岐阜数学教育研究
2019, Vol.18, 68-88

最適配置問題における教材開発とその実践

林訓史[1]，柘植直樹[2]

高校生を対象に日常の事象を数学的にモデル化することを通して，数学のよさを実感させる教材の開発を試みた。題材として，最適配置問題の 1 つであるアイスクリーム屋台問題を扱う。これは，2 つの店が線分上で売上競争をすると最終的にそれぞれの店がどの地点に出店することになるのか考えるものである。様々な仮定をもとに数学的にモデル化し，最終的な 2 店の出店位置を予想し，その出店位置を証明することで，予想の正誤を根拠を明らかにしながら判断できる。本論文では，教材の内容及び結果の考察を述べる。

〈キーワード〉アイスクリーム屋台問題，一次不等式，数学的モデル化

1. はじめに

著者は数学のよさを伝えるために，日常の事象に対して数学を用いて考えさせる教材を考えた。その理由は以下の 2 つである。

1 つ目は，「数学が何の役に立っているのかわからない」と発言する生徒と接した著者の経験によるものである。そのように生徒が発言した要因の 1 つとして，日常生活に潜む問題を数学の利用・活用の場面として捉えて解決する経験を生徒に与えられていないことが考えられる。そのため，数学的な見方や考え方を日常生活に生かそうという生徒の態度を養えていないと考える。このような生徒の姿を少しでも減らすために，学んだ知識を生かして問題解決できるような題材を作り，数学的に考えることのよさを実感できる場面を生徒に提供したいと考えた。日常の問題と数学の理論を関連づけたり，理論的に問題を解決したりすることで，数学を用いると日常の問題を解決する見通しが立てられることを生徒に伝えられたらよいと考える。

2 つ目は，学習指導要領によるものである。平成 30 年告示高等学校学習指導要領解説数学編[1]において，「数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度」を育成することが求められている。さらに，数学のよさの 1 つとして「社会における数学の有用性や実用性」[1]が挙げられている。また，現実の世界と数学の世界を関連させた学習が促されている。

日常の事象に対して数学を用いるためには，対象となる事象を数学的に表現することが必要になる。そこで，「事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力や事象を論理的に考察する力，考察を深めたり評価改善したりする態度」[1]を身に付けさせる授業を展開することを考えた。

2. 授業の概要

2.1 題材について

本題材では，2 つの店舗が売上競争をすると最終的にそれぞれの店舗がどの地点に行き着くかということを考えさせる。この日常の事象を数学的にモデル化し，均衡点を求めさせる。数学的にモデル化するとは，日常の事象に対して様々な仮定をし，数学として取り扱える形にすることだと捉えている。また，均衡点とは，他店の出店位置に対して，自分の店が最も売上を得らえる 2 店の出店位置の組である。詳しくは『2.2 教材について ④均衡点の定義』で述べる。本授業において，数学的にモデル化し，均衡点を予想する中で，「事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力」を養えると考える。授業者が提示する日常の事象に対して，生

[1] 岐阜大学大学院教育学研究科
[2] 岐阜大学教育学部

徒が事象に関連する要素を考え，それらを文字で表現する活動や，均衡点を予想する際に，考えたことを表現する活動をさせるからである。さらに求めた均衡点を日常の事象と比較させ，どうして均衡点がその出店位置の組になるのか考えさせることで,「事象を論理的に考察する力，考察を深めたり評価改善したりする態度」を身に付けられると考える。また，本題材は，ゲーム理論の非協力ゲームの一例である。これは，他者と非協力の場面において様々な要素をもとに戦略を考えていくものである。日常では他者と非協力に（対立して）物事を進めていく場面が数多く存在し，その際に自らの利益を最大にしようとする。そのため，本題材で学習することが日常の他の事象にも数多く適用できることを生徒に実感させたい。

2.2 教材について

2 つの移動式店舗の売上競争を考える。その事象を数学的にモデル化し，各店の売上を関数として設定する。そして，不等式と場合分けを用いた証明を行う。したがって，数学Ⅰの不等式の内容を知っていることで学ぶことが出来る内容であると考える。それゆえ, 普通科の高校生だけでなく，専門教育を主とする学科や職業教育を主とする学科に属する高校生も対象として実践でき，多くの生徒が日常と数学が関連していることを実感してくれるのではないかと考える。また，不等式の概念を知っている中学生にも実践できる教材ではないかとも考えている。授業の最後には証明によって得られた結果を評価，改善するレポートを課す。以下で，授業冒頭で定める仮定をもとにした場面設定，売上に関する関数の設定，そして，本授業内での均衡点の定義を述べる。

なお，モデルに関しては，[2]を，定義に関しては，[3]を参考にした。

① 場面設定

・2 店 A, B で売上を競う。ただし，この 2 店は移動式の店舗とする。

・2 店は線分$[0,1]$上に出店する。ただし，店は点で出店し，2 店が同地点に出店できる。

・2 店は同商品を同サービス，同価格（a 円）で販売する。（aは自然数）

・客は一様に（単位長さ 1 あたりb 人）分布する。（bは正の実数）

・客は近い店が 1 店のとき，その店で商品を 1 日あたり 1 つのみ買う。2 店が同じ距離にある場合は，半分ずつ売上を献上する。

・2 店の中点にいる客の売上は考えない。

② 売上の計算例

上記の場面設定をした際の売上の計算例として，以下の 2 つを紹介する。

例 1　店 A が$\frac{1}{5}$，店 B が$\frac{2}{5}$に出店する。

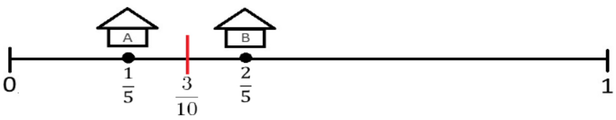


図 1

店 A と店 B の中点で客の購買店が変わることから，

店 A…$(\frac{1}{5}+\frac{2}{5})\div 2=\frac{3}{10}$ より，売上は，$\frac{3}{10}ab$円

店 B…$1-(\frac{1}{5}+\frac{2}{5})\div 2=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ より，

