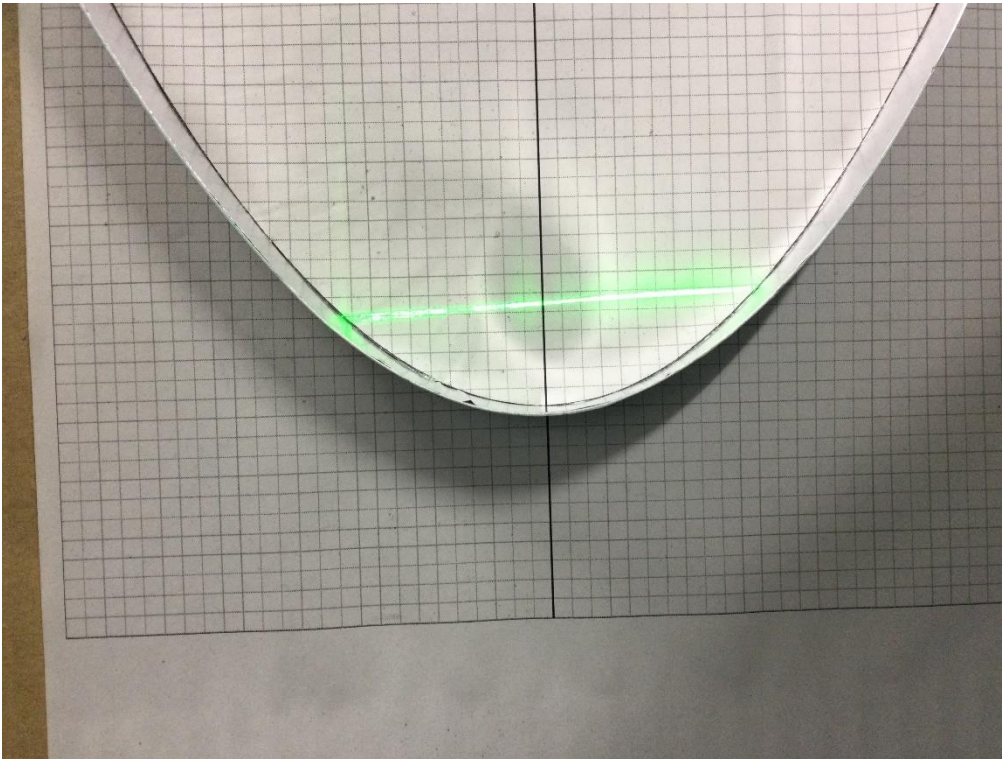
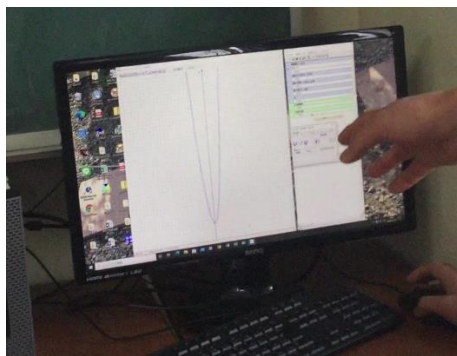
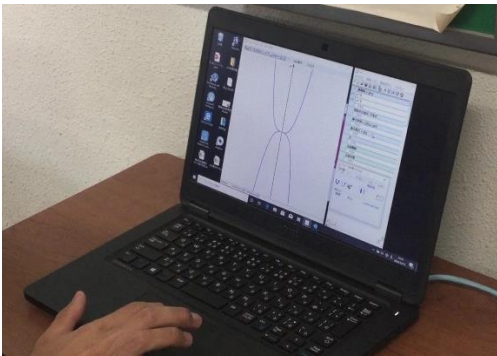
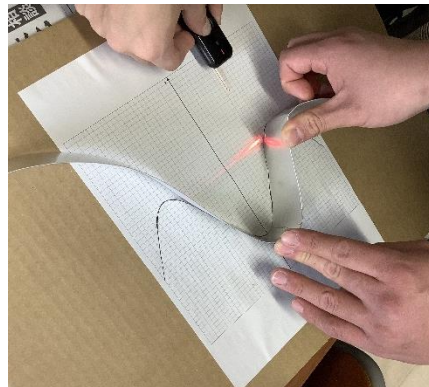
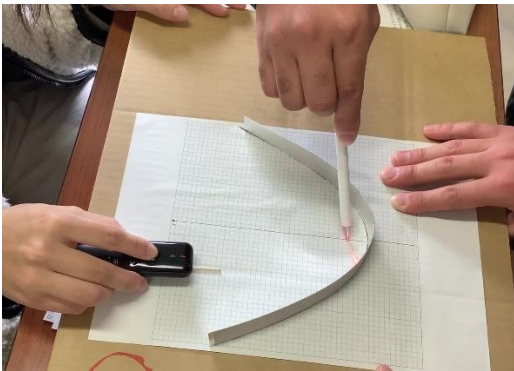


