岐阜数学教育研究
2020, Vol.19 No.1, 20–47

児童生徒の問題発見・解決能力を伸ばすことのできる授業の開発

太田智基[1]，菱川洋介[2]，各務至[3]，菊池一人[4]，淀川雅夫[3]

「問題を発見する力」や「粘り強く考えて解決する方法を見出す力」は，これからの社会を生き抜く児童生徒にとって，重要な生きる力である。我々は，児童生徒のこのような力の育成に，身近な場面から児童生徒が自ら問題を見出すことと，学習内容を活用して様々な問題を解決する活動を取り入れた授業が有用であると考え，授業開発を行った。本論文では，教材研究の概要，授業の展開，及び実践の結果とその考察について述べる。
＜キーワード＞問題発見・解決能力，主体的・対話的で深い学び，教科等横断的

1. はじめに

本研究の目的は，児童生徒の「問題を発見する力」や「粘り強く考えて問題解決する力」を育むことのできる授業の開発である。この授業実践を通して，児童生徒の問題発見・解決能力の向上を目指す。

平成 29，30 年に告示された学習指導要領([1] 等) では，生きて働く知識・技能，未知の状況にも対応できる思考力・判断力・表現力等，学びを人生や社会に生かそうとする学びに向かう力・人間性等の 3 つの資質・能力を偏りなく育成することを求めている。また，これらの資質・能力の育成に主体的・対話的で深い学びの実現が重要であると定め，授業改善の方向性を具体的に示している。さらに，教育課程の編成にも触れ,「児童（生徒）の発達段階を考慮し，言語能力，情報活用能力（情報モラルを含む），問題発見・解決能力等の学習の基盤となる資質・能力を育成していくことができるよう，各教科の特質を生かし，教科等横断的な視点から教育課程の編成を図る」ことが求められている。

このような背景の下で，我々は「問題発見・解決能力」の育成に焦点を当て，問題解決型学習と教科等横断的な視点を取り入れた授業の開発を進めた。まず，具体的に育成したい児童生徒の姿や力を，以下のように定めた。

- 発見した問題を主体的に解決しようとする姿
- 学習内容を生かして問題解決する方法を見出す思考力・判断力・表現力
- 問題解決の過程を振り返り，新たな知識・技能，関連する新たな問題を見出そうとする姿

そして，このような姿や力の育成に向け，以下の 2 点を重視した授業について考えた。

- 児童生徒にとって身近な場面から問題を見出す導入
- 学習した内容を活用する場面を設け，児童生徒が PDCA サイクルを繰り返し回す活動

児童生徒にとって身近な場面から問題を見出すことで，主体的に問題を解決する児童生徒の姿を実現できると考えた。また，PDCA サイクルを繰り返し回す活動を設けることで，学習した内容を深めたり，新たな知識や問題を発見するきっかけ作りに繋げていきたいと考えた。このような活動を取り入れた授業を実践し，問題発見・解決能力の向上と未知の問題に主体的に取り組もうとする姿の実現を目指した。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部
[3]岐阜大学教育学部附属小中学校
[4]岐阜県大垣市立興文中学校

2. 教材について

本研究では，物体の斜方投射を題材に取り上げた。具体的には，ボールを投げる場面を扱う。スポーツテストのハンドボール投げや友達とのボールを用いた遊戯など，ボールを投げることは児童生徒にとって身近な場面である。その際に,「ボールを遠くに投げたい」や「狙ったところに向かってボールを投げたい」のように，児童生徒自身の問題が浮かび上がると考える。そのような児童生徒の思考を生かし，本教材の実践を通して自身の問題を解決することを目指していく。

2.1. 教材研究の概要

斜方投射は高等学校の物理で学習する内容であるが，児童生徒は遊びの中で体験しているので，内容としてイメージしやすく取り掛かりやすい場面である。

本教材の研究を通して，我々は以下のことを明らかにした。

(i) 狙った場所にボールを投げるためには，初速度，投射角，ボールが手から離れるときの高さの条件に着目する必要があること
(ii) ボールを一番遠くへ飛ばすための角度が，いつでも 45° であるとは限らないこと

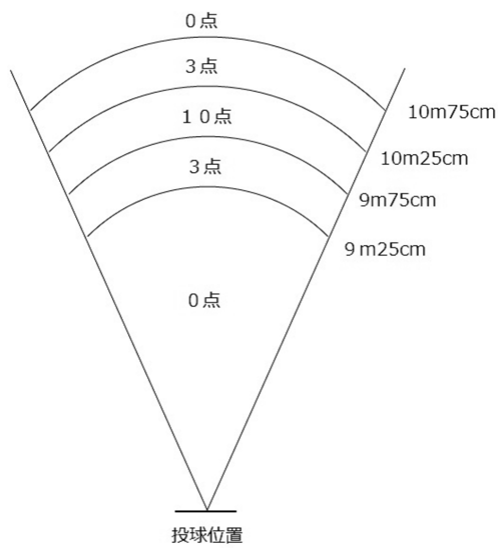
なお，教材研究の詳しい内容については，資料 1 を参照されたい。

2.2. 児童生徒の習熟に応じた教材の扱いについて

2.1 の内容は，主に高等学校数学の知識を用いる。それゆえに，高校生を対象とした教科等横断的学習や，総合的な探究の題材として有用であると考える。一方，小学生や中学生を対象とした本教材の扱いについては，表計算ソフトを活用して初速度や角度，高さの値を入力すれば投げたボールの軌跡やボールの位置を自動出力できるような環境を整えることで，具体的な場面と理論を行き来しながら学習を進められると考える。

2.3. 題材を用いたゲームの説明

斜方投射の場面を次のようなゲーム形式で取り扱う。図のようにラインを引き，得点を設定する。投球位置からボールを投げ，落ちた位置に応じて得点をつける。なお，ライン上に落ちた場合は，高い方の得点を採用する。