売上は，$\frac{7}{10}ab$円

例 2　店 A が $\frac{3}{4}$ ，店 B も $\frac{3}{4}$ に出店する。

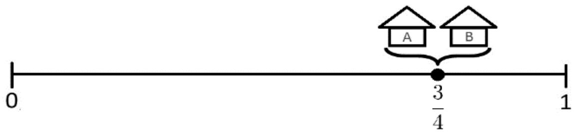


図 2

それぞれの店に来店する客数は半分ずつより，

店 A の売上…$\frac{1}{2}ab$円，店 B の売上…$\frac{1}{2}ab$円となる。

③ 売上を表す関数の設定

均衡点であることを定義したり，示したりする際，関数を設定する必要がある。そこで，著者は，以下のように売上の関数を設定した。

店Aの出店位置をx，店Bの出店位置をyとする。1日あたりの全体の売上を1とした時，店A，店Bの1日あたりの売上の割合をそれぞれ$f(x,y)$，$g(x,y)$と表す。

④ 均衡点の定義

均衡点であるための出店位置の組を以下のように定義する。

定義2.1

次の2つを同時に満たすとき，点の組$(x^*,y^*)\in[0,1]\times[0,1]$を区間$[0,1]$における均衡点と呼ぶ。

・$\forall x\in[0,1]$に対して，$f(x^*,y^*)\geq f(x,y^*)$

・$\forall y\in[0,1]$に対して，$g(x^*,y^*)\geq g(x^*,y)$

⑤ 定義2.1の否定

均衡点の定義の否定である。次の2つの少なくとも一方を満たすとき，点の組$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$は均衡点でない。

・$\exists x'\in[0,1]$に対して，$f(x,y)<f(x',y)$

・$\exists y'\in[0,1]$に対して，$g(x,y)<g(x,y')$

2店が売上競争をすると，2店は最終的に，ある出店位置から動かなくなる。この出店位置の組が均衡点になる。

3. 授業実践

場所：岐阜大学教育学部棟4階　A426教室

日程：令和元年7月9日（火）90分

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座1年生 計23名

3.1 本実践のねらい

以下の2つを本実践のねらいとする。

(a) 事象を簡潔・明瞭・的確に捉えることで，数学的にモデル化することができる。

(b) 日常の事象に対して，数学を用いることを通して，数学のよさを実感し，積極的に数学を用いようとする。

日常の事象に対して数学を用いるためには，数学的にモデル化することが不可欠である。一方，日常の事象に潜む問題に対して数学を用いて解決する方法を知らない生徒が多いと考える。なぜなら，小中学校，高校の数学の授業では，既に数学的にモデル化した問題を与えているからと捉えている。

(a)を達成するために，授業冒頭で日常の事象を数学的にモデル化させることに加え，授業後にレポートを課す。授業後のレポートでは，授業内で証明させたことを日常と比較させ，仮定の修正，加味を行わせ，再びモデル化させる。これにより，得られた結果を日常の事象と比較させる。そうすることで，生徒が数学的にモデル化する際に，重要になる要素を知ることができ，数学的にモデル化する視点を身に付けられると考える。

(b)を達成するために，身近な事象に数学を用いることができるという有用性を実感させる。その他のよさとして，数学の合理性も実感させる。これは，均衡点を予想させ，証明させることで，不確実だった考えに確証をもつことや，予想したことが間違っていても論理的に導かれた解により，新たな見方，考えを得られることである。そして，レポートにより，生徒が数学を積極的に用いるかどうか見ていく。

3.2 本実践の構成

以下で授業の流れを説明する。これは，[4]を参考にした。授業に加えて，レポートを課し，授業前後には，アンケートも実施する。レポートでは，生徒が数学的にモデル化できるかや，積極的に数学を用いようとするのかを見ていく。アンケートでは，生徒が数学のよさを実感できたかや，本授業の改善点を調べる。

(1)導入

授業冒頭で，「コンビニ店はどのように配置されているのだろうか。」という日常の疑問を考えていくことを提示する。そして，2店のコンビニが売

上競争する日常の事象を生徒と共に数学的にモデル化するために,「売上競争をしているコンビニが店の出店位置を定める際に何を考えるのだろうか」と問いかける。これにより，考えるべき様々な要素を挙げさせる。その中から重要かつ扱いやすいものを生徒と共に取り出したいが，学級で 1 つのモデルを考えていくため，授業者が主導する。授業者は要素として，

・競合店の出店位置
・競合店の商品の販売価格
・競合店のサービス内容
・客の人口分布
・客がどの店で購買するか
・自店の商品の輸送費等のコスト

を想定している。この中から，本授業では出店位置，商品の価格，客の人口分布，客がどの店で購買するか，に関する仮定を定め，数学的にモデル化する。(2.2 教材について①場面設定を参照)

(2)展開 1

『2.2 教材について①場面設定』をもとに,『2.2 教材について②売上の計算例』の例 1 と例 2 について売上の計算をさせる。生徒がこれらの計算をする様子を見て，仮定を理解できているか確認する。2 店の中点を境にして客の購買する店が異なることに注意する。次に，売上の関数を設定する。授業終末で均衡点に関する証明をさせる上で関数を設定する必要がある。また，2 変数関数を設定する。1 変数関数でも表記できるが，2 変数関数の方が表記が簡潔であるため，本授業ではそれを採用する。