写真5 活動の様子



資料 3

学習指導案

<授業のねらい>

- (a) 身近な場面から問題を見出し、学んだ知識を生かして解決することができる。
- (b) 相違性に着目して関連する新たな問題を見出し、自発的に解決しようとしている。

	活動内容	指導上の留意点
導入	<p>1. 身近な放物面を紹介する。</p> <p>放物面のスライドをいくつか見せ、それぞれが何かを問う。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>これらはなぜこのような形をしているのか 他の形ではいけないのか</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・用途から形状の必要性に着目させる。</li> </ul> <p>2. 放物面の紹介</p> <p>放物線<math>z = ax^2(a \neq 0)</math>を<math>z</math>軸で回転させた曲面である回転放物面(回転)放物面：<math>z = a(x^2 + y^2)</math></p> <p>これらの写真のものには放物線が隠れている。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>課題 放物線の性質について明らかにしよう。</p> </div> <p>放物線にはどんな性質があるのかを調べていこう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・具体物(パラボラアンテナ, オリンピックの採火台, 懐中電灯の先端)を見せながら, 形状の特徴に着目させるように声かけをする。</li> <li>・スライドに色をつけどこが放物線なのかを指し示しながら説明する。</li> </ul>
展開 I	<p>3. 場面設定</p> <p>光が反射し焦点を通る様子を撮影した動画を見せる。</p> <p>軸に対して平行に進んできた光は<math>y</math>軸上のある1点を通っていることを気付かせる。</p> <p>現象を数学的に証明していくために, 数学的表現にする。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>①放物線<math>C : y = ax^2</math>と直線<math>k : x = x_0</math>の交点を <math>P(x_0, ax_0^2)</math> とする。</p> <p>②<math>C</math>上の点<math>P</math>に対する接線を<math>l</math>とし,</p> <p>③点<math>P</math>を通り直線<math>l</math>に対して垂直な直線を<math>h</math>とする。</p> <p>④直線<math>k</math>を直線<math>h</math>に対して, 対称移動させた直線を<math>m</math>とする。</p> </div> <p>数学的に表現したところについて解説する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・接線を引く</li> </ul> <p>曲線での反射は, 曲線上の点に対して接線を引くことで, 直線における反射と同様に考えることができる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・反射する様子を見せ, どのような現象なのかを確認する。</li> <li>・①~④を確認する際に, 現象とリンクさせながら説明していく。</li> <li>・数学的要素がどこなのか確認する。</li> </ul>

・線対称

反射した直線はもとの直線に対して線対称な直線である。

直線 $m$ は直線 $k$ によって決まっている。

数学的問題として提示する。

問 直線 $m$ は直線 $k: x = x_0$ に関係なく $y$ 軸上のある 1 点を通るだろうか。

何を示せばいいのか？

・通るある 1 点の座標を求める。

そのために、反射した直線 $m$ の式 $y = cx + d$ を求める

どのように示していけばいいだろうか？

・2 点から直線の式を求めることはできなさそう

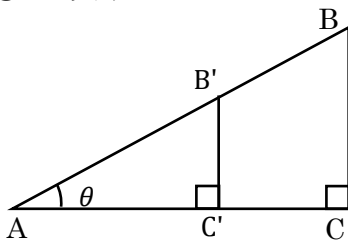
・1 点と傾きから求められそう

反射した直線を求めるために、角度に着目して示していこう。

4. 三角関数の性質について学習する。

・ $\tan\theta$  (正接) について

① $\theta$ が鋭角のとき



$\tan\theta = \frac{BC}{AC}$  と定義する。

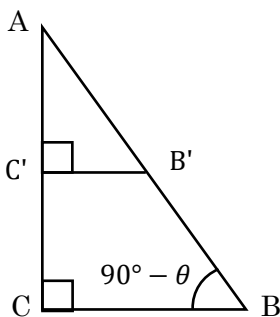
$\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$  より