また，ゲームのルールを以下の通りに設定する。

1. 持ち球は 1 人 3 球ずつである。
2. 助走をつけて投げてはいけない。
3. グループ対抗とし，グループ全員の点数の平均で順位をつける。

このゲームを授業の導入と展開Ⅲに 2 回設ける。詳しくは，3. 授業の展開で詳しく述べる。

3. 授業の展開

2 章で述べた内容を教材化した授業の展開について述べる。なお，本授業は中学生と高校生を対象とした 6 時間構成の展開である。

3.1. 授業のねらい

本授業のねらいは，以下の通りである。

- 与えられた条件から方程式の解を求めることができる。
- 得られた知識を活用して，ボールを投げるための工夫や改善する方法を見出そうとしている。

3.2. 授業の構成

まず，授業の大まかな流れについて述べる。

(1) 導入

2.3 で述べたゲームを練習なしで行う。ゲームの実践を通して，問題の把握や場面理解を

促す。また，次の問いを提示し，本時の学習の見通しを立てる。

問 : 狙った場所にボールを落とすために，どのような工夫をするとよいか。

(2) 展開 I

ボールを投げた時の軌道が放物線を描くことを数学的に明らかにする。

(3) 展開 II

展開 I で得られた放物線の式を用いて演習を行う。確認問題を 2 問解かせ，同じ角度でも投げる高さが変わるとボールの飛距離が変わることに気付かせる。

(4) 展開 III

展開 I，II の学習を活用して各グループで初速度や角度，高さの条件を設定して理論値を導き，ボール投げゲームの試行結果を分析しながら練習する。その後，試合を行う。

(5) 展開 IV

生徒自身で関連する問題を考え，個人，もしくはグループで解決する活動を行う。

(6) まとめ

展開 IV で見出した問題とその解決について，全体交流をする。また，本時で学習したことをまとめる。

以下，それぞれの活動について詳しく述べていく。なお，学習指導案やプリントの詳細は，それぞれ資料 2 と資料 3 を参照されたい。

(1) 導入

最初に様々な球技の写真を見せ，物体の斜方投射に関わる内容を扱うことを示唆する。その後，2.3 で述べたゲームを練習なしで行う。なかなか自分が狙った場所にボールが落ちないことが起きることを共有し，どのように工夫するとよいかを問う。生徒からの意見を集約した後，工夫の根拠を理論的に明らかにすることを伝え，展開 I へ移る。

(2) 展開 I

まず，高等学校の物理で学習する斜方投射に関する理論を紹介する。特に，物体の運動を水平方向と鉛直方向に分け，それぞれの運動の様子をプリントを用いて学習していく。また，三角比の定義の復習や，運動の様子をグラフで具体的に提示したりする等，文系の生徒や物理を苦手とする生徒も理解しやすいようにスライドを用いて丁寧に説明する。なお，水平方向と鉛直方向のそれぞれについて式は以下の通りである。

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta)t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + h \end{cases}$$

2 つの式から t を消去して y を x の式で表す。すると y が x の 2 次関数であることから，斜方投射した物体の軌跡はいつでも放物線になるということを確認する。また，角度や初速度，ボールを投げる高さを変えると関数も変わることを確認する。

(3) 展開 II

最初に展開 I で得られた式を用いて確認問題 1 を解く。

確認問題 1

地上 0m からボールを 45° で投げた時の放物線の式を求めよう。また，$y = 0$ となる x の値を求めよう。ただし，$v_0 = 10$m/s とする。

確認問題 1 を解いた後,「実際に私たちがボールを投げるとき，高さは何 m くらいかな」と問い，確認問題 2 へつなげる。

確認問題 2

地上 2m からボールを 45° で投げた時の放物線の式を求めよう。また，$y = 0$ となる x の値を求めよう。ただし，$v_0 = 10$m/s とする。

確認問題を 2 問解くことで，初期条件が 1 つでも変わると関数が変わることに気付かせる。

(4) 展開 III

得られた知識や確認問題を参考にして，導入で投げかけた問いを具体的場面で解決する。まず，ゲームのルールを詳しく説明し，練習時間と試合を設けることを伝える。その後，活動に入る。初速度や角度，高さを生徒自身で設定して理論値を出させる。生徒の思考例として,「投げる角度を 30° にした時，どの高さから投げればよいか」や「もっと低いところから投げた時，何度で投げればよいか」など

が考えられる。その後，自分たちで考えた条件下で実際にボールを外で投げ，求めた理論値と比較する。最後に自分たちで考えた条件で試合を行い，最初の得点と比較する。各グループの意見を交流し，本時の学習内容の理解を深めていく。

(5) 展開Ⅳ

展開Ⅲまでの活動を通して得られた知識を参考にして，他にどんな問題が考えられるのかを個人，もしくはグループ考える。その一例として「ボールの飛距離が最大になるのは何度で投げた時なのか」や「籠を置いてそこに入れるためには何度で投げればいいのか」等が想定される。理論的に解決するだけでなく，得た理論を基に実践を行ってもよいことを伝える。

また，活動後に全体交流を行い，個の考えやグループの考えを共有する。

(6) まとめ

本時の学習内容を振り返る。生徒に対し,「何ができるようになったか」や「工夫することができたか」を問うとともに，今後どんな問題を見つけて解決したいかを問うことで，本時の学びのような思考と実践を継続してほしいことを伝える。

4. 実践結果と考察

本教材の実践を以下のように行った。

場所：岐阜大学教育学部 A 棟 426 号室

日程：2020 年 11 月 27 日（金）13:00～14:30

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座 4 年生

本授業は中学生や高校生を対象として考案したが，諸事情により実践することができなかったため，大学生に対する実践で代替した。また，今回の実践案は 6 時間を想定して作成したが，実践は 90 分で行ったため，展開Ⅳを省いて実践を行った。以下，活動の様子と実践結果の考察，改善点を述べる。

