岐阜数学教育研究
2019，Vol.18，89－116

最適配置問題を取り上げた教材開発と実践

伊藤杏優[1]，栢植直樹[2]

本研究では，数学を活用し現実の現象を解明することのできる高校生対象の教材開発を行った。題材として，バス停の最適な配置に関する内容を取り上げた。本教材の実践を通して，身近な現象に対して数学が活用できることに興味をもち，数学を活用する技能を身につけることを目指した。本論文は，教材の内容，実践の結果及び考察について述べる。
＜キーワード＞ 数学活用，最適配置，関数，数学モデル

1. はじめに

現在の高等学校の数学の授業では，数学を活用する機会が少ないと筆者は考える。実際，小学校や中学校で使用されている教科書を見ると，各単元の終わりに単元の内容を活用する問題が用意されていることが多い。その一方で，高等学校の教科書ではそれがほとんど見られない。この現状を鑑み,学んだことを日常生活に活用できる教材を開発し，高校生を対象に実践したいと考えた。この教材の実践を通して，様々な日常の場面を論理的に捉えるとともに，問題の解決に数学を生かそうとする高校生の姿を目指す。

ところで，文部科学省中央審議会の 2040 年に向けた高等教育のグランドデザイン[1]によると，人工知能や技術革新が進んでいく社会において，「基礎的で普遍的な知識を持ち，その知識を活用でき，技術革新と価値創造の源となる飛躍知の発見・創造など新たな社会を牽引する能力が求められる。」と述べられている。さらに，平成 30 年告示高等学校学習指導要領解説数学編[2]では，「現実世界と数学の世界における問題解決の過程を学習過程に反映させること」が必要であるとも述べている。これらのことからも筆者は，身近な事象に対して，数学を用いて解明する過程を体験し，数学を活用することのできる力を身につけさせることのできる授業を作成することが必要であると考えた。特に，日常の現象から数学モデルを作成し，数学を用いて得られた結果を吟味させ，数学を活用する力を育成することは重要であると捉えている。

本教材では，高校数学で学習する二次関数や積分を用いて，バス会社や通学者にとって有益なバス停の配置を求める内容を扱う。本論文では，開発した教材の内容と，実践結果について報告する。

2. 教材について

本教材は，バス会社の利益が最大となるバス停の配置や通学者の通学時間が最小となるようなバス停の配置を求める内容である。私たちが日常で利用しているバスの路線図を見てみると，バス停のほとんどが等間隔に並んでいないことがわかる。このことについて生徒に疑問をもたせ，バス会社や通学者にとって有益なバス停の配置について，数学の知識を用いて明らかにしていく。この活動を通して，生徒自身が身

1 岐阜大学大学院教育学研究科
2 岐阜大学教育学部

近な現象に対して，数学を用いて解明できる力を身につけさせていく。

3. 授業実践の概要

3.1 本授業のねらい

本授業のねらいを以下のように設定した。

・バス停の配置の根拠を数学的に明らかにする活動を通して，身近な問題に数学が活用できることを知る。

・身近な問題に対して数学モデルを作ることができる。

本授業のねらいの達成によって，日常生活における数学の有用性を実感してもらいたいと考えている。また，「問題解決の過程を振り返って考察を深めたり評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う」（参考文献[2]参照）といった高校数学を学ぶ意義についても生徒自身で考えることができるようにしてもらいたいと考えている。

3.2. 授業の構成

本授業は，以下のように構成される。

(1)導入

バスの路線図を見せ，バス停は必ずしも等間隔に置かれていない事実を提示する。そして，なぜ等間隔に停留所が設置されていないかと疑問をもたせる。次に数学的モデリングについて説明する。数学的モデリングについては参考文献[4]を参考にした。

(2)展開 1

バス停の最適配置問題の把握と状況を整理し，バスの総運賃を最大にするバス停の最適な配置について予想させる。その後，バスの総運賃を最大にするバス停の配置について，二次関数を用いて求める活動を行う。

展開 2

学生の通学時間の総和を最小にするバス停の配置について，積分を用いて求める活動を行う。

(3)まとめ

数学的モデリングについての理解を深める。その後，身近な現象に対して簡単な数学モデルを作成する。

以下，授業内容を詳しく説明していく。

(1)導入

岐阜駅周辺のバス停の路線図を提示する。バス停は必ずしも等間隔に並んでいないことから，バス停の配置について疑問をもたせる。高校生の通学ではバスを利用する場合が多いと考えられるため，興味をもたせることができ，生徒の問題に取り組む意欲を高めることができる。その後，バス停の配置について数学を用いて解明するために数学モデルを使用することを伝え，数学的モデリングについての内容と流れを説明する。説明の中で，日常の現象の究明に数学を用いて扱うためには，今回の例であれば，バスの速度やバスの運賃などを仮定して数学モデルを作成する必要があることを伝える。また，そのような仮定から場面を簡略的に捉え，数学を用いて扱えるようになることを生徒に理解させる。次に生徒に数学モデルを提示し，問題の状況を把握させる。具体的な数学モデルと仮定は，次の展開 1 で述べる。

(2)展開 1

生徒に次の問題を提示する。問題の図については参考資料③に載せている。

問題①

数直線上の$x = 1$を点 A として線分 OA を考える。点 O に大学があり線分 OA に学生が単位長さあたり一定の割合 ρで分布している。バス会社

は線分 OA 上にバス停を一つ設置し，そこから大学への送迎バスを運行しようと計画している。

この時，各学生の支払う運賃の総和を最大にするにはバス会社はバス停をどこに設置すればよいだろうか。ただし，バスの運賃は大学からの距離に比例するとして，線分上の長さ1あたりr円かかるとする。ただし，以下を仮定する。

仮定

- 学生の通学方法は徒歩かバスである。徒歩とバスを併用しても良い。
- 各学生の歩行速度とバスの速度はそれぞれ一定であるとする。
- 歩行速度vとバスの速度Vの関係は$V = 4v$であるとする。
- 学生は通学時間の最も短い通学方法を選択する。ただし通学時間の等しい通学方法がある場合は，最もお金のかからない通学方法を選択する。
- 学生がバスを利用する場合，バス停での待ち時間は無視できるとする。
- バスにはいくらでも学生が乗れるとする。

