岐阜数学教育研究
2019, Vol.18, 1-52

不等式を用いた高校生向けの教材開発とその実践

林訓史[1], 柘植直樹[2]

高校生を対象に思考力や表現力を養うとともに, 数学のよさを認識・実感させる教材の開発を試みた。日常の場面に対して, 生徒の既知の数学を活用することで数学のよさを実感させる。題材として相乗りタクシーを扱い, その際に支払う料金をどのように配分するとよいか考えさせる。その配分を定めていく際に不等式や領域, 平均(期待値)の考え方を用いる。加えて, 他者と協力する状況を考える題材であるため, 他の日常場面へ応用しやすいものになると考える。本論文では相乗りタクシーの料金配分の仕方とその実践の様子・考察を述べていく。

〈キーワード〉相乗りタクシー, 連立不等式, 領域, 協力ゲーム

1. はじめに

本研究の目的は, 生徒が数学のよさを実感できる教材を開発し, その有用性を検証することである。その理由は, 平成 30 年告示高等学校学習指導要領解説数学編[1]においても,「数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度」を育成することが求められているからである。また, 数学のよさとは, 例えば,「数学が生活に役立っていることや数学が科学技術を支え相互に関わって発展してきていることなど, 社会における数学の有用性や実用性」[1]が挙げられる。

以上のことから, 著者は数学のよさを伝えるために数学を活用する題材を考えた。平成 30 年告示高等学校学習指導要領解説数学編[1]においても「各学校段階を通じて, 実社会等との関わりを意識した数学的活動の充実等を図っている。」と記載されていることから, 数学と実社会をつなげた授業が求められていることが分かる。このことから, 社会における数学の有用性を伝えられれば, 生徒に数学のよさを認識させることはできると考える。しかし, 生徒自身が数学を用いて解いていかなくては, 数学のよさは実感できない。そのために, 生徒の思考力や表現力等を身に付けさせなければならない。平成 30 年告示高等学校学習指導要領解説数学編[1]にも数学のよさを認識するために必要なこととして,「数学を学ぶ過程で, ・・・思考力, 判断力, 表現力等を発揮して適切かつ能率的に物事を処理できるようになったり, 事象を簡潔・明瞭に表現して的確に捉えることができるようになったりする」ことを生徒に自覚させることが必要であると明記されている。したがって, 本研究では社会において自分の既知の数学の知識を活用することを体験させることに加えて, 論理的に思考する力と数学的な表現を用いる力を養う教材を開発したいと考える。そして, 生徒がその力を発揮し, 解き進めることで, 数学のよさを実感できる。

2. 授業の概要

2.1 題材について

日常の様々な場面で生徒は周囲と協力して生活する。その状況下で, 何を考え行動するか, とても大切である。そこで, 協力する際に考える価値観や概念をもとにして, それを数学的に定式化し, その定式化により解を一意に定められる題材を考えた。具体的には, 相乗りタクシーによる料金配分を考える授業を展開する。本論文で扱う相乗りタクシーとは, 同じ方向に向かう複数の乗客が 1 台のタクシーに乗り合うことで, 1 人で乗るより安い運賃で利用できるタクシーのことである。現在, 相乗りタクシーの実用化が進みつつあり, 生徒の身近なものになっていくとも考えられる。そ

[1] 岐阜大学大学院教育学研究科
[2] 岐阜大学教育学部

のため，生徒が数学の有用性をより実感できると考える。また，他者と協力する場面において数学を用いて分析する理論をゲーム理論と呼ぶ。その中でもこの題材は，協力ゲーム理論の一例である。ゲーム理論は私たちの意思決定等，日常に密接に関連している理論である。そのため，本実践の考え方を用いて，生徒が自ら考え，さまざまな日常の場面に応用していく題材になってほしいとも考える。

以下からは，タクシーに相乗りする乗客のことをプレイヤーと呼び，一緒に相乗りするプレイヤーの集合を提携と呼ぶことにする。

2.2 教材について

本実践では相乗りタクシーでの料金配分の仕方をどのように考えるかを問題とし，その際に，不等式や領域の考え方を用いる。高度な高校数学を用いないため，全ての高校生に対して実践しやすい。問題によっては，難易度も低いため，数学と日常の関連を理解しやすい。また，本実践で料金配分の仕方を考えさせると述べたが，料金配分は便益配分を考えるのと同値である。そこで，以下で紹介する多様な考えにつなげやすくするためにも，以下では便益配分を考えていくものとする。本研究で取り扱う問題における便益とは，プレイヤーらが個々で帰宅する場合にかかる料金の和から，彼らが相乗りした際にかかる料金の最少額を引いた差である。また，この便益は，授業内で特性関数と定義して扱った。著者は便益配分の仕方を様々な概念の下で5つ考えた。概念とは，「どのように便益配分をするか考えたもの」とする。その5つとは多くの人が日常で用いている「均等配分」や「比例配分」に加え，ゲーム理論における，「コア」や「仁」，「シャープレイ値」の考え方を利用するものである。以下，5つの便益配分の仕方について述べる。ゲーム理論における配分の仕方は[2]を参考にしている。

〇均等配分とは，全体の便益をプレイヤー数で割り，その金額をそれぞれのプレイヤーに分け与えるという概念を基にした考え方である。

〇比例配分とは，それぞれのプレイヤーが1人で帰宅するときに支払う料金の比を考え，相乗りをすることでかかる料金や便益をその比にしたがって配分するという概念を基にした考え方である。

〇コアとは，より多くのプレイヤーで帰宅するときの方が得をするという概念を基にした考え方である。コアを定義するために，特性関数と配分を定義する。特性関数とは，便益に関する定義である。

提携Sに関する特性関数$v(S)$を，$v(S)=$（提携S内のプレイヤーが協力することによって獲得できる最大便益）と定義する。また，$v(\emptyset)=0$とする。