4.1. 実践の様子

(1) 導入

はじめに本時で行うゲームについて説明して，本時の活動内容を学生に伝えた。その後に練習なしでゲームを実施する予定であったが，時間の都合上，授業者がボールを 10m 先に向けて投げている様子を撮影した動画を見せた。準備した動画は，初速度や高さ，角度をいろいろ変化させて投球した姿を撮影したものである。動画を見せた後,「持ち玉が 3 球しかないが，3 球以内にできるだけ高い点数を取るためにはどんな工夫をしたらいいだろうか」と学生に問いかけた。その問いに対し,「投げる角度を意識する」,「ボールの初速度を意識する」,「ボールの落下地点を予測して投げる」等の反応があった。

(2) 展開Ⅰ

時間の都合上，斜方投射における水平方向と鉛直方向のそれぞれの運動方程式は授業者から与えた。2 つの運動方程式から関数を求める場面では，ほとんどの学生が y を x の式で表すことができていた。三角比の相互関係を使って関数を簡単な形で表そうとしている学生も何人か見られた。求めた関数を確認する場面では，求めた関数が投射角，初速度，投げる高さに依存することを確認した際，頷きながら理解していることを示す学生が多かった。

(3) 展開Ⅱ

まず，確認問題 1 を解き，実際に投げているのは地面から 2m くらいの高さからであるということから確認問題 2 へ移った。その際，高さが変化するとボールの落下地点は近くなるのか，遠くなるのかと問うと,「遠くなる」と予想した学生が多かった。確認問題 2 を解いた後，計算結果と最初の自分の予想を比較した。比較した際,「やっぱり」と口ずさむ学生や,「へー」と新しい知識を得たような学生も何人か見られた。

(4) 展開Ⅲ

展開Ⅰ，展開Ⅱを踏まえ，10m 先にボールを落とすように投げるためにどんな工夫をすれば良いかをグループで考え，実際にボールを投げて実践する活動を行った。最初にルールの確認と初速度，角度，高さの測り方について説明し，その後自由に練習する時間を設けた。まず試しに投げてみて感覚をつかむ学生や，紙に計算したり表計算ソフトを用いたりする学生など，様々な取り組む姿が見られ

た。特に，ボールを投げるときに角度を意識している学生が多く見られた。以下，実際に学生たちが考えた投げる工夫の例の一部を紹介する。

・45°で高さ150cmから9.3m/sで投げる。
・角度は20°〜30°で，初速度は32km/h〜35km/hくらいが良い。
・35°で高さ160cmから33km/hで投げる。
・45°で高さ160cmから30km/hで投げる。
・上手な人を参考にした。

(5) まとめ

活動時間が長くなり，授業で獲得してほしかった知識の確認をしたり他の応用例について考えたりする時間を十分取ることができなかった。各グループが考えた条件を交流する時間を設け，様々な条件で10mに届かせる方法を共有することが課題としてあげられる。

4.2　事後アンケートについて

授業後にアンケートを実施した。以下，アンケートの質問内容及び結果を示す。ただし，回答の選択肢は次のようになっている。

1. 当てはまる　2. やや当てはまる
3. やや当てはまらない　4. 当てはまらない

(1) 今回の授業を受けてみて，楽しいと感じた。
1 … 16人，　2 … 8人，　3，4 … 0人

(2) 他の教科の内容と数学を結びつけて考えることは楽しいと感じた。
1 … 13人，　2 … 8人，　3 … 2人，　4 … 1人

(3) 数学が日常のどんな場面で利用されているのか，もっと調べたり考えたりしたいと感じた。
1 … 15人，　2 … 7人，　3 … 1人，　4 … 1人

(4) その他，感想等あれば下の欄に記入してください。（回答は原文のままである。）

・理論と体の感覚が結びついたとき感動しました。
・物理の授業で斜方投射の計算をしたことはありましたが，実際にやったことがなかったので楽しかったです。
・角度や初速度等，実際に計測しながら投射をするのは物理で習ったことを実際にやってみた感じがあり，楽しく学べた。
・ものを投げたときの軌道がなぜ放物線になるのか考えたことがなかったので楽しかったです。
・誤差等も考えて方針を考えたい。
・計算をせずにどんなものだろうとやってしまい，数学から離れたしまった気がした。
・楽しんで活動できたが，計算を基にやったというより何回も試してみた感じだった。
・理論的に考えてもその通りにほぼ行かないと感じたので,数学と結びつけるのは難しいと思った。
・角度を固定できる装置があると更に良いと感じた。

4.3　実践結果の考察

実践結果の考察について，それぞれの展開ごとに以下のようにまとめた。

(1) 導入

様々な条件でボールを投げた動画を提示したが，その詳細を言及しなかったため，学生に条件の違いが伝わっていない印象であった。「狙う場所にはこのような線が描いてあるよ」や「今投げる速度を変えたよ」などの説明を加えながら動画を提示する工夫が必要であると考えている。一方，動画を最初に見せることで学生たちが今回の授業で何について考えるのか見通しを持つことができたと考える。また，ゲームを設定したことで学生が教材に取り組む動機を促すことができた。

(2) 展開Ⅰ

放物線を求めることはほとんどの学生ができていた。ゆえに，授業のねらい(a)については達成できたと考える。しかし，実際に高校生が解く際に，数学が苦手な生徒にとって今回扱う連立方程式は文字が多く整理しにくいのではないかと考える。そのため机間巡視を行い，tを消去し代入法で解けているかどうかを確認しながら進めていく必要があると考えた。