本来であればバスの速度のような変数であるものを定数として仮定することで，高校生でも扱うことのできる内容にしていることに注意する。

問題を把握させた後に，仮定をふまえて各学生の支払う運賃の総和を最大にするためにはどこにバス停を配置すれば良いかを予想させ，その根拠を書かせる。この活動の意図は，問題に対する理解を深めることと，事象を観察し，仮説を立て，検証するという問題解決のプロセスを経験させる準備である。尚，この問題の解答例については，文末の参考資料⑥に載せている。

問題を解く過程については，以下の誘導を与える。

・STEP1

バス停が点xにあるときの一人あたりのバスの運賃を求めよう。

・STEP2

線分 OA 上の点yに住む学生がバス停を使うとしてyの範囲を求めよう。

・STEP3

STEP2 よりバス停を使う学生の総人数を求めよう。

・STEP4

STEP1〜3 より各学生の支払う運賃の総和$F(x)$をxを用いて表し，最大値とそのときのxの値を求めよう。

展開 2

問題②

問題①と同じ仮定のもとで，バス停を一つ設置するとき，各学生の通学時間の総和を最小にするにはバス会社はバス停をどこに設置すればよいだろうか。歩行速度vとバスの速度Vの関係は$V = 3v$とする。

問題②についても同様に以下の誘導を与える。

・STEP1

$f(y)$をバス停を地点xにおいたときの点yに住んでいる学生の通学時間とする。このとき$f(y)$をyについて場合分けをして求めてみよう。

・STEP2

徒歩のみで大学まで通学する領域に住む学生の通学時間の総和を$T_1(x)$ としたとき， $T_1(x)$をxの式で表そう。

・STEP3

STEP2 と同様にして，バス停より大学側に住んでいるバスを使う学生の通学時間の総和$T_2(x)$ ，バス停より点 A 側に住んでいるバスを使う学生の通学時間の総和$T_3(x)$として，それぞれxの式で表そう。区間$[0, 1]$に住む学生の通学時間の総和を$T(x)$として，$T(x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$とな

ることを使って$T(x)$をxの式で表す。$T(x)$が最小となるxの値を求めよう。

特に，問題②のSTEP2については，数学Ⅲで学習する区分求積法が必要であるため，丁寧な誘導をつけた（参考資料②参照）。また，STEP3では，授業内容を理解しているかの確認を行うために，小テストを行った（参考資料③参照）。

(3)まとめ

今回の授業内容であるバス停の配置を例として，数学モデルを繰り返し修正していくことの必要性を説明する。そのとき，数学モデルから得られた数学的結果と現実事象を比較する必要性も理解させる。さらに仮定を変更・修正をするときには，「人口分布」や「バス停の数」など，着目すべき要素についていくつか提示をする。

授業後に以下のレポートを出題する（参考資料⑤参照）。このレポート課題では，生徒が考えてきた数学モデルに対して，以下の2点を満たしているかを評価のポイントとする。

(評価のポイント1)

身近な現象について，仮定をおいて数学モデルを作ろうとしているか。

(評価のポイント2)

作成したモデルを数学で扱うことができるか。

このレポートの結果及び考察は第4節で述べる。

4.実践結果と考察（参考資料①参照）

場所：岐阜大学教育学部A棟426教室

日程：令和元年6月25日（火）90分　24名

　　　令和元年7月2日（火）90分　22名

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座1年生

この教材は高校生を対象として開発した。今回の実践では時間の関係上，大学1年生を対象として行った。

今回の実践対象は「学生」であるが，「生徒」と表すこととする。

4.1活動の様子

(1)導入（3.2 授業の構成参照）について

大学までバスで来ている生徒は全体の8割ほどであり，バスを身近に感じている様子であった。バスを利用する生徒が多い一方で，バスの路線図を見たことがある生徒は少なく，バス停が等間隔ではないことに驚いている生徒が大勢いた。この姿から，バス停の配置に対して関心を生徒にもたせられたと考える。

数学モデルを提示する場面では，そもそも数学モデルに初めて触れる生徒がほとんどであった。そのため，仮定はすべてこちらの方から提示したが，バス停の配置を解明するためにどのような仮定をする必要があるか，議論させても良かったのではないかと考える。提示した数学モデルに対して，現実の場面から速度や運賃を定数で置き換える等の仮定をしたことは，ほとんどの生徒がわかっていた。バスの運賃の総和が最大になるバス停の位置を予想させたときは，区間の中央より大学側が10人，区間の中央が2人，区間の中央より点A側が10人であった。それらの理由として「バス停をなるべく左側に置いた方がバスを使う人数が多くなる。」や「バス停をなるべく右側にした方がバスの運賃を高くすることができる。」が挙がった。これより，問題文と仮定からバス停の配置の予想はほとんどの生徒がすることができていた。しかし，一つの要素のみに着目してしまい，運賃と人数の両方の要素を考えることのできる生徒がごくわずかであるとがわかった。また予想の

段階で，バス停を利用する学生の範囲を求めようとする生徒が4名おり，範囲まで求められた生徒は2名だった。

(2)展開について

展開1

STEP1 はよくできていた。単位長さあたりの計算も苦手としていなかった様子である。STEP2 は苦戦する生徒が多くいた。バス停よりも右側の全ての学生が，バスを利用することは仮定から理解することができていた。しかし，バス停の位置や速さ，学生の住む位置などで文字式が多く使われていたため，大学までにかかる時間を計算するときに間違える生徒が数名いた。中には，道のりと距離と時間の関係の式についても間違えている生徒もいた。これは，高校数学では具体的な数値で行う計算がほとんどであり，文字を多く使って問題を解くことの経験をほとんどしていなかったからであると考える。また，バス停を利用する学生が住んでいる区間の端点を，方程式を用いて求めさせた。しかしながら，うまく方程式を作ることができない生徒が多くいた。これも上記と同様の原因が考えられる。また，一次不等式を用いてバスを使う学生の範囲を求めていた生徒もいた。STEP3 と STEP4 は，ほとんどの生徒が出来ていた。最大値をとるときのxの値を求めるときには，平方完成だけではなく，微分を用いて求めている生徒も 5 名いた。計算が早くできた生徒には，同じ仮定の元で，バス停を2つ設置するときの場合を考えさせた。2 人の生徒がバス停を使う学生の範囲まで求めることができており，少し時間を取れば答えまで求められていたと考える。