均衡点を予想させる。この時点で生徒には均衡点という言葉は教えない。聞き慣れていない言葉に対して生徒が身構えるのを防ぐためである。予想の際に,「それぞれの店が売上を増加させるために移動すると，最終的に出店位置はどこになるのだろうか」と問う。均衡点は，$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$になる。生徒にこの出店位置を予想させることで，最終的に証明する結果との比較をさせたい。生徒の予想として，出店位置の組が$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$や$(0,1)$等を想定している。この予想の理由としては，2 店がそれぞれ半分ずつの客を得るから等を想定する。そのため，授業者は生徒に，ある店がここへ移動したらどうなるか考えさせることで，生徒に考える視点を与える。そして，均衡点という言葉を生徒に教える。

(3)展開 2

均衡点の定義を考えさせる。均衡点の定義がどのようなものなのか理解させ，均衡点の証明をさせたい。そこで，均衡点の定義を授業者が教えず,「最終的な出店位置の組を均衡点というが，この出店位置の組はどんな点なのだろうか」考えさせる。最終的に数式を用いて均衡点を定義させるが，まずは，それを言葉で表現させる。これは,「他の位置に出店させたときと比べて均衡点に出店させた売上が最大になること」である。その後，数式を用いた表現の仕方を考えさせる。表現したものが『2.2 教材について④均衡点の定義』の定義 2.1 である。

これを用いて,$(x^*,y^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$が均衡点であることを証明させる。店 A が店 B の右側や左側に位置している場合でそれぞれ売上の求め方が異なるため，場合分けをして考えさせる。$(x^*,y^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$が均衡点であることを証明させ，日常の事象と比較させたり，どうして均衡点がその出店位置の組になるのか考えさせたりすることで，数学の合理性を実感させる。これを示せた生徒には，2 店の売上競争の場合, 均衡点は他にないのか考えさせる。

$(x^*,y^*)=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$が均衡点でないことを証明させる。反例を挙げて示しても良いが，今回は,『2.2 教材について⑤定義 2.1 の否定』を確認して，それが均衡点でないことをその定義から証明させる。

(4)終末

最後にレポートを課し，授業を終える。生徒が数学的にモデル化することを理解できているのか評価する。

授業前後のアンケートについては 5 章で詳しく

述べる。

4. 実践の様子・考察

(1) 導入

授業冒頭で日常の事象を数学的にモデル化する際に「あなたは店の出店位置を決められます。競合店の位置は決まっています。何を考えて出店位置を決めますか」と問いかけた。生徒は，「競合店がどこにいるか」，「客がどこに多くいるか」，「競合店の商品価格は何円か」等と発言した。そこで，「それらを数学として取り扱うためにどうすることが必要か」と問うたが，反応はなく，文字や数値を用いるという発言が出てこなかった。そのため，生徒が挙げた様々な要素をもとにして，『2.2 教材について①場面設定』で述べた設定を授業者がした。

(2) 展開 1

売上を計算で求める場面では，『2.2 教材について①場面設定』の例 1 について，どの生徒も問題なく 2 店の中点を考え，売上の計算をしていた。しかし，例 2 について，店 A の売上を$\frac{3}{4}ab$，店 B の売上を$\frac{1}{4}ab$としてしまう生徒が多かった。仮定の確認をすると，2 店の売上が共に$\frac{1}{2}ab$になることを生徒は納得した。

売上の関数を設定する場面では，2 変数関数を設定し，演習させたが，困惑している生徒はいなかった。直前に具体的に各店の売上の計算をしていたためだと考える。

均衡点がどの出店位置の組になるのか予想させた。生徒の予想は「2 店が同地点に出店すればどこでも均衡点になる」が最も多かった。その理由は「売上が半分ずつになるから」であった。そこで，各店が売上を追求することをおさえ，「仮に店 A が出店位置を変えたらどうなるか」と問うたところ，ほとんどの生徒が，均衡点は，$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$になると予想を変えた。その理由は，「店 A も店 B も他の位置に移動すると売上が減るから」というものだった。ここで，最終的に店が動かなくなる出店位置の組を均衡点と呼ぶことを教えた。

(3) 展開 2

予想した点の組が均衡点であるか証明させる。その際，証明するために均衡点がどのような定義を満たすのか考えさせた。「今回の問題において均衡点とはどのようなものなのか」と定義を考えさせた。まずは，言葉で表現させた。「2 店が動かなくなるとはどのようなときなのだろうか」と問うた。生徒から出てきた考えは，「$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$になるとき」や「2 店が重なるとき」であった。均衡点を予想させた際に，具体的な数値だったため，それに生徒の考えが影響されていると感じた。定義をするにあたって，具体的な数値を出さず一般的に考えることが必要だと伝えた。そして，売上に注目して均衡点を予想したことを振り返らせると「出店位置を変えると損する位置」や「売上が最大になる位置」という言葉が得られた。これをもとに数式として表現させた。「他の出店位置と比べて最大になる」の「他の出店位置」を数式としてどのように表現すると良いか悩んでいる様子だった。そこで,『2.2 教材について④均衡点の定義』の定義 2.1 を授業者が定義した。これを用いて，$(x^*,y^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$が均衡点であることを証明させた。定義を満たせば均衡点であることが示せると授業者が言い，証明させたが，出来たのは 1 人のみであった。$x<y$の場合と$x>y$の場合で売上の計算方法が異なるため，場合分けが必要であることを伝えたが，半数の生徒しか証明できていなかった。授業前半で，店 A と店 B が入れ替わった場合$(x>y)$の売上も計算させておくべきだった。そうすることで，自分の力で証明できる生徒が増えたと予測する。自力で示せることで，達成感を味わうと共に数学の有用性も一層，感じられると考える。また，本論文の最後にこの証明を添付する。