(3) 展開Ⅱ

確認問題を解くことはほとんどの学生ができていた。しかし，確認問題２において関数電卓を使用する際，多くの学生が関数電卓を扱う

機会が少なく使い方に戸惑っていたため，使い方の説明や練習する時間を設けると良かった。

(4) 展開Ⅲ

授業のねらい(b)について，4.1 (4)の活動の様子から，達成できたと考える。特に，実際に活動の様子と得点表を見比べると，感覚だけで投げている学生と比較して，角度を意識している学生の方が得点が高い傾向にあった。元々の運動能力の差も考えられるが，少なくとも今回の実践において理論と運動が結びついた良い結果となった。アンケートの結果で楽しく活動できた学生が多かったことから，学生たちが主体的に学習できる題材であったことがいえる。また，物理で学習する内容を数学で取り扱ってより深く学習すること，実際に活動をして理論だけで終わらせるのではなく自分の経験に落とし込むことで教科横断的な授業をすることの良さが分かる題材であったと考える。教員にとって教科横断的な授業を考えることは，自分たちの専門性が上がるだけではなく，子供たちの経験に沿った内容を扱うことで子供たちが学習に取り組みやすくなったり，他の教科で学習した知識が1つにつながることを実感させることができる良い機会だと感じた。

(5) まとめ

様々な条件で10mに届かせることができるということを共有するために，最後に各グループが考えた条件を交流する時間を設けることが課題としてあげられる。また，自分たちで考えた他の場面の問題を交流することも，時間があればしていきたい。アンケート（3）にもあるように，交流の時間を設けることで数学の有用性を感じたり，日常に隠れている数学について他にも考えてみようといった，興味・関心，主体的に学習に取り組む態度，学びに向かう姿勢を育成できるのではないかと考える。

5. おわりに

本実践を通して，教科横断的な授業を考えることは教師と生徒の双方の立場から価値の高いものであることが見いだせたと考えている。生徒，特に大学生でありながら，理論と体験が結びついたときに感動を覚えたり，なかなか理論通りにいかないからこそ，さらなる工夫を自ら見出そうとする主体的な姿が実現でき，生徒の主体性に良い刺激を与えられたと考えている。また，教師の立場からは，他教科の知識を得られるのと同時に，他の科目で生徒がどんなことを学んでいるのかが認識できる良いきっかけづくりになったと感じている。生徒が学んだことを深い学びにするためにも，今後もいろいろな題材を取り上げて教材化していきたい。

結びに，本授業の実践のために貴重な時間をご提供いただいた岐阜大学教育学部数学教育講座の学生の皆様，本実践に対して様々なご助言をいただいた岐阜県教育委員会学校支援課の竹中俊文先生，岐阜県立本巣松陽高等学校教論の不破真之介先生に感謝の意を表する。

参考文献

[1] 文部科学省，小学校学習指導要領解説 算数編，2018.

[2] 文部科学省，中学校学習指導要領解説 数学編，2018.

[3] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説 数学編　理数編，2019.

[4] 文部科学省，中学校学習指導要領解説 総合的な学習の時間編，2018.

[5] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説 総合的な探究の時間編，2019.

[6] 山本慎 入江幸右衛門　他，最新 数学Ⅱ，数研出版，2011.

[7] 山本慎 入江幸右衛門　他，最新 数学Ⅲ，数研出版，2011.

[8] 相馬一彦　他，新版　数学の世界3，大日本図書，2016.

資料 1　斜方投射に関する数学的理論

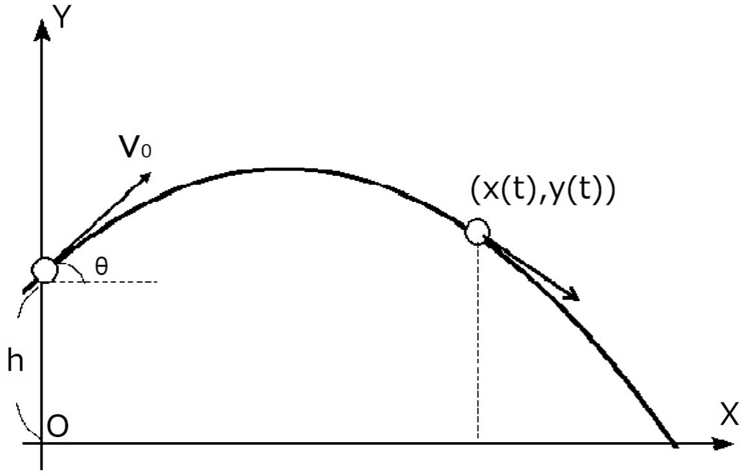
物体の斜方投射について，数学を用いて明らかにする。まず，事象の設定を述べるために，以下の記号を定義する。

m：物体の質量 $(m > 0)$,　v_0：物体の初速度，h：物体を投げる高さ，

θ：投射角，t：時間，g：重力加速度

但し，$v_0 \geq 0,\ h \geq 0,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ t \geq 0$ とする。

以下の図のように，質量 m の物体を点 $(x, y) = (0, h)$ から $x > 0$ の方向に角度 θ，初速度 v_0 で斜方投射する。このとき，ある時間 t における物体の位置を，$(x, y) = (x(t), y(t))$ と表す。また，ある時間 t における物体の速度を水平方向と鉛直方向のベクトルに分解し，$\vec{v} = (v_x(t), v_y(t))$ と表す。



ここで，次のことは明らかであることに注意する。

$$\frac{d}{dt}x(t) = v_x(t),\quad \frac{d}{dt}y(t) = v_y(t),\quad (t \geq 0).$$

はじめに，斜方投射した物体の軌跡は放物線を描くことについて示す。v_0, θ, h を定数とする。物体の斜方投射の x 成分に関する運動は等速直線運動である。また，y 成分のみに関する運動は鉛直投げ上げである。ゆえに，それぞれの運動方程式は，以下のような微分方程式で表される。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = 0 \\ m\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) = -mg \end{cases}$$

但し，初期条件は以下の通りである。

$$x(0) = 0,\ \left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} = v_0\cos\theta, \qquad y(0) = h,\ \left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0} = v_0\sin\theta$$