最後に，数学を用いて考えることの有用性を実感させるために，以下のようなことを行った。答えを求めた後に，バス停を$x = 1/2$に置いたときと，実際の最適配置である$x = 4/5$に置いたときでは後者の利益が前者の利益の約1.2倍になることを伝えた。これは一年間のバス会社の利益に換算すると約 6000 万円の差である。このことを聞いて多くの生徒がかなりの差が生まれることに驚いていた。

展開2

STEP1 は予想以上によくできていた。8 割程度の生徒が自分自身で場合分けを行い各場合の通学時間を求めることができていた。求められない生徒も，スライドを用いて説明すると理解することができていた。また，絶対値を使って場合分けをする生徒もいた。STEP2 における通学時間の総和を計算するための考え方は戸惑う生徒が多かった。区分求積法の考え方は出てこなかったものの，各学生の通学時間のグラフに囲まれる面積が通学時間の総和になるのではないかと予想する生徒は多くいた。これは，物理基礎で学習したことを関連させたと考えられる。また，通学時間のグラフでは通学時間の総和が求められないので，細く分割して，一つ一つ足していくと考えた生徒もおり，区分求積法につながる発想ができていた。その後の式変形については多くの生徒が理解していたが，n等分した分割の幅を0に近づけるとグラフの面積に収束することは1人もわからなかった。これは，生徒が区分求積法に関する演習問題を解くだけの表面的な理解しかできていないからだと考える。区分求積法の概念そのものを理解している生徒はほとんど存在しないことが分かった。その後，区分求積法についての復習をすることで，3 人ほどの生徒が収束する値を求めることができていた。これらから，区分求積法の内容については，数学が得意な生徒にとっても困難であることがわかった。

まとめについて

後に述べるレポートの内容の結果から多くの生徒が数学的モデリングの内容を理解すること

ができた。また，レポートを説明した後では，「自分で数学モデルを解いてきてもよいか。」と聞いてくる意欲的な生徒もいた。

レポートについて

ここでは具体的なレポートの内容とともに考察について述べる。評価のポイントについては 3.2 を参照にされたい。

モデル例 1

〇回転寿しチェーンの店舗を比較すると，どちらの店の方が利益をのばせるだろうか。

主な仮定

・提供するものは全て 100 円均一であるとする。

・営業時間は 6 時間とする。

・営業時間内は常に満席であり，1 グループ 1 時間滞在すると考え，1 日に 300 グループ来店すると考える。回転寿しのチェーン店舗は注文受付の機械のみを使って寿司を届ける店舗と注文受付の機械と回転レーンを使って届ける店舗がある。

・全員一人 8 皿食べるとする。

このモデルを作成した生徒は自分自身で問題を解くところまで行っていた。そのため，問題を解く途中で必要な仮定を付け加える記述も見ることができた。また，問題の答えから，利益をより多くするための要素を考察することができていた。

モデル例 2

〇地球温暖化を抑制するためには，日本が減らさなければいけなければならない森林伐採の量はどれくらいか。

主な仮定

・森林は日本で一様に分布をしている。

・森林 1㎢が 1 年間に吸収する二酸化炭素の量約 10t とする。

このモデルでは単位面積あたりどのくらいの森林が存在するのか等の仮定が置かれていなかったため，問題を最後まで解くことができなかった。この問題については生徒が自分自身で解いていなかった。その他のレポートについても数学で扱うことができないモデルは仮定不足が多かった。そのため，今回のレポートでは問題を解くことを強制しなかったが，生徒自身に問題を解かせることが必要であることがわかった。

以下，その他のモデル例を載せておく。

モデル例 3

〇中学校での自転車通学と徒歩通学はどのように分けられているのだろうか。

主な仮定

・座標平面上の円を考え，中学校は原点にあるものとし，中学校の校区を円周上，または円の内部とする。

・最も遠い場所から通う徒歩通学の生徒の通学時間が最も遠い場所から通う自転車通学の生徒の通学時間より長くなってはいけない。

・生徒の通学方法は徒歩か自転車であり併用はできない。

この問題についても生徒が自分自身で問題を解いていた。

モデル例 4

〇行列のできるラーメン屋 A,B でどちらの方が早く入れるか。

主な仮定

・ラーメン屋 A では自分の前にx人ラーメン屋 B では自分の前にx人いるとする。

・ラーメン屋 A は単位時間当たりに$3y/2$人，ラーメン屋 B は単位時間あたり$4y/3$人が店から出て行くとする。

モデル例 5

〇米一合には何粒あるのか。

主な仮定

・米粒は体積q㎤の立方体で隙間なく詰められるものとする。

・米一合はa(g)であるとする。

・米粒の密度はρ(g/㎤)とする。

モデル例 6

◯複雑な道をより早く目的地にたどり着くためにはどの道を選択するのが一番良いか。

主な仮定

・常に制限速度で車は運転するとする。

・信号は1/2の確率で引っかかり，引っかかったら 1 分かかるとする。

モデル例 7

◯バスケットボールで 45 度からボードを使用してシュートをするときにどのように当てると 1 番入りやすいか。

主な仮定

・ゴールの真下から 2m 離れた 45 度の角度からシュートを打つこととする。

・リングの大きさはボール 2 個分と等しい。

4.2 アンケート結果（参考資料④参照）

生徒には事前および事後にアンケートを実施した。その項目内容と回答例をいくつか述べる。選択式の質問に関しては，１，思う，２，少し思う，３，あまり思わない，４，思わないの 4 つの選択肢を準備した。