$(x^*,y^*)=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$が均衡点でないことを証明させた。『2.2 教材について⑤定義 2.1 の否定』から証明しようとすると困惑している生徒が多かった。これは，その定義の意味を生徒に理解させ切れて

いなかったことが原因ではないかと考える。その理由は，反例を挙げているのと同様で,『2.2 教材について⑤定義 2.1 の否定』を満たすものを 1 つ挙げれば証明できることを伝えると，ほとんどの生徒が証明できていたからである。そのため，生徒にいきなり証明をさせるのではなく，定義の意味を十分に考えさせた上で証明させる授業の流れを作りたいと考える。

(4)終末

最後にレポートを課し，授業を終えた。レポートの総括は次章で述べる。

5. 実践のねらいの総括と今後の課題

(a) 事象を簡潔・明瞭・的確に捉えることで，数学的にモデル化することができる。

このねらいは達成できなかったと考える。その理由を，授業冒頭で行った場面設定をする際の生徒の様子と授業後のレポートを比較して述べていく。

授業冒頭の仮定をさせ, 場面設定をさせる際に, 店を出店させるための重要な要素を考えることができていたが，それらを文字や数値を用いて仮定する生徒はいなかった。一方，授業後のレポート課題では，数学的に取り扱うことのできるモデルを作ってきた生徒は 10 名（提出者数 24 名）だった。このうち，自分なりに新たな仮定をしてきてくれた生徒は，5 名であった。これらの例として，「人口分布の仮定を変え，$[0,\frac{1}{2})$区間では人口分布をρ人, $[\frac{1}{2},1]$区間では人口分布を2ρ人とする」,「公共交通機関を考え，駅が地点 0 に存在し，そこへ客が 1 日で c 人到着し, 近い店で商品を買う」,「商品の価格を考え，2 店の商品の価格をそれぞれ c 円，d 円とし，客は，価格の高い店までの距離が安い店までの距離の半分以下ならば価格の高い店へ商品を買いに行く」,「商品の価格と客の移動費用を考え，商品の価格を c 円，d 円とし，距離に比例する移動費用を考え,（商品の価格）と（移動費用）の和の小さい店へ商品を買いに行く」等があった。残る生徒のうち 4 名の生徒は，数学的には取り扱えないが，文字や数値を設定していた。例えば,「片方の店で商品を買うと 1 ポイントもらえ，100 ポイントで 500 円分の商品券になる」という仮定をしてくれたが，授業内の仮定では，客は, 距離の近い店へ商品を買いに行くものだった。この仮定では，客がどの店へ行くのか分からないため, 数学として扱えない。残りの 10 名の生徒は，数値や文字を置くことができていなかった。例えば,「出店数を増やす」,「価格を変える」,「人口分布を変える」等の言葉のみであった。

授業冒頭で数値や文字を置けなかったことと比較すると，レポートでは，数学的にモデル化をすることができた生徒が 10 名（全 24 名）いたことに成果を感じた。この中でも，授業とは異なる場面設定をした生徒は 5 名いた。この生徒たちは，1 つ 1 つの仮定をする理由に日常の事象を記載していたことから，日常の事象をイメージし，それをモデル化しようとする姿勢が見られた。一方で，文字を置こうとしても場面設定が不足していた生徒や文字を置けなかった生徒は 14 名いた。この原因として，2 つの理由が想定される。1 つ目は，生徒自らが数学的にモデル化したものを解いていないことが挙げられる。数学を用いて解こうとすれば，必ず解けない箇所がでてくるためである。2 つ目は，どのように仮定をして文字で置いてよいのか，やり方が分からないことが挙げられる。例えば，本授業で線分上で店の出店位置や人口分布が一定であることを考えたが，その理由として大通り沿いに世帯が集中することから日常の場所を反映していると考えられる。日常の事象を数学的にモデル化するためには，事象を簡潔・的確にとらえる必要があるため，このような日常の場所や事象，状況のイメージから仮定をすることが大切である。

今後，生徒の数学的にモデル化する力を養うために，仮定をする際に，価格や人口等の重要な要素をどのように数値や文字で表すか生徒と共に考

える。加えて，なぜそのように文字を置くと考えたのかを生徒に考えさせる授業を展開していきたいと考える。これにより，日常の事象をイメージさせ，仮定をさせる。また，仮定を十分にできていない状態があった場合には，数学的に解けないという経験を生徒にさせる。さらに，仮定を変えると異なる結果が得られる経験をさせたい。これらにより，その事象にとって何が重要な要素かを生徒が考えることができる。そのため，生徒が数学的にモデル化をする視点を獲得でき，その能力を身に付けられると考える。

(b) 日常の事象に対して，数学を用いることを通して，数学のよさを実感し，積極的に数学を用いようとする。

このねらいは達成できたと考える。その理由を授業前後のアンケートから判断する。以下に授業前と授業後アンケートの結果を抜粋したものを示す。

〇授業前アンケート（回答者数 20 名）

（i）数学は好きですか。

好き…15 人　　ふつう…5 人　　きらい…0 人

（ii）身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますか。

思う…2 人　　少し思う…12 人

あまり思わない…5 人　思わない…1 人

（iii）今までに身近な問題を数学を用いて考えたことはありますか。

ある…5 人　　ない…15 人

〇授業後アンケート（回答者数 17 名）

（i）授業の中で難しかったことは何でしたか。

（ii）数学の活用について興味をもちましたか。

もった…6 人　　少しもった…11 人

あまりもてなかった…0 人

もてなかった…0 人

（iii）身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますか。

思う…6 人　　少し思う…9 人

あまり思わない…2 人　思わない…0 人

はじめに，授業前アンケートについて述べていく。数学が好きであると答えた生徒は 15 名（回答者 20 名）いた。「達成感がある」，「解いていて楽しい」，「複数の解法があっておもしろい」，「解いていてしんどいときがある」という記述が見られた。一方で，数学を用いて身近な問題を考えた経験がある生徒が 5 名(回答者 20 名)という結果が出た。その理由として,「予算の決まっている買い物」や「ゲームの確率」等と答えていた。それに対して，経験がないと答えた生徒は,「日常の事象に対して，数学の用い方が分からない」や「難しそうだから」等が挙げていた。数学を好きと答える生徒であっても数学の社会的有用性を実感できていないことが分かった。