この微分方程式をそれぞれ解くと，

$$\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\theta)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t + h \end{cases} \tag{1}$$

となる。事実，水平方向の運動方程式を t について 2 回積分すると，

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = C_1 \\ x(t) = C_1 t + C_2 \end{cases}$$

が得られる。但し，C_1, C_2 は任意定数である。ここで，初期条件から，

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} = v_0 \cos\theta \\ C_2 = x(0) = 0 \end{cases}$$

となるので，$x(t) = (v_0 \cos\theta)t$ が得られる。$y(t)$ についても同様である。連立方程式 (1) を t について解くと，以下のように y は x の 2 次関数となる。

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x + h. \tag{2}$$

次に，関数 (2) の $y = 0$ を仮定し，x を θ の関数とみる。このとき，x を最大とする θ を v_0, h, g で表す。これは，斜方投射した物体の距離が最大となる投射角 $0 < \theta < \pi/2$ を明らかにすることと同義である。まず，$y = 0$ であること，θ の範囲，$x > 0$ について考えることから，2 次方程式の解の公式を用いて，

$$x = \frac{v_0^2 \cos\theta}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \tag{3}$$

を得る。ここで，次の関数

$$f(\theta) = \cos\theta\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$

の最大値とそのときの θ を求めれば十分である。$f'(\theta)$ を求めると，

$$f'(\theta) = \left(1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}}\right)\left(\cos^2\theta - \sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$

となる。ここで，

$$1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}} > 1$$

であることから，$f'(\theta) = 0$ となる θ を求めるためには，

$$\cos^2\theta - \sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}} = 0 \tag{4}$$

を解けばよい。(4) を整理すると，

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{gh}{v_0^2}\right)^{-1}$$

となる。よって，$\sin\theta > 0$ であることから，

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{gh}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

が得られる。(5) を満たすときの θ の値を α とする。このとき，$f(\theta)$ の増減表は，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(\theta)$	/	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	/

となる。以上のことから，$\theta = \alpha$ のとき，(3) の x は最大となり，その値は

$$x = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

となる。

例.

(1) $h = 0$ のとき，任意の v_0 に対し，x が最大値をとる θ の値は，45° である。
(2) $h = 20$ かつ $v_0 = 25$ のとき，x が最大値をとる θ の値は，約 38° である。

資料２

学習指導案

（授業のねらい）

・与えられた条件から方程式の解を求めることができる。

・得られた知識を活用して，ボールを投げるための工夫や改善する方法を見出そうとしている。

	学習内容，　予想される生徒の反応（→）	指導上の留意点
導入	いろいろなスポーツの写真を見せ，数学とスポーツの関係に興味を持ってもらう。 （野球，サッカー，砲丸投げ，ラグビーの写真） 本時の活動（ゲーム）を説明する。 実際に生徒に体験してもらう。 →うまく投げられる，簡単， 　うまく投げられない，結構距離がある 問：狙ったところにボールを落とすために，どんな工夫をするとよいか？ →・ふんわり投げる。 　・落ちる場所を予測して投げる。 　・力加減に気を付ける。 　・もっと練習する。	・生徒の発言を受け，例えば「どれぐらいの力加減で投げればいいか」や「落ちる場所をできるだけ正確に予測するためにどうすればよいか」と重ねて問い，課題につなげる。
展開Ⅰ	狙った場所にボールを落とすために，ボールの軌道を数学的に明らかにしていくことを伝える。 課題：ボールを投げた時の軌道が放物線を描くことを，数学的に明らかにしよう。 ・斜方投射について説明する。 (x,y)：ボールの位置を表す座標 v+(0)：初速度, g：重力加速度 θ：投射角，a：高さ，t：時間 水平方向…等速直線運動 $x=(v(0)cos\theta)t$ 鉛直方向…鉛直投げ上げ $y=-\frac{1}{2}gt^2+v(0)t\,sin\theta+a$	・三角比を習っていない中学生にもわかるように，スライドを用いて説明する。

<table>
<tr>
<td>展開Ⅱ</td>
<td>
放物線の方程式を導出する。

$$y=-\frac{g}{2v(0)^2cos^2\theta}x^2+\frac{sin\theta}{cos\theta}x+a$$

・y が x の２次関数であることから，グラフが放物線を描くことを確認する。
・グラフ（ボールの軌道）が投射角，初速度，高さによって変化することを確認する。

確認問題１

<table><tr><td>地上 0m からボールを 45°で投げた時の放物線の式を求めよう。また，$y=0$ となるxを求めよう。
ただし，初速度$v(0)$＝10m/s，g＝9.8m/s^{2}とする。</td></tr></table>

$$y=-\frac{9.8}{2\cdot10^2cos^2 45^\circ}x^2+\frac{sin45^\circ}{cos45^\circ}x=-\frac{9.8}{100}x^2+x$$

$y=0$ となるxを求める。$y=0$を代入すると，次の方程式が得られる。

$$x\left(-\frac{9.8}{100}x+1\right)=0$$

$x>0$ より，

$$x=\frac{100}{9.8}\fallingdotseq 10.20(m)$$

となる。

・さらに具体的な場面に繋げよう
確認問題１を通して，だいたい 45°で投げれば 10m のところにボールが落ちるように投げられそうであることを確認する。
実際は地上 0m から投げているか？
→投げてない。
　だいたい地上△m くらいから投げている。
　下から投げるとだいたい〇m くらい。
</td>
<td>・２次方程式の解法でつまずく生徒には，机間巡視でヒントを与える。</td>
</tr>
</table>