授業前アンケート回答者数　20 名

授業後アンケート回答者数　23 名

授業前アンケートの結果

授業前 1. 身近な問題について，数学を用いて考えたいと思いますか。

回答　1，2 名　2，12 名　3，5 名　4，1 名

授業前 2. 思う・少し思うと答えた人　数学を用いてどのような問題を考えたいと思いますか。

回答例

・目的地までの最短距離・時間

・身近な問題

・物体の運動

・お金に関わること

など

授業前 3. 思わない・あまり思わないと答えた人　なぜ考えたくないのですか。

回答例

・難しそうに思えてしまうから

・どこが数学と結びついてるかわからない

など

授業前 4. 中学校・高等学校で学習した「関数」は，日常生活で役に立っていると思いますか。

回答　1，4 名　2，1 名　3，11 名　4，1 名

未回答　3 名

授業前 5. 思う・少し思うと答えた人　どのような部分で役にたっていると思いますか。

回答例

・ゲームにおける育成

・買い物の値段を計算するとき

授業前 6. 思わない・あまり思わないと答えた人はなぜ役に立っていないと思いますか。

回答例

・具体的に思い浮かばないから

・2 次関数や 3 次関数を日常で使うときがないから

・これまで役に立ったことがなかったから

など

授業前 7. 今までに「数学的モデリング」という言葉を聞いたことはありますか。

ある　1 名　　ない　19 名

授業後アンケート結果

授業後 1. 数学的モデリングについて興味をも

つことができましたか。
はい　18名　　　いいえ　0名

授業後 2. 中学校・高等学校で学習した「関数」は，日常生活で役に立っていると思いますか。

回答　1，4名　2，13名　3，2名　4，0名

授業後 3. 今後，数学的モデリングを使って身近な問題について，数学を用いて考えたいと思いましたか。

回答　1，6名　2，11名　3，1名　4，0名

授業後 4. 思う・少し思うと答えた人　それはなぜですか。

回答例

- 日常生活の現象を数学的に考えることが面白いと思ったから。
- 数学的モデリングを使うことで，今まで複雑で難しいと思っていた問いも分かりやすく解けて良いと思った。
- 「なぜバス停はこの間隔で置かれているのか」など仕組みがわかると面白いから。
- 数学への理解が深まりそうだから。

など

授業後 5. 思わない・あまり思わないと答えた人それはなぜですか。

回答例

- 自分で仮定を設定することが難しいと思うから。

授業後 6. この講義を受けての感想を教えてください。

回答例

- ただひたすら計算するのではなく，身近なことに発展させることができてとても面白い授業でした。
- この世界の現象を数学的に捉えるのはワクワクして面白いです。
- 一見情報が多くわかりにくい問題も，簡単な場面から順番に考え答えを導いていくやり方がとても楽しかった。この考えは，将来小学校や中学校の教員になったときに求められる力のひとつだと思うので伸ばしていきたいと思う。
- 最初は面倒くさいと思ったが，やってみると案外面白かった。
- ただ板書を写すだけの授業より面白かった。
- とても面白かったし，90分の授業があっという間でした。説明も分かりやすくて授業を受けるのが楽しかったです。
- 難しい内容だと感じたけど，今までに学んだことを使って身近なことを数学的に捉えることができるのだと分かりました。
- 身近なものをテーマにするのはイメージしやすくて楽しかった。
- 身近なことをモデル化したいと思った。
- 今までに解いたことがないケースを解いたので楽しかったです。
- 研究をするのであればこういうことをしてみたいと思った。

4.3 分析と考察

4.2 より分析した結果とその考察について述べる。アンケート結果について詳しくは4.2を参照していただきたい。

(1) 対象者について

授業前 1. より今回の集団は数学を活用しようとする意欲のある集団であることがわかった。

授業前 2. と授業前 3. より自分自身の利益になることを数学を用いて考えたいと思う生徒が存在することが分かった。中には，数学と物理を関連させて問題を解決したいという生徒もおり，教科横断的な教材の需要もあることがわかった。一方で，数学を日常生活で活用したいと思わない生徒が3割いることがわかる。これは数学を活用することで生活がより便利になった経験がないことや，日常の現象から数学モデルを

作成できないからであると考える。授業後 3 より，数学的モデリングの流れを説明した後は，1 名の生徒を除きすべての生徒が身近な問題について数学を用いて考えたいという結果となった。このことから，数学的モデリングを学習することは生徒にとって，数学を活用する意欲を向上させることがわかった。授業前 4.より 5 割以上の生徒が関数は日常生活に役立っていないと考えていることがわかる。この理由の大部分は，授業前 6.より，関数を用いて日常生活の問題を解決したことがないからである。授業後 2.より今回の授業では，関数を用いて利益を最大にできたと実感出来る題材であったため，多くの生徒が関数の有用性を実感することができた。

アンケート結果とレポート結果により，今回の対象集団は，身近な問題に数学を使ったことがなかったものの，数学的モデリングを学習することで，数学を活用する意欲と技能をともに伸ばすことができたと考える。

(2) 教材・授業ついて

活動全体を通して意欲的に取り組む生徒が多かった。授業後 6.からも，興味をもって授業に取り組めた等の肯定的な意見が多かった。特に，バス会社の利益を最大にするバス停の配置を予想させる部分では，様々な予想を立てており，関数を用いて解決することへの動機付けをすることができた。これらのことから，生徒が授業に積極的に取り組もうとする姿勢を養うことができたと考える。また，金銭等の生徒にとって重要なものを教材として取り入れることで生徒が教材の必要性を自分自身で実感することで数学の有用性を理解することができたと考える。

高校数学の扱いについて，二次関数の計算や積分の計算はよくできていたが，問題の中に文字が多くあり戸惑っている生徒が多くいた。そのため，生徒の習熟度に応じて，簡単のために文字を具体的な数字に置き換えて問題を解かせることも必要であることがわかった。授業中では，「区分求積法の活用の仕方がわかって面白い」と言う生徒もいた。このことから，数学の様々な活用例を内容に組み込むことで，数学への興味関心を高められることがわかった。