$BC : AC = B'C' : AC'$  即ち  $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$  となる。

※ $B'C'$ の位置ではなく、 $\theta$ の値によって定まる

$\tan\theta$ と $\tan(90^\circ - \theta)$ の関係



$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{AC}{BC}$

つまり,

$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$

・ここで解決の見通しを持たせる。  
見通しが持てない生徒に対しては、スライドの写真をもう一度提示して、具体的な場面で見出したことを整理する。

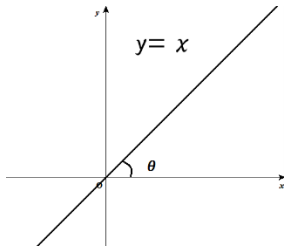
・中学生やまだ習っていない高校生がいるので、段階を分けて説明をし、証明していく。

・ワークシートを用いて、グループごとに教え合い交流する。

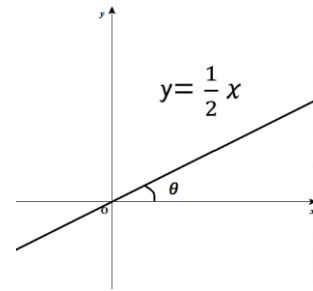
・中3の生徒は相似をまだ習っていないので、拡大・縮小してぴったり重なる図形のことだと伝える。

問 次のように $\theta$ が与えられるとき、 $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)

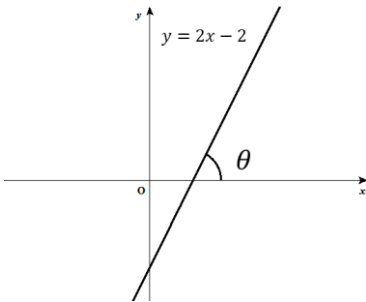


(2)

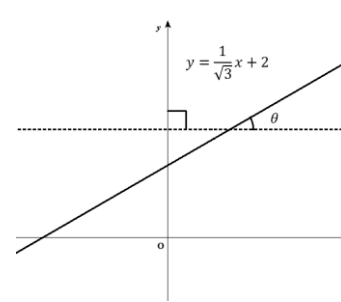


問 次のように $\theta$ が与えられるとき、 $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)



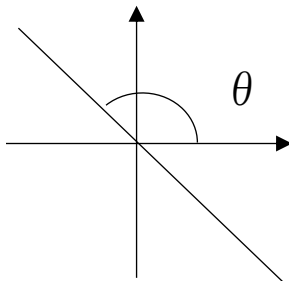
(2)



$y = cx + d$ と $x$ 軸とのなす角を $\theta$ とすると、

$\tan\theta = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ で求められる。 即ち  $\tan\theta = c$  (傾き)

②  $\theta$ が鈍角のとき

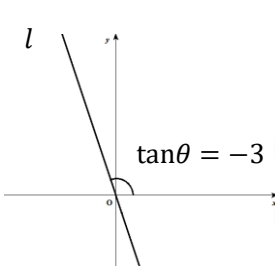


- ・  $\theta$ が鋭角のときと同じように $\theta$ を含む直角三角形がつかれない。
- ・  $\theta$ を含む直角三角形ができないときどのように求めたらよいか

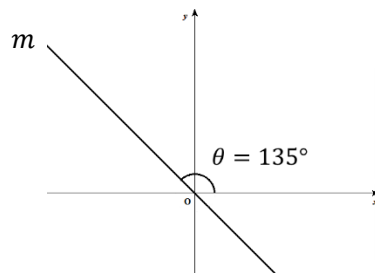
$\theta$ が鋭角の時と同じように  $\tan\theta = (\text{傾き})$ である。

問 次のように $\theta$ もしくは $\tan\theta$ の値が与えられるとき、直線 $l$ 、 $m$ の傾きをそれぞれ求めよ。

(1)



(2)