展開Ⅲ	確認問題２ 地上$2m$からボールを斜め上方に初速度$v(0)$＝$10m/s$，θ =45°で投げた時の放物線の式を求めよう。 また，$y=0$ となるxを小数点第２位まで求めよう。ただし，$g=9.8m/s^2$とする。 放物線の方程式は以下である。 $y=-\frac{9.8}{100}x^2+x+2$ $y=0$ となるxを求めるために，$\mathrm{y}=0$ を代入する。 $0=-\frac{9.8}{100}x^2+x+2$ よって，解の公式を用いて x を求めると， $x=\frac{50\pm\sqrt{50^2-9.8\times(-200)}}{9.8}$ となる。$x>0$ より， $x \fallingdotseq 11.91(m)$ が求められる。	・解の公式を確認する。 ・計算が複雑なので，電卓を用いても良いことを伝える。
	活動：試合に向けて各グループで投球の方針を定めよう。 ゲームの内容を詳しく確認する。 １．投球位置からの距離ごとに点数を設定してある。 ２．グループ対抗で，１人あたり３球投げる。 ３．グループ全員の取得した点数の平均で勝敗を決める。 （方針例） 初速度を 10(m/s)，角度を 59 度，高さを 2(m)とすると， $0=-\frac{9.8}{2\times10^2cos^2 59^\circ}x^2+\frac{sin59^\circ}{cos59^\circ}x+2$ $0=-\frac{9.8}{200\times(0.5150)^2}x^2+\frac{0.8572}{0.5150}x+2$	・まず，各グループで設定する初期値を相談して決める。その後，外に移動して計算や投球練習を行う。 ・三角関数表を配布し，電卓を用いて計算してもよいことを伝える。 ・理論値の計算と投球練習を繰り返してよいことを伝える。 （援助として，表計算ソフトを準備しておく）

<table>
<tr>
<td>展開Ⅳ</td>
<td>
$0 = 9.8x^2 - 0.8572 \times 0.5150 \times 200x - 400 \times (0.5150)^2$
となる。解の公式より，
$$x = \frac{44.1458 \pm \sqrt{44.1458^2 - 9.8 \times (-106.09)}}{9.8}$$
$$x \fallingdotseq 10.08\ (m)$$
が得られる。初速度 10m/s，高さ 2m の位置からおおよそ 59° で投げると，だいたい 10mの場所にボールを落とすことができるといえる。
（その他の活動例）
・〇度で投げたらだいたい□m とぶだろう。
・１０m 飛ばすためには〇度で投げればいいだろう。

練習後，試合を行う。それぞれのグループで工夫したことを試合後に交流する。

活動：他にどのような問題が考えられるだろうか。各グループで話し合って解決しよう。

活動例
・距離２０m，高さ１mのところにボールを投げるためには，初速度や角度をどのように投げるとよいか。
・籠を置いてそこに入れるためには何度で投げればいいのか。
・自分のハンドボール投げの記録を，今よりも向上させることが可能か。

最後に問題と解決内容を交流する。
</td>
<td>
・自由に問題を設定してよいことを伝える。また，解決の見通しが立てられるかどうかを机間巡視する。必要に応じて，問題発見や解決の活動を助言する。

・不十分である場合でも，「例えば，皆さんならどのように解決するとよいと考えるかな」と全体に問い，意見交流を促す。
</td>
</tr>
<tr>
<td>まとめ</td>
<td>
まとめ
今回はボール投げの場面から問題を見つけ，学んだ内容で理論的に見通し，解決した。
他にも今まで身近な場面でなかなか解決できなかったことを，本時と同じように解決できることがあるかを問う。
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