次に，授業前後のアンケートを比べていく。双方で，身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますかと問うたが，結果には明らかな違いがあった。考えてみたいと思った理由として，「生活が豊かになる」，「他にもどこで数学が使われているか気になる」,「納得のいく答えが出せる」,「解いていてその事象の意図が分かると面白い」,「勉強と日常が結び付けられることが面白い」等が記述された。考えてみたいと思わない理由として,「条件や仮定を考えるのが難しそう」,「自分で数学とつながる日常の事象を見つけるのは難しそう」が挙げられる。加えて，全員の生徒が数学の活用に興味をもった，少しもったと回答した。理由は,「モデル化する過程が面白かった」,「仮定を変えると解が変わる」,「予想を確かな考えに出来る」,「身の回りのことを解明できそう」が挙げら

れた。以上のことから，生徒は難しいと感じつつも，数学を用いる有用性やよさを実感してくれたと考える。また，数学的にモデル化できていた 10 名に加え，モデル化まではできなかったが，文字を用いて仮定をしようとした生徒，文字を設定することができなかったが，案として，10 個ほど重要となる要素を考えてきてくれた生徒が 3 名いた。これらの生徒から，モデルを考えたいという意欲が伝わってきた。そのため，数学を積極的に用いようとする態度を育てることができたのではないかと考える。

授業後アンケートで授業の中で難しかったことを問うた回答として「証明」,「均衡点の定義を数式に表したところ」,「予想を立てるところ」,「扱う文字の多さ」,「日常の事象を単純化するところ」があった。このように難しいと感じる内容は様々ある。そのため，生徒，HR の習熟度に合わせて柔軟に対応していかなくてはならない。そこで，授業の進め方として以下のような案を考えた。

仮定を作る際

次の①と②の案を考えた。②が本実践の内容であり，①が易化したものである。

① 重要な要素を生徒と共に列挙する。そして，授業者が仮定を提示する。
② 重要な要素を生徒と共に列挙する。そして，仮定も生徒と共に作り上げる。

上記の①と②において，日常の事象と関連付けて考えやすくするために，店と客の描かれた図等を提示することも効果的だと考える。また，それぞれの仮定を定めた理由を確認することも重要である。

予想・証明の際

次の①～③の案を考えた。③が本実践の内容であり，②はそれを易化したもので，①はさらに易化したものになっている。

① 線分と家の模型を用意し，実際に模型を動かしながら予想を立てさせる。そして，定義を与え，説明させる。定義は（店 A（B）の均衡点での売上）≧（店 A（B）の均衡点から移動した地点での売上）と与え，説明は感覚的に模型を操作しながら行う程度にする。
② 線分と家の模型を用意し，実際に模型を動かしながら予想を立てさせる。そして，定義を与え，証明させる。定義が何を表しているのかは，授業者が生徒に説明する。
③ 本授業と同様に予想させる。そして，定義を与え，証明させる。定義の意味を考えさせる時間を十分にとる。

また，1 変数関数を用いるには，ある定点に店 B が出店しており，店 A の移動のみを考える関数を設定すると良いと考える。例えば，店 B を$\frac{1}{2}$に固定し，店 A の売上の関数を設定し，店 A の売上の最大値を求める。そして，その最大値をとる位置に店 A が出店した際の店 B の売上を新たな関数として設定する。それを求めることで，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$が均衡点であることを示せる。

6. おわりに

本研究で日常と数学をつなげる経験を生徒にさせた。今後，これ以外にも様々な題材で，数学を用いて日常を読み解くような授業を開発する。そして，数学が私たちの身近に存在することや数学のよさ，社会的有用性を生徒に実感させたい。

参考文献

[1]文部科学省，2018，高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 - 数学編・理数（主として専門学科において開設される教科）編 -，文部科学省
[2]岡部篤行，鈴木敦夫，1922，シリーズ【現代人の数理】3 最適配置の数理，朝倉書店
[3]岡田章，2011，ゲーム理論，有斐閣
[4]柳本哲，2011，数学的モデリング，明治図書

学習指導案

1．対象：高校1年生　　　　2．単元：一次不等式　（数学Ⅰ　数と式）

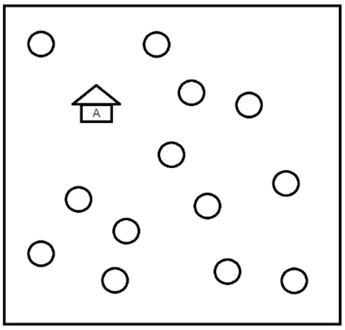
3．ねらい：(a) 事象を簡潔・明瞭・的確に捉えることで，数学的にモデル化することができる。