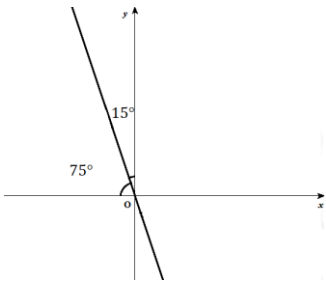
・ 加法定理について

$\theta = 105^\circ$ のときはどのように求めるか？

・ 座標に直角三角形を描き、底辺・高さの比率により  $\tan\theta$ を導かせる。

・  $\tan\theta$ は直線の傾きを求めることで求められることを確認する。

・ 鋭角のときとは逆に、 $\tan\theta$ の値から傾きを導かせ、 $\tan\theta$ の定義を確認させる。



$\theta = 105^\circ$ のときは

傾きやのtan値は  
分からなさそう

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$  を紹介し、練習問題を解く。

問  $\tan 105^\circ$  の値を求めよ。

5. グループごとに証明をする。

文字が多く計算が複雑になるため、 $a = 1$ の簡単な放物線から計算させる。

与える放物線： $y = x^2$ ， $P(x_0, x_0^2)$ における接線の傾きは $2x_0$

反射した直線： $y = cx + d$  とする。

ステップ 1 傾きとの関係から  $\tan\theta, \tan\alpha$  を  $x_0, c$  を用いてそれぞれ表そう。

ステップ 2  $\tan\beta$  を  $\tan\theta, \tan\alpha$  を用いて表そう。

ステップ 3  $\tan\alpha, \tan\beta$  の関係から直線  $m$  の傾きを求めよう。

ステップ 4 直線  $m$  の切片の値を求めよう。

反射した直線  $m: y = \left(x_0 - \frac{1}{4x_0}\right)x + \frac{1}{4}$

本当に反射したすべての直線が  $y$  軸上のある 1 点を通ると言ってもいいのだろうか？

証明の結果から

- ・反射した直線の切片は  $x_0$  がない。
- ・定数になっている。

この証明で与えた放物線は  $y = x^2$  であったが、一般化した  $y = ax^2$  についても同様に証明をする。

同様に計算すると

反射した直線  $m: y = \left(ax_0 - \frac{1}{4ax_0}\right)x + \frac{1}{4a}$

切片  $\frac{1}{4a}$  は  $x = x_0$  によらず変わらない。

ある 1 点は  $a$  の値によって変化するが、 $x_0$  の値には依存しない。

・証明は困難と考えられるため、紹介にとどめ、練習問題で公式を確認する。

・証明の手順が記してあるものと記していないワークシートを 2 種類用意し、生徒がどちらかを選んで証明をしていく。

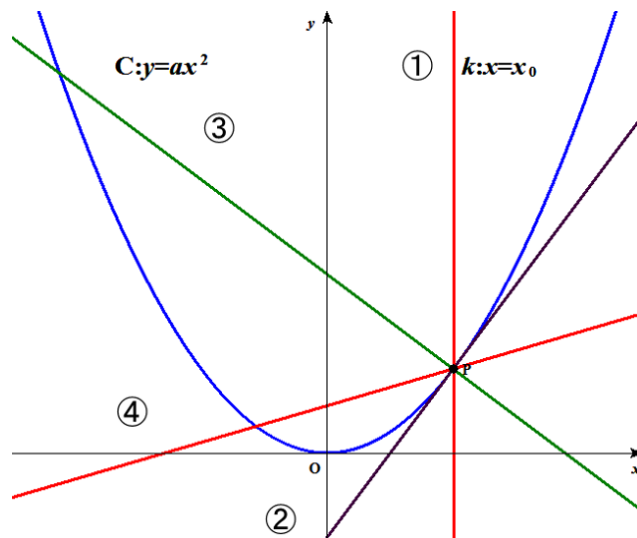
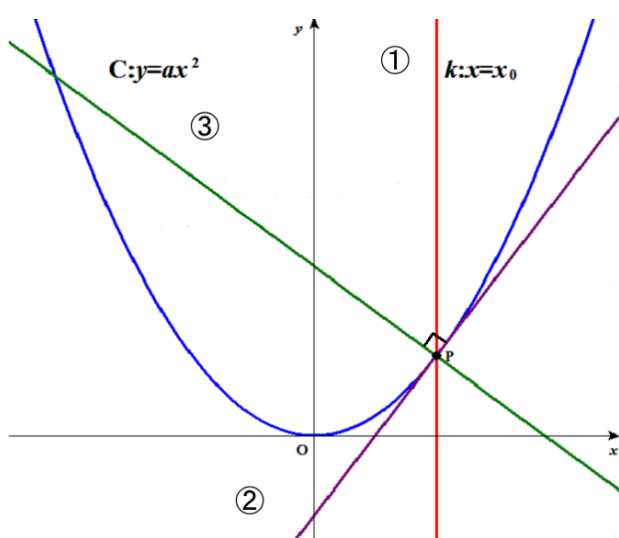
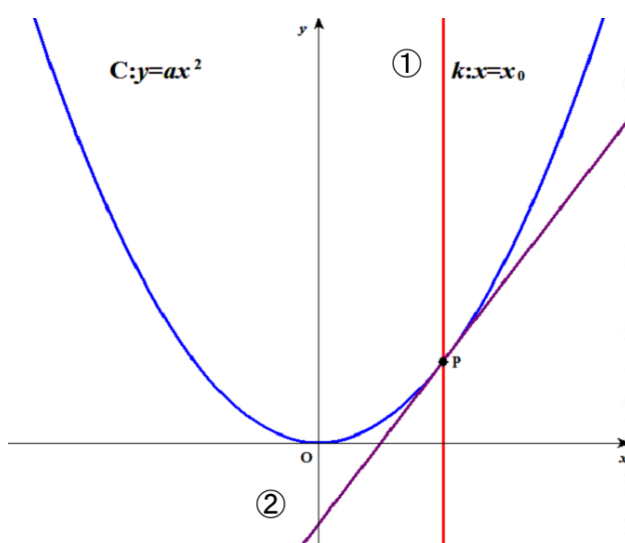
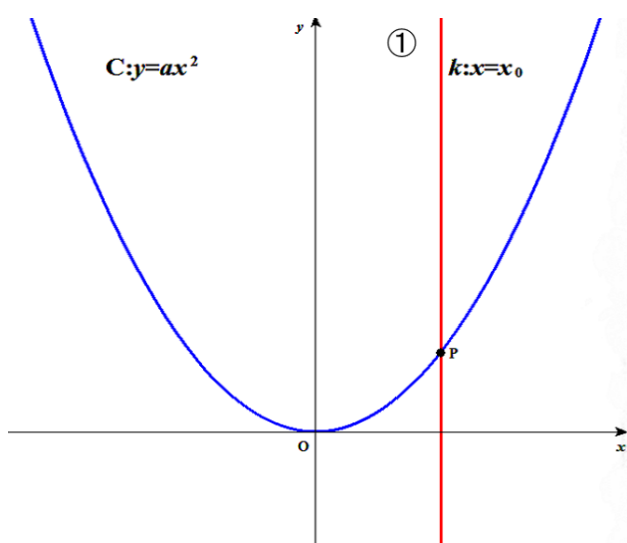
・証明の結果からなぜ焦点を通るのかを問いかける。

・一般化したことで、何が変化したかを考えながら証明するとよいことを伝える。



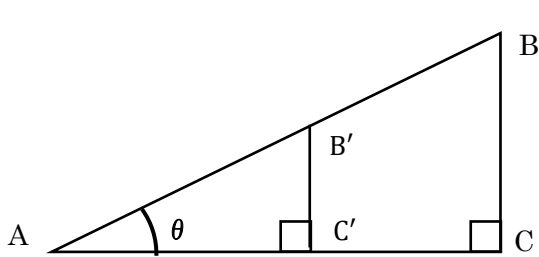