配分とは，誰かと協力することで1人で帰宅するときよりも得をするという考えを定義したものである。

プレイヤー全体の集合をN，任意のプレイヤーをi，プレイヤーiが得る便益をx_iとする。全てのプレイヤーが協力することによって獲得できる最大便益は，各プレイヤーが得る便益の総和と等しいことから，$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$となる。これを全体合理性という。

1人のときよりも得をしたいことから，$x_i \geq v(\{i\})$となる。これを個人合理性という。

全体合理性と個人合理性の両方を満たすx_iの組をxとし，これを配分と定義する。

そして，以下がコアの定義である。協力して何かを行う上で必ず考えるべきことであると著者は考える。

任意の空でない提携をSとし，S内の任意のプレイヤーiに対して，$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$をコアと定義する。これを提携合理性という。もちろん提携合理性は，配分を満たしたものになっている。

〇仁とは，最大の不満をもつプレイヤーの不満を最小化するという概念を基にした考え方である。本実践で扱う不満とは，(提携内で獲得できる最大便益）から（提携内の各プレイヤーが実際に得る便益）を引いた差である。仁を定義するために，不満を定義する。

不満を$e(S,x)$とすると，任意の空でない提携をSとし，S内の任意のプレイヤーをiとする。$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$を提携$S$の不満と定義する。

仁の考え方は，全員をできるだけ平等に考え，最も損をする人を救う考え方でもある。詳しい定義は，[2]の p-347(41)に記載されている。

〇シャープレイ値とは，貢献度に応じて便益配分を定めるという概念を基にした考え方である。これを定義するために，限界貢献度を定義する。限界貢献度とは，ある提携Sに，あるプレイヤーが加わる前後で便益がどれほど増えたのかというものである。

プレイヤー全体の集合をNとし，任意のプレイヤーをiとする。部分集合$S \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して，$v(S \cup \{i\}) - v(S)$をSに対するプレイヤーiの限界貢献度と定義する。

シャープレイ値は提携内で協力しつつも貢献具合を争い，便益を獲得しなければならないため，社会の中で起きる便益争いを反映している考え方だと著者は考える。詳しい定義は，[2]の p-348(42)に記載されている。

このように多様な概念により，便益配分を定められるため，生徒個々の多様な価値観のもとでより多くの人が納得する便益配分の概念を形成させたい。そしてそれを数学的に定式化する思考力や表現力を養いたい。また，コアの考え方では不等式を用い，仁の考え方で不等式と領域を用いる。シャープレイ値は，平均（期待値）の考え方を利用する。

3. 授業実践

本教材は岐阜大学にて 3 回に分けて実践した。

場所：岐阜大学教育学部棟 4 階　A426 教室
日程：第 1 回 平成 30 年 6 月 1 日（金）90 分
　　　第 2 回 平成 30 年 6 月 15 日（金）90 分
　　　第 3 回 平成 30 年 7 月 13 日（金）120 分
対象：岐阜大学教育学部数学教育講座 1 年生
　　　計 24 名（1 日目　23 名）（2 日目　24 名）（3 日目　23 名）

3.1 本実践のねらい

以下の 3 つを本実践のねらいとする。

(1) 話し合いを通して，概念を形成する力を養う。
(2) 概念をもとに数学的に定式化する力を養う。
(3) 身の周りの事象に数学が使えることを知り，数学のよさを実感させる。

著者が便益配分を 5 つ挙げたように，生徒個々の価値観により納得する解が異なるのは当然であり，どの価値観・概念も間違いではない。そこで本研究では話し合いをすることでより多くの人が納得のいく概念を形成させる。「納得する」という曖昧なものであるが，自分の考え方が他者の考え方に劣っている点や，勝っている点を考えさせ，互いの考えを批判させ合う。そうすることで，概念が形成され，論理的思考力を身に付けさせられる。加えて，その概念のもとで数学的に定式化させる際には，概念を数値として表すとどのように表現できるか考えさせる。そうすることで，数学

的表現力も身に付けさせたい。そして，日常でも頻繁に起こる，他者と協力する状況での便益配分を実際に行うことで身近な事象にも数学を用いることが出来ることを知り，数学のよさや社会的有用性を実感させる。本実践は以上の 3 つのことをねらいとするが，それを超えて，相乗りタクシーを抽象化し，数理モデルとして考えるように，他の日常生活の場面も生徒自ら抽象化し，数学的に定式化し，最適解，納得解を求めるという能力も身に付けられると良いと考える。これに関しては，便益配分をするという点において，生徒自らが数学を活用することができるか，数理モデルを作ることができるか調べるために，授業後に生徒にレポートを課し，結果を見ていく。この力が身に付くことで，未知の社会に対して自ら課題を見つけ，数学を用いて解決することができると考える。

3.2 本実践の構成

授業の流れを説明する。

1 日目の授業をする前に生徒に問題 1 を出題し，考えてきてもらう。1 日目の授業は，「問題の確認と全体で個々の考えを共有し，話し合いを通して概念を形成」,「概念をもとに数学的に定式化」,「問題を解く」という流れで進める。そして授業後に問題 2 を出題し，考えてきてもらう。

2 日目の授業は，「小テスト」をした後，1 日目と同じ流れで進める。

3 日目の授業は，問題 2 を用いて，「2 日目とは異なった概念のもとで数学的に定式化」，「問題を解く」，「小テスト」という流れで進める。

問題 2 は問題 1 と異なり，相乗りする全てのプレイヤーの家が一直線上にあり，1 日目と同様に考えても解が一意に定まらないようになっている。詳しくは以下で述べる。これらに加えて 1 日目の授業前，3 日目の授業後には，アンケートも実施した。以下に授業の流れについて詳しく述べる。本文の最後に指導案も添付する。