(b) 日常の事象に対して，数学を用いることを通して，数学のよさを実感し，積極的に数学を用いようとする。

4．本時の展開

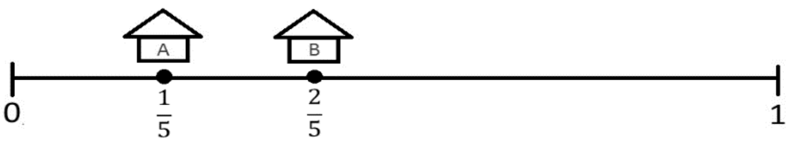
<table>
<tr><th></th><th>学習活動</th><th>□指導補助・△留意点</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>○日常の疑問を提示

＜日常の疑問＞
身の回りにあるコンビニは，近接していたり，まったくなかったりしていることに疑問をもった。出店者は何をどのように考えてコンビニの出店位置を決めているのか。

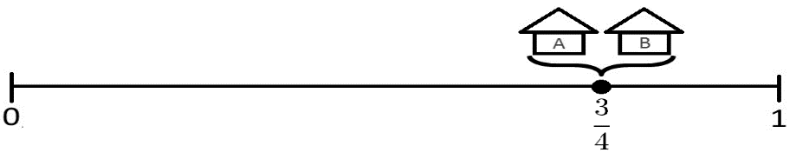
○どのように出店位置を決めるか考えさせる


「図の○が客がいる場所，A が店です。あなたは店 B です。店は売上を追求したいです。その際に何を考えて店 B の出店位置を決めますか。」と問う
・客がどこに多くいるか
・店 A がどこに出店しているか
・店 A に近づける

○重要な要素を仮定し，場面設定をする
2 章『2.2 教材について①場面設定』を参照</td><td>□誰もがもっているであろう日常の疑問を提示することで，生徒の興味をひく。
△他者と利益を競うことは，日常で数多く存在する場面であることを伝え，生徒が本授業で学んだことを今後生かしてほしい。

△店の売上に関連している要素は何か考えさせることで，事象の本質を見抜かせる。
□考えなければならない重要な要素を仮定する。
△具体的に文字も定めることで，日常の事象を数学を用いて扱えるようになる。</td></tr>
<tr><td>展開1</td><td>○売上の計算
＜例 1＞


店 A の売上…$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)ab=\frac{3}{10}ab$　店 B の売上…$1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)ab=\frac{7}{10}ab$
店 B の方が売上が高い</td><td>□2 店の中点で境になり，客がそれぞれの店に購入しに行くことを確認する。
△中点にいる客は無視する。なぜなら，中点は点なため，区間の幅が 0 であり，客が存在しないと考えるためである。
□売上を求められない生徒には，具体的に図を指さしな</td></tr>
</table>

		がら，「ここにいる人はどっちの店に商品を買いに行くか」と問う。
	＜例 2＞  	△仮定を理解しているか確認するための例 2 である。
	店 A，店 B 共にどの客からも同じ距離に出店しているため， 店 A の売上…$\frac{1}{2}ab$　　店 B の売上…$\frac{1}{2}ab$ 2 店の売上は等しい	△この 2 つの例を計算することで，価格:a円，人口分布:単位長さあたりb人は，売上に関係ないものとして考えることをおさえる。
	○売上の関数を設定する 　2 章『2.2 教材について③売上を表す関数の設定』を参照	△記号を用いることで簡潔に表現できるよさを実感させる。 □2 変数関数だが，例で売上を求めたように計算すればよいことを伝える。 □戸惑う生徒には,$a=b=1$とみることと同じだと指導する。
	○どの出店位置の組が均衡点になるのかを予想する 「2 店が順に出店位置を変えていくと，最終的に 2 店はそれぞれどこに出店することになるだろうか予想してみよう」と問う まずは自分で考えさせ，その後，他者と交流させる	△予想を立てることで見通しをもって問題解決に取り組める。
	・$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ・$(x,y)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ ・$(x,y)=(0,1)$ ・同地点ならどこでもよい 理由：得られる売上の割合が 2 店共に$\frac{1}{2}$になるから	□他者との交流により，考えの相違から，思考を深めさせる。「店 A が$\frac{\diamond}{\star}$に移動すると店 A の売上はどうなるか」と問う。

展開2	○均衡点の定義を考える 「どうして 2 店が最終的に動かなくなったのか，言葉で表現してみよう」と問う ・売上が最大になったから ・他の地点へ動くと損するから 「言葉で表現したことを数式で表現しよう」と問う	△均衡点がどういう点なのか考えを深めさせる。 □数式からではなく，はじめに言葉で表現させることで，考えやすくする。
	○均衡点の証明 $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$が均衡点であることを示す。	△証明することで，関数を設定したメリットを感じる。 □解くことが難しい生徒には 2 つのヒントを与える。 ①$f(x, y^*)$や$g(x^*, y)$を求めてみよう ②$x < y$の場合と$x > y$の場合で店の売上の求め方が異なっている。
	○均衡点でないことの証明 $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$が均衡点でないことを示す。	△均衡点の否定から証明させる。 □定義からの証明が難しい場合，反例を挙げて証明するだけでもよい。
	○チャレンジ問題 $(x^*, y^*) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$が均衡点でないことを示す。	△これを示すことにより，2 店の場合，均衡点が$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$のみであることを示せる。
終末	○まとめ 売上を競うゲーム理論の視点から考えると，売上を争うと 2 店が隣接する理由が分かった。日常の事象を簡易化して考えることで様々なことが明らかになる。 また，結果が日常とずれていると感じた場合には，仮定を変えることでより日常に似た数学で解くことのできるモデルを作ることができる。	△今回のコンビニが隣接する要因は売上を競うゲーム理論の視点の他にも，「ドミナント戦略がとられている」ということや「在庫面の不安の解消」等が挙げられる。