<p>展 開 II  展 開 III  ま と め</p>	<p>(時間があるとき)                  双曲線：<math>x^2 - y^2 = -1</math>，楕円（円）：<math>x^2 + y^2 = 1</math>について同様に計算し，放物線と同じことが言えるのか確認する。                  双曲線(<math>y &gt; 0</math>)：<math>y = \sqrt{x^2 + 1}</math>                  楕円（円）(<math>y &lt; 0</math>)：<math>y = -\sqrt{1 - x^2}</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;">                     なぜパラボラアンテナや懐中電灯の先端は放物面なのか？                 </div> <p>性質</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;">                     焦点・・・反射した光線が集まる点。                       ・軸に対して平行に進んできたすべての光は，放物線上で反射し，ある1点（焦点）を通る。                       ・焦点から放物線上に放たれた光は，放物線上で反射し，軸に対してすべて平行に進んでいく。                 </div> <p>パラボラアンテナ，懐中電灯の仕組み</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・パラボラアンテナ：電波を1点(受信機)に集める。</li> <li>・懐中電灯：1点(電球)からの光をまっすぐに届かせる。</li> </ul> <p>6. 曲線を実際に作り，確認する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・曲線を3つ(放物線，半円，双曲線)用意し，その中から放物線を探し当てる。その曲線の反射板を作成する活動を行う。グループごとに反射板を作成していく曲線に光を当てどの曲線が放物線かを判断をする。</li> </ul> <p>7. 様々な曲線についてパソコンを用いて自由に出力し，放物線の性質が他の曲線で成り立つかどうかを実験から確認する活動を行う。前の活動と同じように反射板を作成し，実際に光を当てて，反射の様子を確認する。確認を終えてから，全体で実験の結果をグループごとに交流をする。</p> <p>8. まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・今回扱った放物線以外の二次曲線，双曲線・半円の形状をしたものを紹介する。</li> <li>・今後の日常生活でも身近に見かける曲線や図形に対しても，今回のようにどんな性質が活用されているだろうかと疑問を持ち，実際に証明や実験等を行おうとする姿を目指し，本実践を終了とする。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・視覚的には判断がつきにくい曲線を用意し，反射の様子から放物線の性質を確認させる。</li> <li>・関数描画ソフトで曲線を印刷し，それに沿って曲線を作る。</li> </ul>
---	--	---