また，授業で扱った問題や定義は主に[2]を参考にしている。

問題 1

同じ方向に家のある A，B，C の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅し，最後に下車した人が料金を支払い，翌日に皆で料金を精算する。その居酒屋からそれぞれの家にタクシーで直接帰宅した場合，A の家まで 1800 円，B の家まで 2100 円，C の家まで 2900 円，また，A の家から B の家までは 1800 円,A の家から C の家までは 2000 円，B の家から C の家までは 2300 円の料金が必要となる。A，B，C をそれぞれプレイヤー1，2，3 とする。プレイヤー1，2，3 が最も安くなるルートで 3 人の家を回るとき，それぞれいくらずつタクシー料金を負担すれば 3 人が納得する支払い方になるだろうか。

○1 日目

はじめに，仮定の確認をする。次に，考えの共有をし，1 つの問題を多面的に考えさせる。そして，他者の考えを批判的に考え，新たな概念を形成していくことでより多くの人が納得のいく概念を形成させる。そのためには考えに根拠をもち，他者を納得させなければならない。すなわち論理的思考力が必要になる。ここで生徒の考え方は，どの考え方も間違いではないことに注意する。今回の問題においては，個々の考え方により解を定められるため，その概念で他者が納得するならば，それがその人の解になる。以後，考える幅を広げるために，料金ではなく便益を配分する考えを意識させ授業を進める。著者は，均等配分や比例配分で考えてくる生徒が多いと予想する。しかし，これらの配分の仕方の場合，プレイヤー1，3 は 3 人で相乗りするより 2 人で相乗りした方が便益を得られるため，納得がいかないことを示す。そして，新たな概念を見つけさせたい。

次に，数学的に定式化をする。生徒の話し合いで概念が定まらなかった場合，1 日目に全体の前で紹介するのは，コアによる便益配分の仕方であ

る。「より多くのプレイヤーで帰宅した方が得をする」という概念を全体で共有し，これを数学的に定式化させる。

相乗りして得た便益（900円）をそれぞれのプレイヤーに

x_1円，x_2円，x_3円ずつ分けるとする。

このことと，協力した方が得をするということから，

$$x_1 + x_2 + x_3 = 900$$
$$x_1 + x_2 \geq 300, \quad x_1 + x_3 \geq 900, \quad x_2 + x_3 \geq 600$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

図 1

概念から，以上のような不等式を立式させる。このように，概念を「数」「文字」として数学的に定式化し，それを利用して問題を解く。自らの定式化により，具体的に料金配分の解を出すことで，数学的表現力を身に付けさせると同時に日常における数学の有用性を感じさせる。そして，コアに関する定義も定めていき，一般化する。この際に定義を扱うメリットも共に伝えることで，生徒に定義を用いる有用性に気付かせる。また，これは生徒が初めて用いる定義であるため，演習を行わせ，数学的に定式化させることで考えやすくなったことや簡潔に表せることを実感させる。これより，数学のよさに気づかせる。

問題 2

同じ方向に家のあるプレイヤー1，2，3 の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅した。居酒屋と 3 人の家は同じ一本道沿いにあり，居酒屋からプレイヤー1，プレイヤー2，プレイヤー3 の順に家があり，その居酒屋からそれぞれの家に帰宅した場合，プレイヤー1 の家まで 1800 円，プレイヤー2 の家まで 2100 円，プレイヤー3 の家まで 2900 円の料金がかかる。 そして，最後に下車するプレイヤー3 が料金を支払い，翌日に皆で精算する。このとき，プレイヤー1，2，3 が納得して料金を支払うには，それぞれ何円ずつ支払えばよいのか。

○2 日目，3 日目

2 日目と 3 日目は同じ問題をもとに授業を行うため，合わせて紹介する。2 日目の授業のはじめと 3 日目の授業のおわりに小テストを行う。これは，前回の復習を兼ねたものである。計 3 回行う授業の日にちが空くことや，授業をする上で生徒の理解度を測るためである。また，実践の理解度を検証するためでもある。その後授業を進め，1 日目と同様に問題 2 に関して仮定を確認し，個々の考えを全体で共有させる。しかし，問題 1 はコアによる考え方で解が一意に定まったのに対して，問題 2 はコアによる考え方を利用すると解が無数に存在する。コアによる解の集合は，以下の図の斜線部と境界を含む。

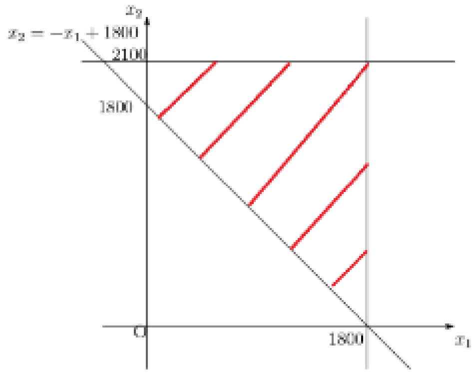


図 2

そこから解を絞るためにどのような概念を形成すればよいのか考えさせる。ここでも多くの人を納得させることを通して，論理的思考力を身につけさせる。また，生徒が考えることが難しそうな場合，コアによる解の集合内に存在する，$x_1 = 1800$，$x_2 = 0$を例に出す。こういった例を出すことで，生徒は便益を平等にしたい等，考えるだろう。そのため，どのようなことを考えると納得できるのか生徒から新しい考えを引き出せるかもしれない。そして，それにより生まれた概念を数学的に定式化し，様々な定義を定めていく。生徒の反応次第で，仁による考え方かシャープレイ値による考え方を数学的に定式化させる。

〈仁の場合〉

「平等」という考えから,「最大の不満をもつプレイヤーの不満を最小にする」という概念のもとで以下のように数学的に定式化させる。

各プレイヤーと提携がもつ不満を，獲得できる最大の便益($v(S)$)と実際にもらえる便益（$\sum_{i\in S} x_i$）との差と考える。すると，それぞれの不満は,

$$
\begin{aligned}
v(\{1\}) - x_1 &= -x_1 \\
v(\{2\}) - x_2 &= -x_2 \\
v(\{3\}) - x_3 &= -x_3 \\
v(\{1,2\}) - x_1 - x_2 &= 300 - x_1 - x_2 \\
v(\{1,3\}) - x_1 - x_3 &= 900 - x_1 - x_3 \\
v(\{2,3\}) - x_2 - x_3 &= 600 - x_2 - x_3
\end{aligned}
$$