資料３　学習プリント

ボールを的に当てる時，どんなことを意識して投げましたか？

ともきさんが投げたボールはどんな軌道を描くか。予想を描こう。

なぜ，ボールを投げた時その軌道は放物線なのだろう？

・ 物体を斜めに投げ上げると上方に飛んでいき，ある地点からゆるやかに落ち始め，やがてボールは地面に達する。このような運動を［　　　　　　］という。

ボールの軌道を知るためには何が分かればいいだろう？

→ ボールを投げてから，　①［　　　　　　］はどれだけ変化したか

②［　　　　　　］はどれだけ変化したか

斜方投射・・・斜め方向に投げ上げる運動

①［　　　　　］方向はどんな運動をしているの？

②［　　　　　］方向はどんな運動をしているの？

斜め方向の運動を，

［　　　　］方向の運動と［　　　　］方向の運動に，分けて考えればよい。

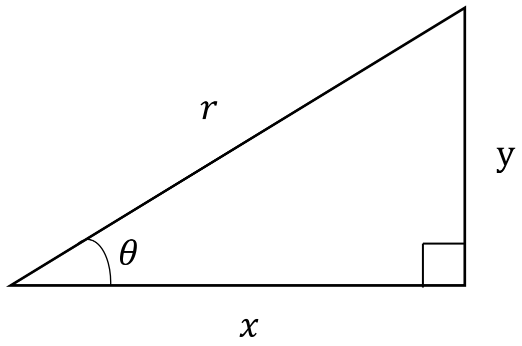
〈三角比〉

右の図の直角三角形において

$\frac{x}{r}$ ， $\frac{y}{r}$の値は角度θによってただ１つに決まる。

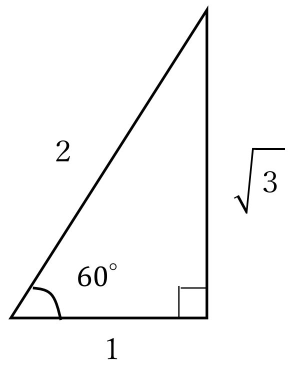
$\frac{y}{r}$ ＝ $\sin\theta$ （サインシータ）

$\frac{x}{r}$ ＝ $\cos\theta$ （コサインシータ） と書く。

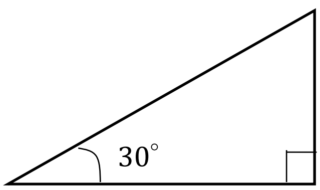


練習問題

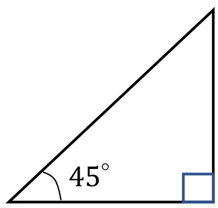
（1） 右の図において, $\sin 60^\circ$ の値を求めよう。



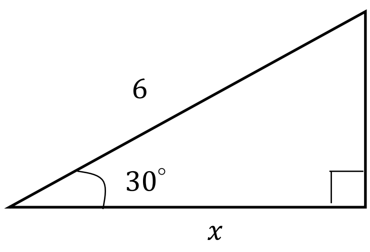
（2） $\cos 30^\circ$ の値を求めよう。



（3）$\cos 45^\circ$ の値を求めよう。

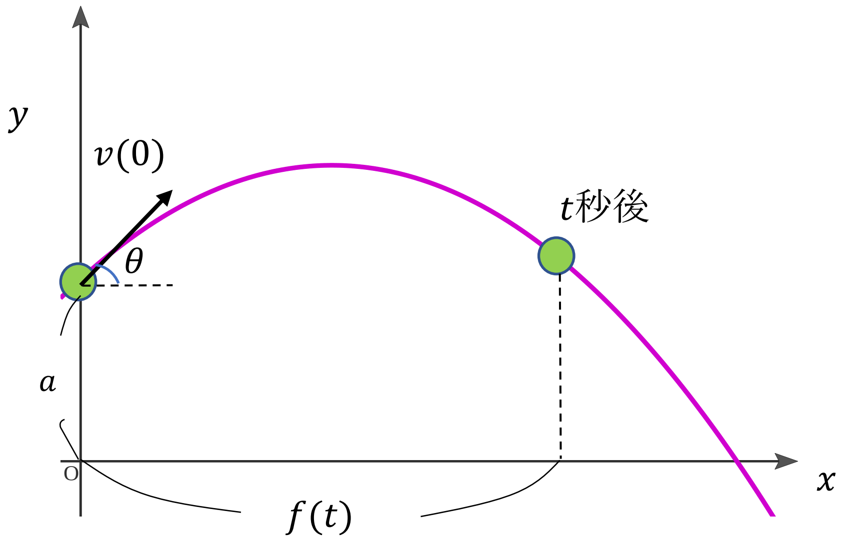


（4） 右の図において, x の値を求めよう。



水平方向の運動について考えよう。

① 高さa から,斜め上方にボールを初速$v(0)$,投射角 θで投げる。ボールを離した位置から，t 秒後のボールの位置までの水平距離$f(t)$をv (0), θ , t を使って表そう。

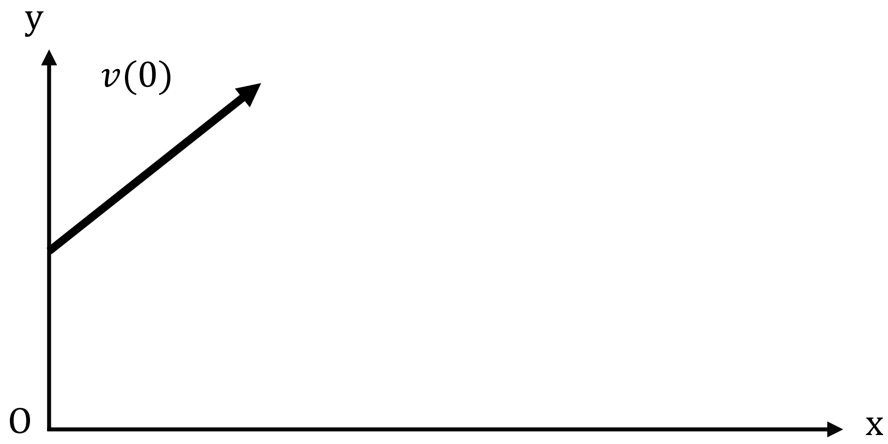


POINT！

水平方向はどんな運動をしているの？

➡　水平方向の運動は $\boxed{}$

(1)　初速$v(0)$ の, 水平方向の速さ$v_x(0)$を矢線で表そう。



（2） 物体は水平方向右向きに速さ$v_x(0)$ で等速直線運動をする。このとき，時間と速さの関係を縦軸 v，横軸T としてグラフで表そう。ただし，$t \geqq 0$ とする。

（3） 三角比を用いて，$v_x(0)$ を $v(0)$，θ で表そう。

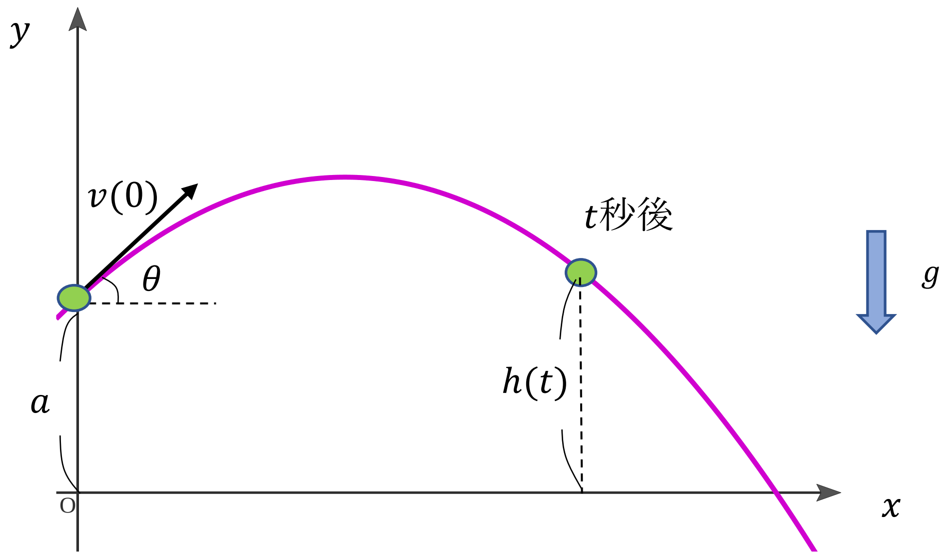
（4）物体を離してからt 秒間に進んだ水平距離 $f(t)$を$v(0)$，θ，t で表そう。