- ①放物線 $C : y = ax^2$ と直線 $k : x = x_0$ の交点を $P(x_0, ax_0^2)$ とする。
- ② $C$ 上の点 $P$ に対する接線を $l$ とし、
- ③点 $P$ を通り直線 $l$ に対して垂直な直線を $h$ とする。
- ④直線 $k$ を直線 $h$ に対して、対称移動させた直線を $m$ とする。



$\tan \theta$  (タンジェント シータ)

$\tan \theta = \frac{BC}{AC}$  と定義する。



$\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$  より

$BC : AC = B'C' : AC'$

即ち  $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

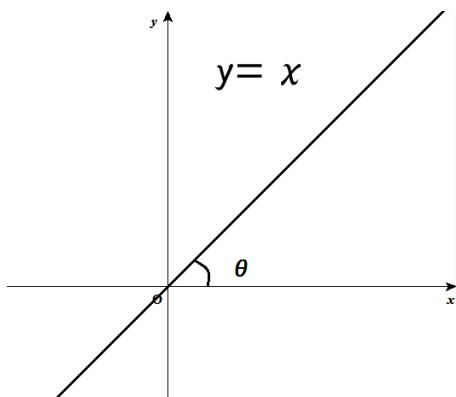
$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$  となる。

※ $B'C'$ の位置ではなく、 $\theta$ の値によって定まる。

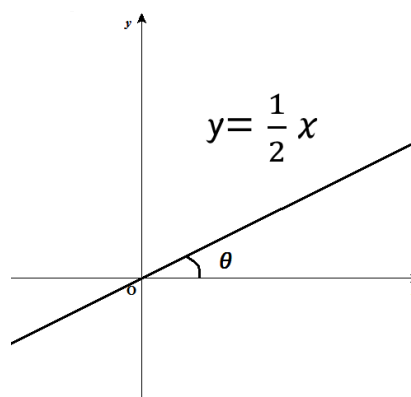
①  $\theta$  が鋭角のとき

問 次のように  $\theta$  が与えられるとき、 $\tan \theta$  の値をそれぞれ求めよ。

(1)



(2)

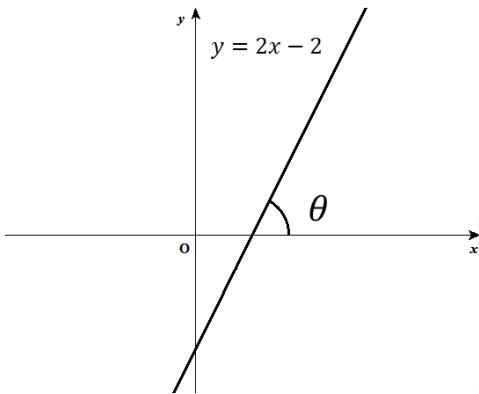


$\tan \theta =$

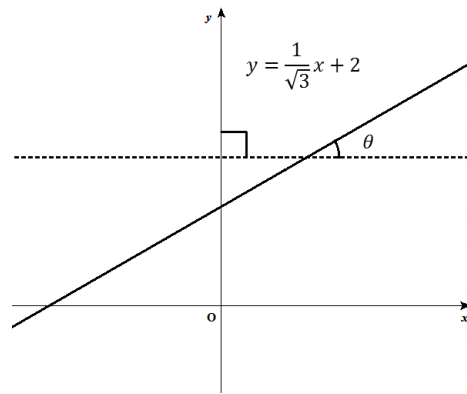
$\tan \theta =$

問 次のように  $\theta$  が与えられるとき、 $\tan \theta$  の値をそれぞれ求めよ。

(1)