図 3

そして，これらの中の最大の不満を最小にすることで解を 1 つに定めさせる。しかし，どれが最大なのか，どのように最小にしていくのか，考えることがとても難しい。そのため，以下のようにプレイヤーが 2 人のときの最大不満を最小にする例題を解かせる。解く際にグラフを利用すると，プレイヤーが 3 人のときを考える際に解きやすくなるため，グラフを用いて解説する。

問題を解く上で簡単にするため，$e(S,x)$を$e(S)$と書くことにする。

例題

$$
\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \end{cases}
$$

また，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_1 + x_2 = 100$である.

このとき，大きい方の不満を見つけ，最小化してみよう.

図 4

解は授業で扱ったプリントに載せてある。授業プリントは添付する指導案の次に添付する。また，授業プリントにはグラフ以外のスマートな解き方も載せてある。[2]このスマートな解き方で授業を進めなかった理由は，生徒が既知の知識を用いて解を定めることができ，数学の有用性を実感して欲しかったからである。

〈シャープレイ値の場合〉

「貢献」という考えから,「貢献度に応じて便益を配分する」という概念のもとで数学的に定式化させる。自分が提携に加わることで便益をどれだけ増やせるかということを考えるため，プレイヤー1 に関する限界貢献度は以下のような定式化となる。

$$
\begin{aligned}
v(\{1\}) - v(\phi) &= 0 \\
v(\{1,2\}) - v(\{2\}) &= 1800 - 0 = 1800 \\
v(\{1,3\}) - v(\{3\}) &= 1800 - 0 = 1800 \\
v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) &= 3900 - 2100 = 1800
\end{aligned}
$$

図 5

そして提携Sを全ての順列で考え,各プレイヤーに関する限界貢献度を平均化したものがシャープレイ値である。それがそのプレイヤーの便益配分になる。平均をとるという考えにいたらなかったとしても，貢献具合を考えるに当たって，限界貢献度を数学的に定式化することは自然な発想ではないかと考えるため，生徒には限界貢献度を自ら定式化してほしい。解は本文の最後に添付する，授業で扱ったプリントに載せてある。また，シャープレイ値の公理系[3]も教えることで,シャープレイ値が何を考慮して作られているのか生徒に伝え,研究者たちがどのようにしてこのような考えを生み出したのか触れさせる。それを一意に表現できる数学の面白さに気づかせる。授業の最後には,「仁」と「シャープレイ値」のそれぞれのメリットやデメリットも話し合わせる。これにより，それぞれの考えを批判的に考える思考力を養える。また，自分がより納得する考えを他者に説明する活動も取り入れることで，論理的思考力も養う。

これらのようにして多くの人を納得させる根拠を考える際に，論理的思考力を身に付けさせ，数学的に定式化する際に，数学的表現力を身につけ

させる。そして，定義を用いる際や解を定める際に，便利になる数学のよさや日常生活の中に数学を利用できる社会的有用性を実感させたい。

4. 実践の様子・考察

○1 日目

宿題として個々で考えてきた意見には，均等配分や比例配分の考え方が多数だった。これは，生徒が日常生活で用いている考えがこの 2 つに偏っていることが考えられる。均等配分を考えてきた生徒の中には,「便益が 900 円だからそれを 3 人に 300 円ずつ配分する」と記述している人もおり，便益に注目して考えられていた。また,「協力して帰るのだから 1 人で帰るときより安くしたい」という記述も多くみられた。しかしその考えから解を一意に定めている人はいなかった。したがって，全体で考え方を共有したが均等配分か比例配分の 2 択になってしまった。そこで，より多くの人が納得する新たな概念を全体で形成させるために，「他者の考えを批判的に考え，より多くの人が納得する考えがないか」,「均等配分や比例配分の改善点はないか」と問うたところ,「どうして均等配分や比例配分ではだめなのか」と質問された。著者は生徒の考えを否定するつもりで発したわけではないが，数学を解いていると正解か間違いかの 2 択しかないと考える生徒が多い。それぞれの生徒で多様な価値観があるため，どの考えも間違いではないことに注意していたはずが，著者の配慮が足りなかったと感じた。説明し直し，問い直したところ,「端数が出るのが嫌だ」や「相乗りした場所から家の近い人の料金が安すぎる」等の意見がでた。その価値観から解を定める案も出てきた。「この料金に分けたら端数が出なくなるから，こういう分け方をする」等だった。しかし，そこに明確な根拠がなかったため，多くの人が納得する考えにはならなかった。また，自分の意見に根拠を持っていないからこそ，他者の考えを肯定的に受け止めてしまい，他者を批判する考えも出てこず，話し合いが進めていけなかったと考える。この他にも，生徒自身が概念を作り上げた経験がないことも原因として挙げられる。また，今回，問題を扱う場面で仮定としてタクシーに乗っている時間は考慮せず，金額の面のみを考えることを伝えていた。しかし,「時間を考慮しないといけないのではないか」という考えも出てきた。仮定をする意図をきちんと伝えておかなければ生徒が混乱してしまうと感じた。平成 30 年告示高等学校学習指導要領解説数学編[1]にも,「日常生活や社会の事象などは，そのままでは数学の舞台にのせることはできないことがある。そのため，事象を数学化する際には，事象に潜む関係を解明したり活用したりするなどの目的に即して，事象を理想化したり単純化したりして抽象し，条件を数学的に表現することなどが必要とされる。」と明記されている。話し合いを続けたが，全体で概念を 1 つに定めていけなかった。そのため，著者が「より多くのプレイヤーで帰宅したときの方が得をする」という概念を提示した。そしてこれを数学的に定式化させた。