全体を通して，高校数学の内容を扱ったため，大部分の生徒が自分自身の力で答えを求めることができた。今回は大学の数学教育講座を対象にした実践であったため，数学についての学力が高かった。実際に高校生にこの実践を行うためには，区分求積法の部分をもう少し丁寧な誘導を付け加えることを行う必要があると考える。

4.4 ねらいの達成度

(3.1 本授業のねらい参照)

4.2 授業後アンケートの結果より，概ね達成することができたと考える。特に関数に対しての有用性については，授業前と授業後で比較をすると 10 名が好意的に捉える選択肢に移行した。このことから，高校数学で学習する内容を日常生活に活用できるような教材に取り組むことで数学の有用性を生徒が実感できることがわかった。

4.2 授業後アンケートの結果より 1 名を除きすべての生徒が数学的モデリングに興味を持つことができた。またレポート結果より，有用性のある数学モデルを作ることはできなかったが，仮定を数個することにより簡単な数学モデルは多くの生徒が作ることができた。

5.今後の課題

4.3,4.4 より今後の課題として，以下の 3 点を挙げる。

①数学を活用して問題解決をする状況を多く紹介していく。

②数学的モデリングの仮定の再考を行う部分を授業に取り入れる。

③授業実践対象者の習熟度によって，問題の誘導を工夫する。

今回の実践では高校数学の範囲から逸脱することなく，数学を活用する題材を作ることができた。また，実践における生徒の姿から，生徒にとって数学を活用する経験が現在の授業の中で少なく，教師側から数学の活用例を多く提示し経験を積ませる必要性を改めて再認識できた。一方，今回は数学的モデリングの得られた結果を現実事象と照らし合わせる部分を授業に取り入れることができなかった。そのため，答えを求めるのみで満足してしまう生徒がほとんどであった。次の教材開発では，現実事象と対応させて仮定を再考させる過程も取り入れていきたい。また，今回は発展的な内容も取り入れたが，数学が得意な生徒達であったので，理解することができたと考える。そのため，習熟度に応じては，区分積法の証明等を省略することなどをして授業をしていく必要がある。これらのことから以上の課題設定を行い，教材のさらなる改良をしていきたい。

6. 終わりに

今回の授業では，バス停の数を1個のみで計算をした。バス停の数を2個3個と増しても高校数学の範囲を逸脱することなくバス会社の利益が最大となるバス停の配置を求めることができる。このように，問題の広がりがあるものを授業の中で扱うことによって，数学的モデリングを考えることへの自然なアプローチとすることができる。また，授業の中では，高校の数学の授業とは違ったことや，身近な現象について数学を用いて解明することができることから，意欲的に取り組む姿を多く見ることができた。

参考文献

[1]文部科学省中央教育審議会，2018，2040年に向けた高等教育のグランドデザイン（中教審第211号），文部科学省

[2]文部科学省，2018，高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 - 数学編・理数編，文部科学省

[3]岡部篤行，鈴木敦夫，1992，シリーズ【現代人の数理】3 最適配置の数理，朝倉書店

[4]柳本哲，2011，数学的モデリング－本当に役立つ数学の力，明治図書

参考資料①　学習指導案

1．対象学年：高等学校　第3学年

2．ねらい

・バス停の配置の根拠を数学的に明らかにする活動を通して，身近な問題に数学が活用できることを知る。

・身近な問題に対して数学モデルを作ることができる。

3．本時の展開

	○学習活動　・予想される生徒の発言	○指導　△援助
導入	1日目 ○バス停の路線図の提示をする。 ○バス停の配置について等間隔に並んでない等の疑問をもたせる。 ・バス停は等間隔に並んでいない。 ・岐阜駅に近くなるほどバス停の数は増えている。 ・バス停の配置について、生徒自身の予想と数学的結果との比較をすることで数学の有用性を実感させる。 ○数学的モデリングについての基礎知識の説明をする。 ○問題①および仮定の提示 ○考えてみよう 学生の運賃の総和を最大にできるバス停の配置はどこだろうか。 ・線分 OA の中点より左（なるべくバス停を左に置いた方が多くの学生がバスを利用するから） ・線分 OA よりも右側（なるべくバス停を右側に置いた方がバスの運賃が高くなるから） ・線分 OA の中点 ○予想をさせることで、数学的結果との比較をできるようにする。	○バス停の配置を解明する例と数学的モデリングの流れがどのように対応しているか説明する。 ○仮定を具体的な数字に置き換えるなどして、生徒に理解させる。
展開	○バスの運賃の総和を求めよう。 STEP①バス停が点xにあるときの一人当たりのバスの運賃を求めよう。 ・単位長さあたりのバスの運賃を利用する STEP②　点yに住む学生がバス停を使うとして、yの範囲を求めよう。 ・（直接徒歩で大学へ行くのにかかる時間）＜（バス停まで歩く時間＋バス停から大学までにかかる時間）となれば良い STEP③　STEP②よりバス停を使う学生の総人数を求めよう。	○バスを利用する学生について、スライドを活用して理解させる。 ○求めたい数量はどの仮定を用いれば求めることができるか確認させる。

まとめ	・単位長さあたりに住む学生の人数を利用する STEP④　STEP①〜③より$f(x)$をxを用いて表し、最大値とそのときのxの値を求めよう。 ・平方完成を使い最大値を求める 〇未知数を文字で置き、関数を使って求めることで、最大値を効率よく求めることができることを実感させる。 〇自分の予想したバス停の位置の総運賃と最大の総運賃を比較させる。 ・1 年を通して考えると利益にかなりの差が生まれる 〇確認の小テスト①を行う。 --- 2 日目 〇数学的モデリングの流れの復習をする。 〇問題②および仮定の提示 〇通学時間の総和を求めよう。 STEP1 $f(y)$をバス停を地点xにおいたときの点yに住んでいる学生の通学時間とする。 STEP2 領域Ⅰに住む各学生の通学時間の総和を$T_1(X)$としたとき$T_1(X)$をXの式で表そう。〇区分求積法（数学Ⅲ）の活用の仕方を知る。 STEP3 STEP2 と同様にして領域Ⅱに住む学生の通学時間の総和$T_2(x)$, 領域Ⅲに住む学生の通学時間の総和 $T_3(x)$としてそれぞれxの式で表そう。 〇数学的モデリングのサイクルを説明する。 ・今回の例を踏まえて身近な現象について数学モデルを作成できるようになる。 〇確認の小テスト②をする。 〇レポート課題を出題する。	△2 次関数の最大値・最小値の求め方を復習する。 △岐阜バス線の 1 年間の利益は約 3 億円であることを伝える。 △バス停を使う学生の範囲を求める復習をする。 △通学時間の求め方の復習をする。 〇学生の住んでいる場所によって通学時間の表し方が変わることに注意させる。 〇場所によって通学時間が違うので、（人数）×（通学時間）とはできないことを確認させる。 〇通学時間と学生住んでいる場所のグラフを提示することで、区分求積法の発想に気づかせる。