(2)



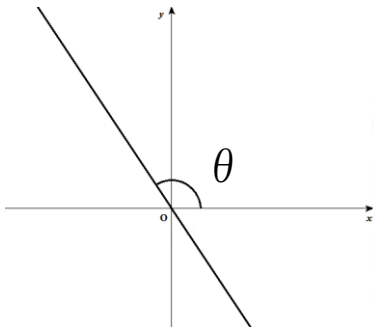
$\tan \theta =$  \_\_\_\_\_

$\tan \theta =$  \_\_\_\_\_

$y = cx + d$  と  $x$  軸とのなす角を  $\theta$  とするとき、

$\tan \theta = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} =$  \_\_\_\_\_  $\text{で求められる。}$

②  $\theta$  が鈍角のとき

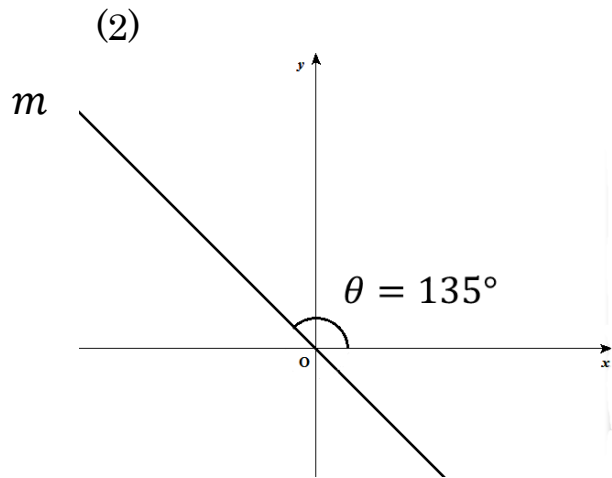
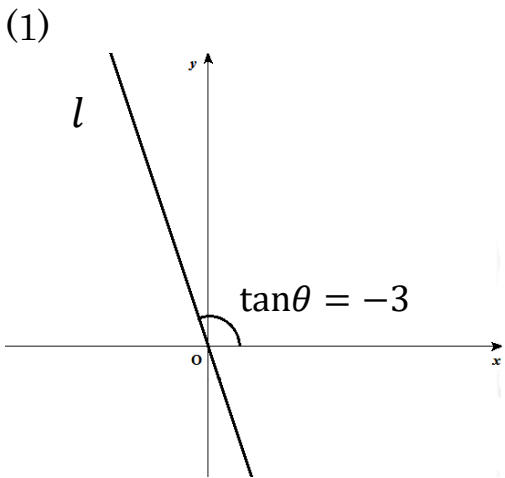


$\theta$  が鋭角のときと同じように  $\theta$  を含む直角三角形がつかれない。

$\theta$  を含む直角三角形ができないときどのように求めたらよいか。

実は、鋭角のときと同じように  
 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$  である。

問 次のように  $\theta$  もしくは  $\tan \theta$  の値が与えられるとき、直線  $l$ 、 $m$  の傾きをそれぞれ求めよ。



傾き =                     

傾き =

## 加法定理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

注意  $\tan(\alpha + \beta) \neq \tan\alpha + \tan\beta$

問  $\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

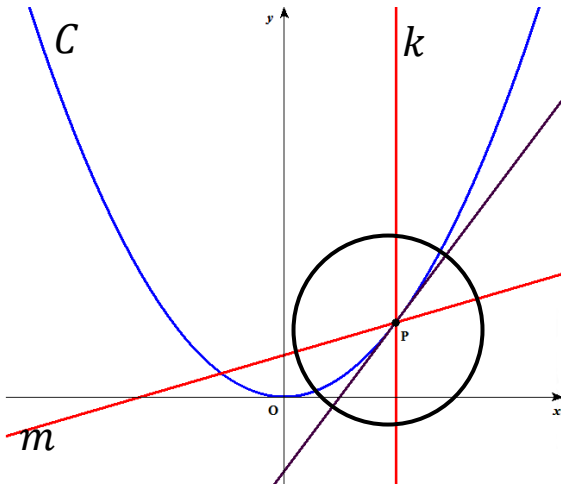
(但し,  $\tan 45^\circ = 1, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ とする。)

$$\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

問 直線 $m$ は直線 $k: x = x_0$ に関係なく,  
 $y$ 軸上のある1点を通るだろうか?