「文字を使って定式化してみよう」と発問したところ，定式化できたのは数人であった。ほとんどの生徒は，何を文字で置くのか悩んでいた。そのため，文字の置き方を示し，不等式を立てるよう促すと半数ほどの生徒が定式化できたが，残りの半数はできていなかった。高校数学の問題を解く際に，求めたい数量を文字で置き，立式をすることは出来ても，問題の様式が変わると混乱してしまうことが分かった。高校数学で不等式を用いる際には,「以上，以下，未満」や「○○より大きい，○○より多く」という言葉をもとに立式していたため，今回の問題の「得をする」という言葉からの定式化は難しかったと考えられる。既習内容の応用力がないことを感じた。言葉が変わっても根本的な考え方に目を向けさせねばならないと考える。次に「特性関数」と「配分」,「コア」の定義を紹介した。はじめは新しい文字の置き方や

定義に困惑する生徒も多かったが，問題 1 を用いて具体的に文字の使い方を演習させた際には，ほとんどの生徒ができていた。定義の中で文字によって置いたものが意味していることやその使い方を理解してくれたと感じた。そして，これらの定義を利用して「より多くのプレイヤーで帰宅したときの方が得をする」という概念の下での解を一意に定めさせた。これにより，数学のよさや社会的有用性を実感させられたのか，ということは生徒から言葉を聞き取れなかったため，授業後アンケートをもとに後ほど分析していく。最後に 2，3 日目の授業に向けて問題 2 を出題し，1 日目の授業を終了した。課題を出す際に,「コアによる考え方では解は一意に定まらないため，さらに概念を加えて解を一意に定めてきてほしい」と促した。この課題は 2 日目の授業の数日前に回収し，2 日目の授業を進める上での参考にした。

〇2 日目

問題 2 を解く際にコアによる解の集合を求めることができていたのは数人しかいなかった。間違えていた生徒のほとんどが連立不等式を解けていなかった。定義は理解し，用いることができていた。そのため，小テストをする前に連立不等式の解き方の復習をし，小テストを行った。添付する授業プリントの次に小テストも添付しておくが，授業で扱った内容を出題したため，難易度は高くない。基礎的な数学力を付けなくては，数学を用いて解を定めたという実感はもちにくいと考えるため，数学力の向上も必要だと感じた。

授業前に集めた問題 2 の解答で解を定められていた考え方は「比例配分」と「均等配分」による考え方のみであった。「相乗りする全ての人が一直線上に住んでいるから，距離の比で考えてよい」という根拠も記述されていた。この 2 つも確かに答えとしてよいが，新たな概念は生まれなかった。「普段誰かと協力する際に便益を分ける場面で何を考えるか」と問い，1 日目と同様に全体で概念を定めさせた。すると，1 日目よりもたくさんの考えが出てきた。「均等でなく，平等にしたい」や「寄与度を考えたい」というものである。1 日目で概念の作り方を経験したこともあり，自分の価値観や考えをもとに思考している様子が伝わってきた。しかし，数学的に定式化することはできなかった。「均等と平等の違いは何か」,「何を平等に考えるのか」や「寄与度とは何か」,「寄与度は何で判断するか」，等を考えさせなくてはならない。加えて，平等や寄与度を数値としてどのように表せるかということが重要である。また，1 日目よりも様々な考えが出てきたことにより，話し合いに時間をとりすぎてしまい，これらのことを生徒に問うことができなかった。そのため，生徒にここまで考えさせることができなかった。授業時間との兼ね合いもあり，生徒による新たな概念から定式化することができなかった。生徒の半数以上が便益配分を平等にしたいと意見したため，著者が「最大の不満を最小化していく」という概念を提示し，2 日目の授業を終えた。

〇3 日目

2 日目に想定通りに授業を進めることができなかったため， 2 日目の最後に提示した概念を数学的に定式化することから授業をはじめた。「不満をどのように表すと良いか」問いかけたところ，困惑している生徒ばかりであった。今までに表したことのないものを数値として表現することは，とても難しいことであり，生徒はどのように考えると良いか分かっていないと感じた。そのため，本授業において不満とは,「提携内で獲得できる最大便益から実際に得た便益を引いた差」と考えることにすることを伝え,「不満」と「仁」を定義した。その計算の様子を見ていると作業になっているように見えた。普段使わない定義なため，理解するのに時間がかかっていた。定義の意味を考えさせる時間を十分に確保する必要があったと考える。仁による解を定める計算はプレイヤーが 3 人の場

合は難しいため，2 人の場合を例として生徒にやってもらった。3 人の場合の 2 つの場合分けのうち，1 つを著者が解いて示した。そして，残りの場合分けを小テストとした。計算では 3 変数の不等式と領域の考え方を用いるため, 難易度が高い。時間がないこともあり, 著者が主導した。しかし，小テストを行った結果，完答できていた生徒は 1 人だけであった。場合分けの中に場合分けが多いことや領域で描く直線の数が多いため，ミスが多かったように感じた。この解き方も添付する小テストの次に添付しておく。自分で解くことにより，数学の有用性を感じさせることはできなかったが，事前に例題において 2 人の場合で考えていたため，どのように考えていくのか少しは実感してくれたと考える。時間管理不足もあり，シャープレイ値は紹介のみにした。予定していた，「仁」と「シャープレイ値」について話し合う時間も取れなかった。授業後に行ったアンケートについての分析は第 5 章で行う。

5. 実践のねらいの総括と今後の課題

(1) 話し合いを通して, 概念を形成する力を養う。

このねらいは達成できなかったと考える。その理由は以下のとおりである。全体で意見を共有し概念を形成する話し合いで，1 日目に比べて，2 日目には考えが出てきたが，それにより定式化につながる考えが出てこなかった。また，その話し合いも少数の生徒のみの発言だったため，多くの生徒が何を考えてよいか分かっていなかったと考える。加えて，他者の考えに批判的に意見する生徒もいなく，話し合いを活発に進められなかった。これは，上記のように，自分自身の考えに明確な根拠をもっていないため，他者の考えを肯定的に受け止めてしまうからである。また，日常生活で他者から与えられたことに満足し，更に良い考えはないか考えようとせず，受け入れてしまうからだ。そのため，まずは自分の中で考えに根拠を持つことが必要である。