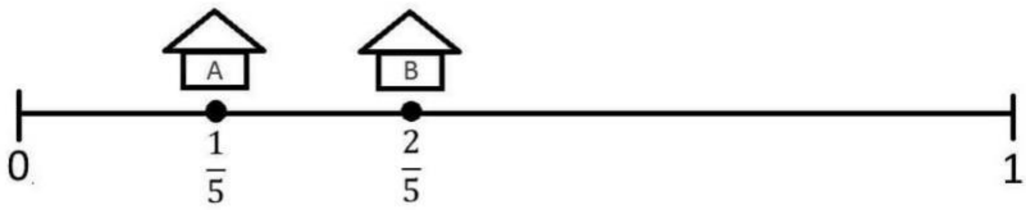
売上を競おう

＜仮定＞

- 線分上で出店位置を考える。
- 2店A,Bで売上を競う。ただし、この2店は移動式の店舗とする。
- 2店は線分上のどこかに出店する。
  店は点で出店できるものとし、2店が同地点で出店できるものとする。
- 2店は、全く同様の商品を同価格で販売する。
- 客は一様に分布している。
- 客は近いお店が1店のとき、その店で商品を1日あたり1つのみ買う。
- 2店が同じ距離にある場合、1日あたり半分ずつ売上を献上するものとする。

ここで，出店する線分は区間 [0,1] で考えるものとし，
１つの商品の値段をａ円，
客は区間の大きさ1あたりｂ人いるものとする。

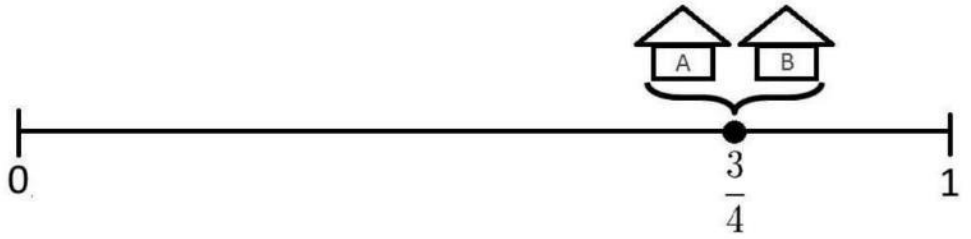
◯ 例1
店A，Bが以下の図のように出店した場合，それぞれの店の1日あたりの売上を比べてみよう。



店Aの1日あたりの売上…＿＿＿＿＿＿　　店Bの1日あたりの売上…＿＿＿＿＿＿

店＿＿の方が1日あたりの売上が高い。

○ 例 2
店 A，B が以下の図のように出店した場合，それぞれの店の 1 日あたりの売上を比べてみよう。



店 A の 1 日あたりの売上…＿＿＿＿＿＿　　店 B の 1 日あたりの売上…＿＿＿＿＿＿

2 店の 1 日あたりの売上は＿＿＿＿＿＿＿

2 店の売上を比べるには，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿を比べることと同値。

◯売上を割合で考えていこう

＜文字の設定＞

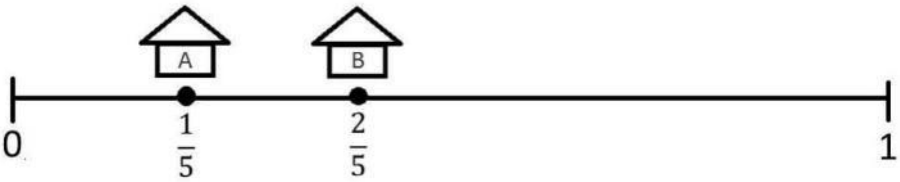
- 2 店の出店できる区間を [0,1] の線分上とする。
- A 店の出店位置を x，B 店の出店位置を y とする。
- 1 日あたりの「全体の売上を 1 と見た時、店 A，店 B の 1 日あたりの売上の割合をそれぞれ $f(x,y)$, $g(x.y)$ と表すことにする。

このように文字を設定することで________と________を比べれば売上を比べることになる。

先程の例を文字を使ってやってみよう。

◯ 例 1

店 A，B が以下の図のように出店した場合，それぞれの店の売上を比べてみよう。



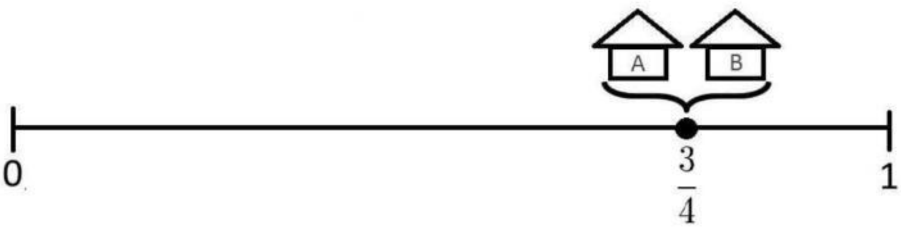
$x =$____,　　$y =$____

$f(x,y) = f($____,____$) =$ ________　　$g(x,y) = g($____,____$) =$ ________

店____の方が売上が高い。

◯ 例 2

店 A，B が以下の図のように出店した場合，それぞれの店の売上を比べてみよう。



$x =$____,　　$y =$____

$f(x,y) = f($____,____$) =$ ________　　$g(x,y) = g($____,____$) =$ ________

2 店の売上は________

◯予想してみよう

2店A,Bが売上を競いながら店の出店位置を変えていくと，最終的に2店は，それぞれどこの位置に出店しているか.

予想してみよう!!

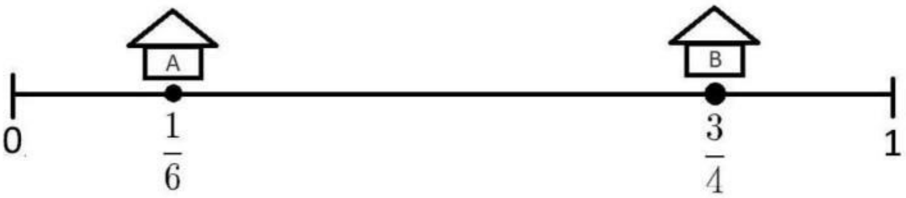
どうしてそう思うか，理由も考えてね !!