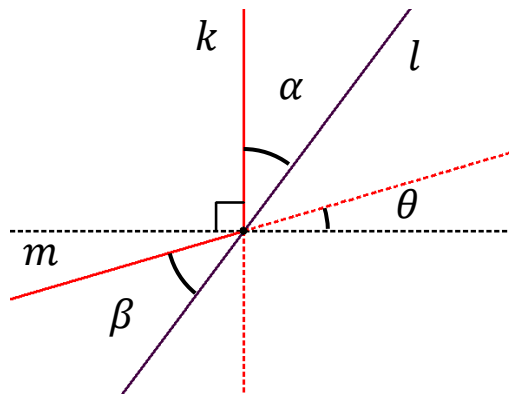
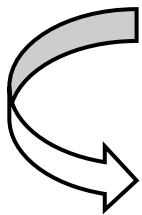
放物線 $C: y = x^2$ として計算しよう。

※ $P(x_0, x_0^2)$ における接線 $l$ の傾きは $2x_0$ である。



反射した直線 $m$ を  
 $l: y = cx + d$ とおく。

$x$ 軸と $m$ ,  $k$ と $l$ ,  $m$ と $l$   
 とのなす角をそれぞれ  
 $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ とする。



ステップ1

傾きとの関係から $\tan\theta, \tan\alpha$ を $x_0, c$ を用いてそれぞれ表そう。

ステップ 2

$\tan\beta$ を $\tan\theta, \tan\alpha$ を用いて表そう。

ステップ 3

$\tan\alpha, \tan\beta$ の関係から直線 $m$ の傾きを求めよう。

ステップ 4

直線 $m$ の切片の値を求めよう。

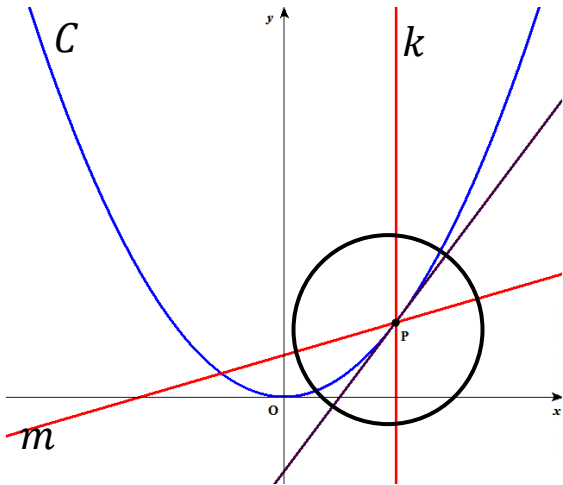


☆チャレンジ

問 直線 $m$ は直線 $k: x = x_0$ に関係なく,  
 $y$ 軸上のある1点を通るだろうか?

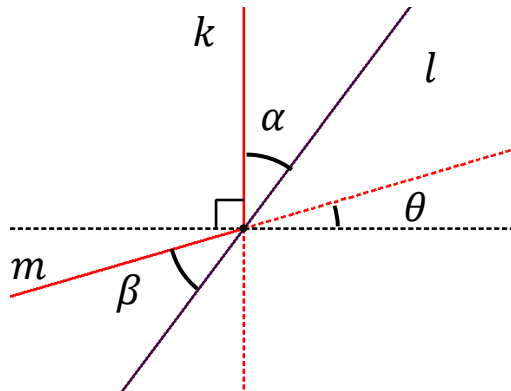
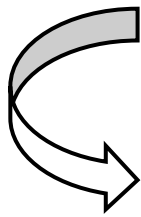
放物線 $C: y = x^2$ として計算しよう。

※ $P(x_0, x_0^2)$ における接線 $l$ の傾きは $2x_0$ である。



反射した直線 $m$ を  
 $l: y = cx + d$ とおく。

$x$ 軸と $m$ ,  $k$ と $l$ ,  $m$ と $l$   
 とのなす角をそれぞれ  
 $\theta, \alpha, \beta$ とする。



他の放物線でも「直線 $m$ は直線 $k: x = x_0$ に関係なく、 $y$ 軸上のある1点を通る」ことが言えるだろうか？

放物線 $C: y = ax^2$ として計算しよう。

※ $P(x_0, ax_0^2)$ における接線 $l$ の傾きは $2ax_0$ である。