しかし，概念の基となる考えが何も出なかった 1 日目に対して, 2 日目に概念のもとになる考えが出た。このような成長があったことから，生徒に経験を積ませていくことが大切であると感じた。その際に，メリットやデメリットを考えることや身近な例で考えること等を意識させると考える視点を与えられ，生徒の考えの補助になるのではないかと考える。

(2) 概念をもとに数学的に定式化する力を養う。

このねらいは達成できなかったと考える。その理由は上記の生徒の様子により明らかである。原因として，言葉をどのように数式として表現するのか，定義するのか体験したことが無かったことが挙げられる。学校教育で行われている学習は，解く際に，どの公式や定理を用いようかと考えるだけでよい。それに対して，本実践では概念からの定式化を問うている。自分自身で新しい公式のようなものを作り出さなければならない。その違いに生徒は混乱してしまったのではないかと考える。

学校での学習で，根本的な考え方に目を向けさせる必要がある。例えば，この問題に対して，どうしてこの公式や定理を用いられるのか，どうしてこのように方程式を立てられたのかを考えさせる。

(3) 身の周りの事象に数学が使えることを知り，数学のよさを実感させる。

このねらいは達成できたと考える。その理由は授業アンケートからいえる。以下に授業前と授業後アンケートの結果を抜粋したものを示す。また，添付する仁の解き方の次に実際に行った，授業前と授業後アンケートも添付する。

〇授業前アンケート（回答者数 23 名　欠席 1 名）

(i) 身近な問題について数学を用いて考えた経験がありますか。

ある…6 人　　　　少しある…7 人
あまりない…8 人　ない…2 人

（ii）高校で習った数学で生活の役に立つ（立っていると思う単元はありますか。また，それはどのような生活の場面でどのように役立つ（立っている）と思いますか。

「特にない」と記述する人が 9 人
それ以外の人は，何らかのことを記述している。

（iii）身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますか。

思う…11 人　　　　少し思う…7 人
あまり思わない…1 人　思わない…4 人

〇授業後アンケート（回答者数 24 名）

（i）高校で習った数学は生活の役に立つと思いますか。

思う…12 人　　　　少し思う…8 人
あまり思わない…3 人　思わない…1 人

（ii）数学の活用について興味を持ちましたか。

持った…13 人　　　　少し持った…11 人
あまり持たない…0 人　持たない…0 人

（iii）身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますか。

思う…11 人　　　　少し思う…9 人
あまり思わない…2 人　思わない…2 人

授業前アンケートの結果から，数学を用いて考えた経験があまりない，経験がないと回答した人や，数学が生活の役に立つ場面は特にない，と半数近くの人が答えているのに対して，授業後アンケートでは，数学が生活の役に立つと思う，少し思う，と回答した人が 20 人だった。加えて，全員が数学の活用に興味を持った，少しは興味を持ったと回答し，身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思う，少し思うと回答した人は 20 人（8 割を超えている）だった。その際の記述として，「日常での活用の仕方を知れた」，「新しい考えを知れて面白い」，「思っていたよりも身近に使えた」，「考えを生かす場面が多くあると感じた」，「厳密な議論ができるから説得に役立ちそう」，「他にもどんな場面で使われるか気になる」，「自分に不利がないようにできる」というものがあった。これらのことから，ねらいをおおむね達成できたと考える。しかし，「数学を用いて解を出す労力と得られる便益が釣り合っていない」，「日常の複雑さと仮定がかけ離れている」と記述する人がいた。

本実践で扱った相乗りタクシーの問題 2 では，計算に費やす労力は大きい。仮定も細かく定め，理想的な場合を考えた。そのため，生徒がそう感じても仕方ない。しかし，日常の現象を数学を用いて考えていくためには必要に応じて簡易化していくのは不可欠なことである。そのため，簡易化する部分を自分の考えたい状況によって変化させていくことで，日常の様々な現象を数学で考えていくことにつながると伝えるべきだったと考える。

上記の 3 つのねらいとは別に，授業後のレポートを課して，自ら数学を活用する力，数理モデルを作る力が生徒に身に付いたか確認した結果を述べる。便益配分に着目してレポートを考えてきてもらったが，多様な考えが出てきた。例えば「異年齢での食事会」，「数人でドライブ旅行する時の交通費」，「団体スポーツの賞金」や「船を一艘借りて釣りをする時のレンタル代」等である。このことから，日常に数学を活用できることを実感してくれたと同時に，活用する力もついていると考える。なぜ「コア」や「比例配分」による考えを用いるのか等，自分なりに説明しているレポートも多かった。これらのことから，数学の活用を考えさせるという目的は達成できたと考える。一方でこれからの課題として，様々な案が出てきたが，解を一意に定める際に，計算の途中で終わってい

る生徒も半数近くいることから，数学力を付けさせなければならないと考える。

6. おわりに

本実践を通して，日常生活への数学の活用に触れさせることで数学のよさを実感させることが出来たと考える。一方で，自分の価値観から概念を形成し，それを数学的に定式化し，解を一意に定めることを授業内で取り扱ったが，生徒の実態に合わせて柔軟に対応していかなくてはならないと考える。

思考力の身に付いている生徒に対しては，本実践のような流れで批判的に話し合いをすることで概念を形成させ，定式化するとよいと考える。

それが難しい生徒に対しては，定式化した式を提示することで，これはどんな考えを基にして定式化されているのか考えさせる活動や，概念を提示することからはじめ，数学的な定式化をさせる活動を取り入れると良い。不等式の表し方は中学1 年生で学習するため，不等式の意味を理解することや定式化することは中学生にも出来ると考える。また，問題 1 の解は，数遊び的な感覚で解を一意に定めることができるため，自ら解くこともでき，数学と日常の関連を中学生でも感じられると考える。