◯売上を競ってみよう

問題

2店A，Bは売上を競っている。2店は移動可能な店舗なため，自由に出店位置を変え，売上を変化させることができる。以下の図の出店状況から，2店が順々に出店位置を変えていくとすると，最終的に2店の出店位置はどこに収束するだろうか。

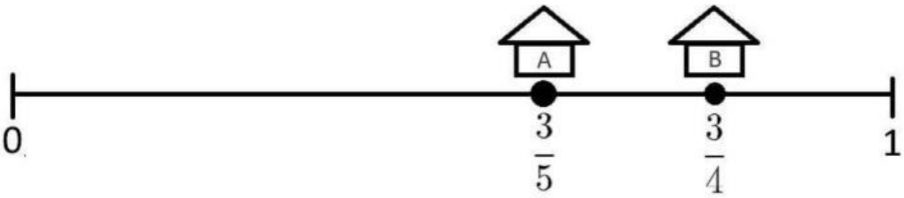
まずは，$x=\dfrac{1}{6}, y=\dfrac{3}{4}$ のとき，



$f(x,y)=$ ______________　　$g(x,y)=$ ______________

店____の方が売上が高い。店____は売上が低いため，出店位置を移動させたい。

次に例えば，$x=\dfrac{3}{5}, y=\dfrac{3}{4}$ としたとする



$f(x,y)=$ ______________　　$g(x,y)=$ ______________

今度は、店____の方が売上が高くなった。

これを続けると最終的に2店の出店位置はどこに収束していくか。下に書いてみよう。

均衡点

線分 $[0,1]$ 上で2店が売上を争い，出店位置を変えていき，最終的な2店の出店位置の組を (x^*, y^*) とする。この点の組を線分 $[0,1]$ における均衡点という。
すなわち，この (x^*, y^*) は次の①,②を同時に満たす点の組のことである。
①
②

これを言葉でなく，数式で表してみよう。下の枠の中に書いてみよう。

$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が均衡点であることを証明しよう。
証明

$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ が均衡点でないことを証明しよう。
証明

チャレンジ問題

今回の問題において，均衡点は $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ だけなのだろうか。
これを示せれば，2 店のときの均衡点の必要十分性を示せるね。
証明

今後の展開として …

今、線分上で2店のみの売上競争を考えたが、他にも仮定（条件）を変えることで、現実の世界に近い利益（売上）競争を考えることができる。
例えば、

・
・
・

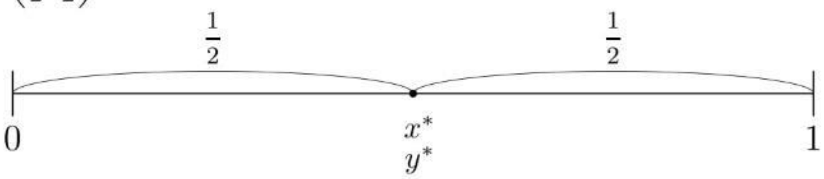
まとめ

今回，ゲーム理論的に売上を争うと2店が隣接する理由が分かった。
このように日常の現象を簡易化して考えることで様々なことが分かってくる。
また，日常とのズレを感じた際には，仮定を変えることで，より日常へ似せていくモデルを作っていく。

ちなみに，今回のコンビニが隣接する要因は売上を競うゲーム理論の視点の他にも,「ドミナント戦略がとられている」ということや「在庫面の不安の解消」等が挙げられる。

2店の均衡点

$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が均衡点であることを示す.



証明

(i) 店 A について
$f(x^*, y^*) = \frac{1}{2}$

(a) $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ **のとき**

$$\begin{aligned} f(x, y^*) &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} = f(x^*, y^*) \end{aligned}$$

(b) $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ **のとき**

$$\begin{aligned} f(x, y^*) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &< 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} = f(x^*, y^*) \end{aligned}$$

したがって, $\forall x \in [0, 1]$ **に対して,** $f(x^*, y^*) \geq f(x, y^*)$ **となる.**

(ii) 店 B について
店 A と同様にして, $\forall y \in [0, 1]$ **に対して,** $g(x^*, y^*) \geq g(x^*, y)$ **を示せる.**

(i),(ii) より, $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **が均衡点であることを示せた.** $\square$

チャレンジ問題の解答

$(x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が均衡点ではないことを示す.

証明

(i) $x \neq y$ のとき

(a) $x < y$ のとき,
$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$
$x' = \frac{1}{2}(x+y)$ とおく.（$x < x'$ となる）

$$\begin{aligned} f(x',y) &= \frac{1}{2}(x'+y) \\ &> \frac{1}{2}(x+y) = f(x,y) \end{aligned}$$

(b) $x > y$ のとき
対称性より，(a) と同様に $\exists x' \in [0,1]$ に対して，$f(x',y) > f(x,y)$ を示せる.

(ii) $x = y$ のとき
$f(x,y) = \frac{1}{2}$

(a) $x > \frac{1}{2}$ のとき
$x' = \frac{1}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned} f(x',y) &= \frac{1}{2}(x'+x) \\ &> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} = f(x,y) \end{aligned}$$

(b) $x < \frac{1}{2}$ のとき
対称性より，(a) と同様に $\exists x' \in [0,1]$ に対して，$f(x',y) > f(x,y)$ を示せる.

したがって，$(x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が均衡点ではないことを示せた. □