参考資料②　授業プリント

[最適配置問題授業プリント]

○身の周りの現象を数学を用いて解明するためにはどうしたら良いのだろうか？
（ここの余白を使い、スライドを参考にして自由にメモをしてください。）

・問題１（数学モデル）
数直線上の $x=1$ を点Aとして線分OAを考える点Oに大学があり線分OAに学生が単位長さあたり一定の割合 ρ で分布している。バス会社は線分OA上にバス停を一つ設置し、そこから大学への送迎バスを運行しようと計画している。
この時、各学生の支払う運賃の総和を最大にするにはバス会社はバス停をどこに設置すればよいだろうか。
ただしバスの運賃は大学からの距離に比例するとして単位長さあたり r 円かかるとする。
・仮定
①学生の通学方法は徒歩かバスである。徒歩とバスを併用しても良い。
②各学生の歩行速度とバスの速度はそれぞれ一定であるとする。
　歩行速度 v はバスの速度 V よりも小さいとして、$V=4v$ であるとする。
③学生は通学時間の最も短い通学方法を選択する。ただし通学時間の等しい通学方法が２つ以上ある場合は、最もお金のかからない通学方法を選択する。
④学生がバスを利用する場合、バス停での待ち時間は無視できるとする。
⑤バスにはいくらでも学生が乗れるとする。

～考えてみよう～
学生の支払う運賃の総和を最大にできるバス停の位置を予想してみよう。また、その場所を選んだ理由を書こう！

バス停を線分OA上の点 xに配置したときの各学生の運賃の総和を$F(x)$として$F(x)$を最大とするxの値のそのときの最大値を次のSTEPに従って求めてみよう。

STEP①
バス停が点xにあるときの一人当たりのバスの運賃を求めよう。

STEP②
点yに住む学生がバス停を使うとして、yの範囲を求めよう。

STEP③
STEP②よりバス停を使う学生の総人数を求めよう。

STEP④
STEP①～③より$F(x)$をxを用いて表し、最大値とそのときのxの値を求めよう。

★チャレンジ問題１
問題１と同じ仮定のもとで、バス停２つを区間[0,1]に自由に配置するとき、学生の支払う運賃の総和を最大にするためにはバス停をどのように配置すれば良いか。

○数学的モデリングのサイクル

・問題2

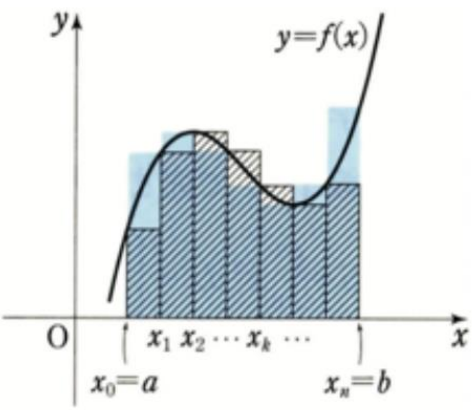
問題１と同じ仮定のもとで、バス停を一つ設置するとき、各学生の通学時間の総和を最小にするにはバス会社はバス停をどこに設置すればよいだろうか。次の手順で求めてみようただし、歩行者とバスの速さの関係は $V = 4v$ とする。

STEP①

$f(y)$ をバス停を地点 xにおいたときの点 yに住んでいる学生の通学時間とする。このとき $f(y)$をyについて場合分けをして求めてみよう。（ヒント：場合分けは３通りします。）

STEP②
領域Iに住む各学生の通学時間の総和を T_1 としたとき、T_1 を x の式で表してみよう。
同様にして、領域IIに住む学生の通学時間の総和 T_2 と領域 III に住む学生の通学時間の総和 T_3 をそれぞれ x の式で表そう。

区分求積法



$$x_0 = a, x_n = b, x_k = k\Delta x,$$

$$(k = 0, 1, 2, ..., n), \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \quad \text{（斜線の長方形の面積の和）}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \text{（灰色の長方形の面積の和）}$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

STEP③
区間[0,1]に住む学生の通学時間の総和をTとして、$T=T_1+T_2+T_3$となることを使ってTをxの式で表し、最小となるxの値を求めよう。

★チャレンジ問題2
問題１と同じ仮定のもとで、線分OA上に学生が分布関数 $\rho(x)=x$で分布しているとき、各学生の支払う運賃の総和を最大にするためには、バス停をどこに配置すればよいか。

参考資料③　小テスト

小テスト①
問題用紙

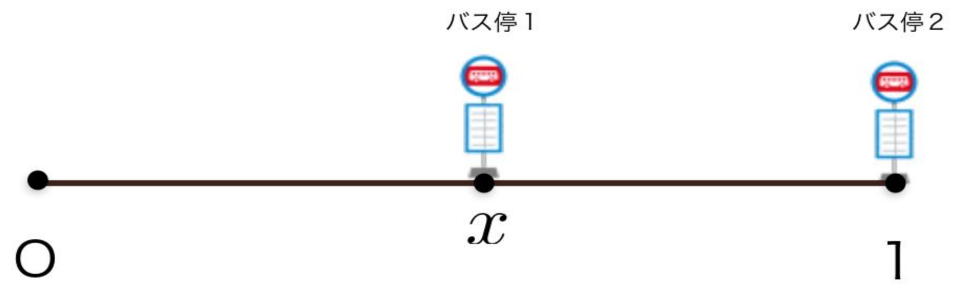
配点（　　/7）

数直線上の$x = 1$を点Aとして線分OAを考える点Oに大学があり線分OAに学生が単位長さあたり一定の割合 ρで分布している。バス会社は線分OA上にバス停を二つ設置し（それぞれバス停１、バス停２とする）そこから大学への送迎バスを運行しようと計画している。
このとき、バス停２は $x = 1$ に設置してあるとして、バス停１を線分OAのどこに設置をすれば、各学生の支払う運賃を最大にすることができるか考えよう。
ただしバスの運賃は大学からの距離に比例するとして単位長さあたりr円かかるとする。