式を解くことが出来ない児童・生徒に対しては，どのような概念で解を定めるとより多くの生徒・児童が最も納得いくのか，自分なりの根拠を持ち，他者に説明させる活動を取り入れていく。そうすることで，論理的思考力や，批判的に物事をみる力を養うことのできる，小・中学生に向けた題材にもなると考える。

また，アンケート結果からもわかるように，日常の現象に数学を用いる経験の少なさもある。そのため，本研究で日常と数学をつなげる経験を生徒にさせたように，これ以外にも様々な題材で，数学を用いて解を定めていくような経験をさせていくことがとても重要だと考える。

今後はこの実践での経験を活かして，生徒により身近で，数学の魅力を実感させられる授業を作るべく，さまざまな数学活用の授業を研究していく。

〈添付資料〉

「指導案」,「授業プリント」,「小テスト」,「仁の解き方」,「アンケート」の順で添付する。

また，指導案は実際に実施したものではなく，実践を踏まえて改善を加えたものを添付しておく。

参考文献

[1]文部科学省，2018，高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 - 数学編・理数（主として専門学科において開設される教科）編 - ，文部科学省

[2]岸本信，2015，協力ゲーム理論入門，オペレーションズ・リサーチ　2015 年 6 月号,Vol.60　No.6　343-350

[3]中山幹夫，2012，協力ゲームの基礎と応用，勁草書房

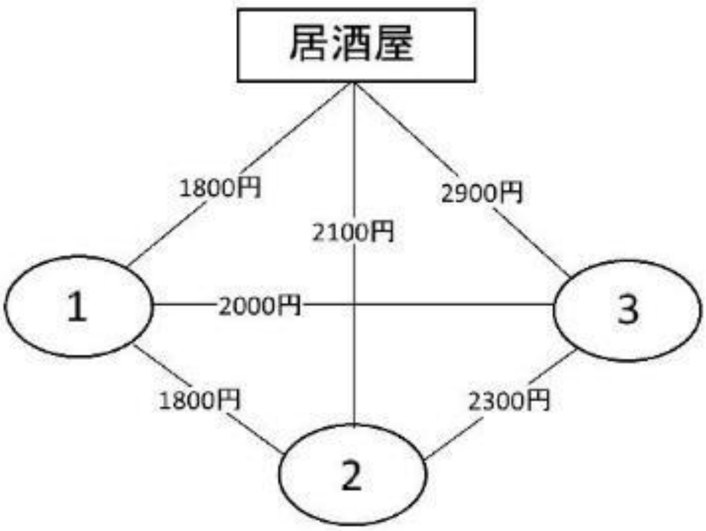
[4]岡田章，2011，ゲーム理論，有斐閣

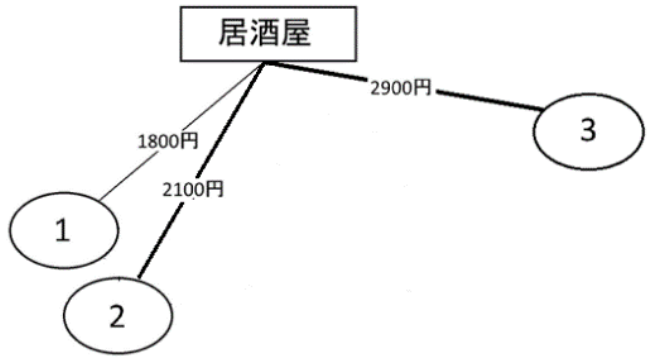
学習指導案

1．学年：高校 2 年生（本実践は大学 1 年生）　　2．単元：不等式（数学 1），領域（数学 2）

3．ねらい：上記の通り　　4．準備物：なし

5．本時の展開

	学習活動	指導補助・留意点
事前	問題 1　同じ方向に家のある A，B，C の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅し，最後に下車した人が料金を支払い，翌日に皆で料金を精算する。 その居酒屋からそれぞれの家にタクシーで直接帰宅した場合，A の家まで 1800 円，B の家まで 2100 円，C の家まで 2900 円， また，A の家から B の家までは 1800 円，A の家から C の家までは 2000 円，B の家から C の家までは 2300 円の料金が必要となる。A，B，C をそれぞれプレイヤー1，2，3 とする。プレイヤー1，2，3 が最も安くなるルートで 3 人の家を回るとき，それぞれいくらずつタクシー料金を負担すれば 3 人が納得する支払い方になるだろうか。	授業の前にレポートとして生徒に解かせ，授業前日までに解答を回収する。生徒の考えを知り，授業の進め方に生かす。
一日目	○問題の確認 仮定を整理する。 ・プレイヤー1，2，3 の 3 人でタクシーを相乗りする ・3 人の家を必ず回って全員帰宅する ・居酒屋から 1，2，3 の家までそれぞれ 1800 円，2100 円，2900 円 ・1 の家から 2 の家まで 1800 円，1 の家から 3 の家まで 2000 円， 2 の家から 3 の家まで 2300 円， ・3 人が納得のいく料金の支払い方をする。 図で整理する 	生徒が問題を整理できているか，生徒と共に仮定を確認する。 時間等，料金以外の要因は考えないものとすることを伝える。 図でも整理することで数学的表現力も見ていく。