物体の水平距離 $f(t)$はグラフとT軸，v軸,， 直線$T=t$ に囲まれた

$\boxed{}$ と等しい。

鉛直方向の運動について考えよう。

② 高さa から,ボールを斜め上方に初速$v(0)$,投射角 θで投げる。ボールを投げてから t 秒後の物体の高さ$h(t)$を, $v(0), \theta, t, g, a$ を使って表そう。ただし,重力加速度の大きさはgである。



POINT！

鉛直方向はどんな運動をしているの？

鉛直方向の運動は $\boxed{}$

〈重力加速度〉

・地球の重力が物体に及ぼす加速度。その大きさを記号g で表す。

・一定時間内の速度の $\boxed{}$ である。

・重力加速度は $\boxed{}$ に一定で,その大きさは$g =$ $\boxed{}$ である

$$-g = \boxed{} \quad \cdots ※$$

等加速度直線運動の式を導出しよう。(PART 1)

物体の初速度を$v(0)$, t 秒後の速度を$v(t)$ とする。物体がt 秒間, 一定の加速度$-g$

で等加速度直線運動をするとき, ※より,

$$-g = \frac{v(t) - v(0)}{t - 0} = \frac{v(t) - v(0)}{t}$$

すなわち,

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

この式は, t , v を変数と見た時, v は t の $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ である。

この時, グラフは $\boxed{\qquad\qquad}$ で, 直線の$\boxed{\qquad\qquad}$ は$-g$, $\boxed{\qquad\qquad}$ は$v(0)$である。

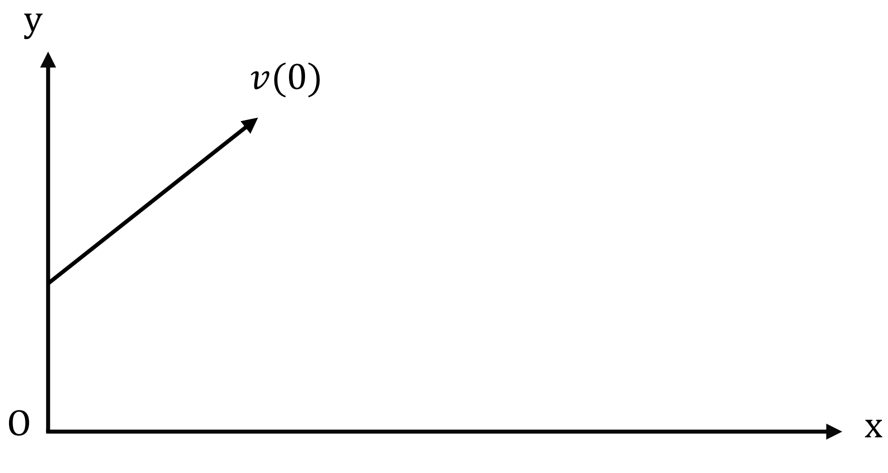
例

ボールを初速度$v(0) = +10m/s$ で真上に投げ上げる。

ボールを投げ上げてから2秒後のボールの速度を求めよう。

等加速度直線運動の式を導出しよう。(PART2)

(1)　初速$v(0)$ の, 鉛直方向の速さ$v_y(0)$を書こう。



（2） PART1 をもとにして直線の式を$v_y(0), v_y(t), g, t$ で表そう。

また，縦軸v_y，横軸T としてグラフを書こう。ただし，$t \geqq 0$ とする。

（3） グラフとT 軸との交点の座標を$(t', 0)$とする。t'を $v(0), g$ で表そう。また，その座標は鉛直方向の運動において何を表しているか考えよう。

鉛直方向の物体の移動距離をL とする。水平方向の時と同じように考えて，鉛直方向の物体の移動距離L を求めたい。

→ 鉛直方向の物体の移動距離L は，グラフとT軸，v軸，直線T t に囲まれた

$\boxed{}$ と等しい。

（4） ボールが達する最高点のy座標をYとし，t秒間等加速度直線運動をしたとする。ただし$t < t'$である。最高点に達する前の，ボールの移動距離Lおよび，地面からの高さ$h(t)$を求めよう。

（5） $t \geqq t'$ とする。最高点に達した後の，鉛直方向の物体の移動距離Lおよび，物体の高さ$h(t)$を求めよう。

（6） 三角比を用いて, $v_y(0)$ を $v(0)$, θ で表そう。

（7） 手からボールが離れてから t 秒後の物体の高さ $h(t)$ を， $v(0)$, θ , t , g , a を使って表そう。

（iv） $f(t) = x, g(t) = y$ と置き換える。

求めた2つの式の t を消去して, y を x の式で表そう。

$$\begin{cases} x = (v(0)\cos\theta)t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v(0)\,t\sin\theta + a \end{cases}$$

したがって, y はx の2次式で表されるので, y はx の2次関数である。

よって, ボールを斜め上方に投げた時のボールの軌道は $\boxed{}$ である。

確認問題１

地上$0m$からボールを 45°で投げた時の放物線の式を求めよう。

また, $y=0$ となるxを小数点第 2 位まで求めよう。

確認問題２

地上$2m$からボールを４５°で投げた時の放物線の式を求めよう。

また, $y=0$ となるxを小数点第２位まで求めよう。

〈解の公式〉

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$(a, b, c は定数, $a \neq 0$)の解は,

$x=$ $\boxed{}$

活動

試合に向けて，各グループで投球の方針を定めよう。

（方針）

表1

回数	１回目	２回目	３回目	合計
得点				

表2

	１人目	２人目	３人目	４人目	５人目	６人目	合計
合計 点数							