・仮定

①学生の通学方法は徒歩かバスである。徒歩とバスを併用しても良い。
②各学生の歩行速度とバスの速度はそれぞれ一定であるとする。
　歩行速度 vはバスの速度 Vよりも小さいとして、$V = 4v$ であるとする。
③学生は通学時間の最も短い通学方法を選択する。ただし通学時間の等しい通学方法が２つ以上ある場合は、最もお金のかからない通学方法を選択する。
④学生がバスを利用する場合、バス停での待ち時間は無視できるとする。
⑤バスにはいくらでも学生が乗れるとする。

参考図



★バス停１を点 $x(0 \leqq x \leqq 1)$ に配置するとして考えよう。

（注意）以下の問題では答えにvおよびVを使ってはいけないものとする。

（１）バス停１を利用するときにかかる運賃およびバス停２を利用するときにかかる運賃をそれぞれ求めよ。

（２）点 $y(0 \leqq y \leqq x)$ に住む学生について、バス停１を利用するyの範囲を求めなさい。

（３）点 $y(x \leqq y \leqq 1)$ に住む学生について、バス停１を利用するyの範囲を求めなさい。

（４）点 $y(x \leqq y \leqq 1)$ に住む学生について、バス停２を利用するyの範囲を求めなさい。

（５）（２）～（４）よりバス停１およびバス停２を利用する学生の人数をそれぞれ求めよ。

（６）各学生の運賃の総和を$F(x)$として$F(x)$をxを用いて表せ。

（７）$F(x)$を最大とするxの値のそのときの最大値を求めよ。

小テスト②
問題用紙

配点（　/6）

数直線上の$\boldsymbol{x=1}$を点Aとして線分OAを考える点Oに大学があり、線分OA上に学生が単位長さあたり一定の割合ρで分布している。バス会社は線分OA上にバス停を一つ設置し、そこから大学への送迎バスを運行しようと計画している。
このとき、バス停を線分OAのどこに設置をすれば、各学生の通学時間の総和を最小にすることができるか考えよう。

・仮定
①学生の通学方法は徒歩かバスである。徒歩とバスを併用しても良い。
②各学生の歩行速度とバスの速度はそれぞれ一定であるとする。
　歩行速度vはバスの速度Vよりも小さいとして、$V=3v$であるとする。
③学生は通学時間の最も短い通学方法を選択する。ただし通学時間の等しい通学方法が２つ以上ある場合は、最もお金のかからない通学方法を選択する。
④学生がバスを利用する場合、バス停での待ち時間は無視できるとする。
⑤バスにはいくらでも学生が乗れるとする。

★バス停を点$x(0 \leqq x \leqq 1)$に配置し学生が点yに住んでいるとして考えよう。

（1）領域 II $(\frac{2}{3}x < y \leqq x)$ に住む学生の通学時間の総和を $T_2(x)$とするとき、$T_2(x)$ を x, ρ, v を用いて表せ。（ 区分求積法の議論はしなくて良い）

（2）領域 III $(x < y \leqq 1)$ に住む学生の通学時間の総和を $T_3(x)$とするとき、$T_3(x)$を x, ρ, v を用いて表せ。（区分求積法の議論はしなくて良い）

（3）$T(x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$とするとき、$T(x)$を最小にする$x$の値とそのときの最小値を求めよ。

参考資料④　授業アンケート

授業前アンケート

2019/06/25

いずれかに○をつけてください

（1）数学は好きですか。また、それはなぜですか。

好き　　普通　　嫌い

[理由]

（2）身近な問題について、数学を用いて考えたいと思いますか？

思う　　少し思う　　あまり思わない　　思わない

→思う・少し思うと答えた人
数学を用いてどのような問題を考えたいと思いますか？具体的に書いてください。

→思わない・あまり思わないと答えた人
なぜ考えたくないのですか？具体的に書いてください。

（3）今までに身近な問題を数学を用いて考えたことはありますか？（どのようなことでも良いです。）

ある　　ない

→あると答えた人
どのような問題を考えたのか教えてください。

（4）高校数学で生活の役に立っていると思う単元はありますか。それはどの単元で、どのような日常の場面で役に立っていると思いますか。

（5）中学校・高等学校で学習した「関数」は、日常生活で役に立っていると思いますか？

思う　　　　少し思う　　　　あまり思わない　　　　思わない

→思う・少し思うと答えた人
どのような部分で役に立っていると思いますか？具体的に書いてください。

→思わない・あまり思わないと答えた人
なぜ役に立っていないと思いますか？具体的に書いてください。

（6）今までに「数学的モデリング」という言葉を聞いたことはありますか？

ある　　　　　　　　ない

→あると答えた人
どこで聞いたのか教えて下さい。

ご協力ありがとうございました。このアンケートは修士論文以外の目的には一切使用しません。

総合教科教育　サイエンス数学領域　２年　伊藤　杏優

授業後アンケート

2019/07/02

いずれかに○をつけてください

（1）数学的モデリングについて興味をもつことができましたか？

はい　　　　　　　　　　　いいえ

（2）中学校・高等学校で学習した「関数」は、日常生活で役に立っていると思いますか？

思う　　　　少し思う　　　　あまり思わない　　　　思わない

（3）今後、数学的モデリングを使って身近な問題について、数学を用いて考えたいと思いましたか？理由とともに教えてください。

思う　　　　少し思う　　　　あまり思わない　　　　思わない

→思う・少し思うと答えた人

→思わない・あまり思わないと答えた人

（4）最後にこの授業を受けた感想を書いてください。（どのようなことでも良いです）

ご協力ありがとうございました。このアンケートは修士論文以外の目的には一切使用しません。

総合教科教育　サイエンス数学領域　２年　伊藤　杏優

参考資料⑤　レポート課題

今回の授業では、数学モデルを活用し、バス停の配置について考察しました。

このレポートでは、藻の周りにある現象や問題を具体的に一つ取り上げ、数学モデルを作ってください。ただし、以下の３点がはっきりとわかるように書いてください。

①どのような現象・問題を取り上げたのか。

②自分で作成した数学モデルはどのようなものであるか。

③どのような仮定をするのか。

参考資料⑥　問題①と②の解答例

1　バス会社の利益を最大とするバス停1個の配置 (授業では $k=4$ のとき)

線分 OA 上の位置 x にバス停を配置し，線分 OA 上の位置 y に学生がバスを利用する条件を求める．

$0 \le y < x$ のとき，仮定より，学生がバスを利用するのは，徒歩で大学へ行く通学時間よりもバスを利用して大学へ行く通学時間の方が短いときである．即ち，

$$\frac{y}{v} > \frac{x-y}{v} + \frac{x}{V} \Leftrightarrow y > \frac{v+V}{2V}x \tag{1.1}$$

を満たせば，学生はバスを利用する．$x \le y \le 1$ のとき，この学生はバスを利用する．以上から，$(v+V)x/(2V) < y \le 1$ に住む学生がバスを利用することがわかる．

一方，バス停が点 x の位置にあるときの運賃は rx である．
また，$((v+V)x/(2V), 1]$ の範囲には $\rho\{1-(v+V)x/(2V)\}$ 人の学生が住んでいる．そのため，各学生の運賃の総和を $F(x)$ とすると，

$$\begin{aligned}
F(x) &= rx \times \rho\left(1 - \frac{v+V}{2V}x\right) \\
&= r\rho\left(-\frac{v+V}{2V}x^2 + x\right) \\
&= -\frac{v+V}{2V}r\rho\left(x - \frac{V}{v+V}\right)^2 + \frac{r\rho V}{2(v+V)}.
\end{aligned}$$

よって，$x = \dfrac{V}{v+V} = \dfrac{k}{1+k}$ のときに，$F(x)$ は最大値をとる．

2　学生の通学時間の総和の最小にするバス停1個の配置（授業では $k=3$ のとき)

初めに, 徒歩のみで大学まで通学する学生の通学時間の総和を求める．徒歩のみで大学まで行く学生の住む範囲を (1.1) と同様にして求めると，$[0, (1+k)x/2k]$ となる．徒歩のみで大学まで行く学生の通学時間の総和を t として $\alpha = (1+k)/2k$ と置く．区間 $[0, \alpha x]$ の位置 y に住む学生の通学時間を $f(y)$ とすると $f(y) = y/v$ である．ここで $f(y)$ のグラフについ

て，区間 $[0, \alpha x]$ を n 等分して左から順番に $y_0, y_1, \ldots, y_n$ とする．Δy を区間の幅とすると,$\Delta y = \alpha x/n, y_j = j_{\Delta} y$ である．また，区間 $[y_j, y_{j+1}]$ に住む学生の通学時間の総和を $t_j(x)$ とすると
$t = \sum_{j=0}^{n-1} t_j$ である．さらに，$f(y)$ は単調増加関数であるので，

$$\rho \Delta y f(y_j) \leqq t_j \leqq \rho \Delta y f(y_{j+1})$$

が成立する．$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ を代入しても常に不等式が成立するので，$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ を代入した不等式をそれぞれ加えると，

$$\sum_{j=0}^{n-1} \rho \Delta y f(y_j) \leqq \sum_{j=0}^{n-1} t_j \leqq \sum_{j=0}^{n-1} \rho \Delta y f(y_{j+1})$$

ゆえに

$$\rho \sum_{j=0}^{n-1} f(y_j) \Delta y \leqq t \leqq \rho \sum_{j=1}^{n} f(y_j) \Delta y$$

$\Delta y \to 0$ として

$$\rho \sum_{j=0}^{n-1} f(y_j) \Delta y \to \rho \int_0^{\alpha x} f(y) dy, \rho \sum_{j=1}^{n} f(y_j) \Delta y \to \rho \int_0^{\alpha x} f(y) dy$$

となるのではさみうちの原理から $\Delta y \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} t &\to \rho \int_0^{\alpha x} f(y) dy \\ &= \rho \int_0^{\alpha x} \frac{y}{v} dy \end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$t = \rho \int_0^{\alpha x} \frac{y}{v} dy$$

次にバスを利用して大学まで通学する学生の通学時間の総和を求める．線分 OA の位置 y に住む学生がバス停を利用する範囲は (1.1) と同様にして,

$$\frac{1+k}{2k} x < y \leqq 1$$

バス停 x を利用する学生の通学時間の総和を S として，区分求積法より，

$$S = \rho \int_{\alpha x}^{x} \left(\frac{x-y}{v} + \frac{x}{V} \right) dy + \rho \int_{x}^{1} \left(\frac{y-x}{v} + \frac{x}{V} \right) dy$$

ゆえに，学生の通学時間の総和を $T(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} T(x) &= t + S \\ &= \rho \int_{0}^{\alpha x} \frac{y}{v} dy + \rho \int_{\alpha x}^{x} \left(\frac{x-y}{v} + \frac{x}{V} \right) dy + \rho \int_{x}^{1} \left(\frac{y-x}{v} + \frac{x}{V} \right) dy \\ &= \frac{(k-1)(3k+1)}{4vk^2} \left(x - \frac{2k}{3k+1} \right)^2 + \frac{5k-1}{2v(3k+1)} \end{aligned}$$

ゆえに $x = \dfrac{2k}{3k+1}$ で $T(x)$ は最小値をとる．