	○考えの共有 3 人で最も安く帰宅するには，居酒屋から 1→2→3 か 2→1→3 の順で帰ったときで，5900 円である。また，それぞれが別々で帰宅した場合，合計で 6800 円かかるため，3 人で相乗りをすると全体で 900 円得をする。 料金配分に着目すると，この 5900 円をどのように配分するのか考える。 便益に着目すると，900 円をどのように配分するか考える。 2 名指名し，黒板に考えを書かせる 「居酒屋からの距離の比で料金を配分する方法」 プレイヤー1・・・$5900\cdot\frac{1800}{1800+2100+2900}=1562$ 円 プレイヤー2・・・$5900\cdot\frac{2100}{1800+2100+2900}=1822$ 円 プレイヤー3・・・$5900\cdot\frac{2900}{1800+2100+2900}=2516$ 円 「均等に便益を配分する方法」 プレイヤー1・・・$1800-300=1500$ 円 プレイヤー2・・・$2100-300=1800$ 円 プレイヤー3・・・$2900-300=2600$ 円 ○概念の形成 「仲間の考えで納得できないところはないか」問う ・居酒屋からの距離の比だけ考えるのは，下図のような問題がおきる。  ・プレイヤー1，3 は，2 人で相乗りすると 900 円の便益を得られる。 距離の比や均等に分ける方法では，プレイヤー1，3 の得られる便益の合計は 900 円に満たない。　→プレイヤー1，3 は納得しない。 ○定式化し，問題を解く 「仲間の考えに納得できない部分が出てきた。どうしたら納得のいく便益の配分の仕方になるか，文字を使って具体的に定めてみよう」と問う 考える時間をとる	他者の考えに触れることで，多面的な見方をさせる。 便益に注目する生徒が多かったため，便益配分をメインに考えさせていく。 しかし，コアによる考えのみの場合は，料金配分でも同様に考えることができるため，生徒にどの内容まで教えるのか考えてから，便益に注目させるのか，料金配分に注目させるのか考えるとよい。 距離の比で考える配分を比例配分，均等を考える配分を均等配分ということをおさえる。 自分の考えのメリット，他者の考えのデメリットを考えさせる。 双方の考えの問題点を補完する概念を形成させる。 この際に日常の協力する場面を想起させることで自分だったら何を考えるのか生徒に考えさせると良い。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
「より多くのプレイヤーで帰宅した方が得をする。」
相乗りして得た便益（900円）をそれぞれのプレイヤーに
x_1円，x_2円，x_3円ずつ分けるとする。
このことと，協力した方が得をするということから，
$$x_1+x_2+x_3=900$$
$$x_1+x_2 \geq 300,\quad x_1+x_3 \geq 900,\quad x_2+x_3 \geq 600$$
$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0$$
これより，$x_1=300$，$x_2=0$，$x_3=600$ となる。したがって，料金配分は，プレイヤー1，2，3 それぞれ 1500 円，2100 円，2300 円となる。

〇定義
特性関数の定義をする

特性関数の定義 (三人 ver)
N をプレイヤーの集合とする.$N=\{1,2,3\}$ である．$S \subseteq N$ に対して，
提携 S のプレイヤーが協力することによって得られる最大の利益のことを
特性関数といい，$v(S)$ と定義する．
また，プレイヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N,v) を特性関数形ゲームと呼ぶ．
ただし，$v(\phi)=0$ とする．

定義を今回の問題に当てはめて，定義を用いる演習をする
$v(\{1\})=1800-1800=0$
$v(\{2\})=2100-2100=0$
$v(\{3\})=2900-2900=0$
$v(\{1,\ 2\})=(1800+2100)-(1800+1800)=300$
$v(\{1,\ 3\})=(1800+2900)-(1800+2000)=900$
$v(\{2,\ 3\})=(2100+2900)-(2100+2300)=600$
$v(\{1,\ 2,\ 3\})=(1800+2100+2900)-(1800+1800+2300)=900$

配分の定義をする

配分の定義 (三人 ver)
3 人，特性関数形ゲーム (N,v) において，利得ベクトル $x=(x_1,x_2,x_3)$ が
次の 2 条件を満たすとき，x を配分という．
(i) $x_1+x_2+x_3=v(N)$ …… 全体合理性
(今回の問題では，全員の得した金額の和は全体で得した金額と一致すること)
(ii) 任意の $i \in N$ に対して，$x_i \geq v(\{i\})$ …… 個人合理性
(今回の問題では，一人で帰るよりも得したいということ)
また，この配分の集合を $I(v)$ と表す．

プレイヤー 1，2，3 の配分は $x=(x_1,x_2,x_3)$ と表す．

定義を今回の問題に当てはめて，定義を用いる演習をする
$x_1+x_2+x_3=900$，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_3 \geq 0$

コアの定義をする
</td>
<td>
生徒の様子を見ながら，以下の２つのヒントを出す。
①各プレイヤーの得られる便益を文字で置く。
②不等式を用いる。

3 変数の不等式を解く際には，文字を 1 つ減らして解く。普段の 3 変数の連立方程式を解く方法と同様である。

定義を提示する際に，簡単な説明を加える。そして，厳密な細かい説明をする。その際にこの定義を導入するメリットも伝える。

はじめて扱う定義なため，生徒の反応を見ながら演習時間をとる。
場合によっては，個々で定義の意味を考えさせる時間をとる。

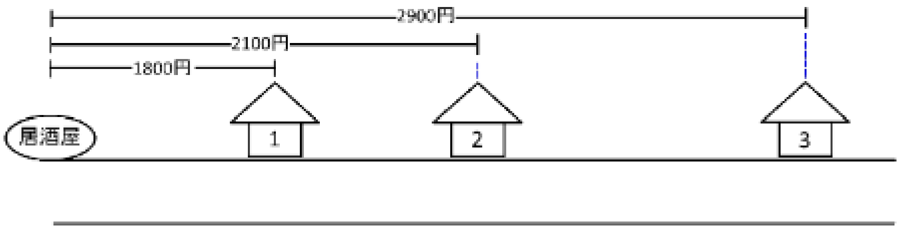
「個人合理性」，「全体合理性」という言葉は，小テストで用いるため，定義する際に一緒に教えることにする。

一般的な拡張として，n 人の場合の定義もプリントに載せておき，考えたい生徒には意味も考えさせる。
</td>
</tr>
</table>

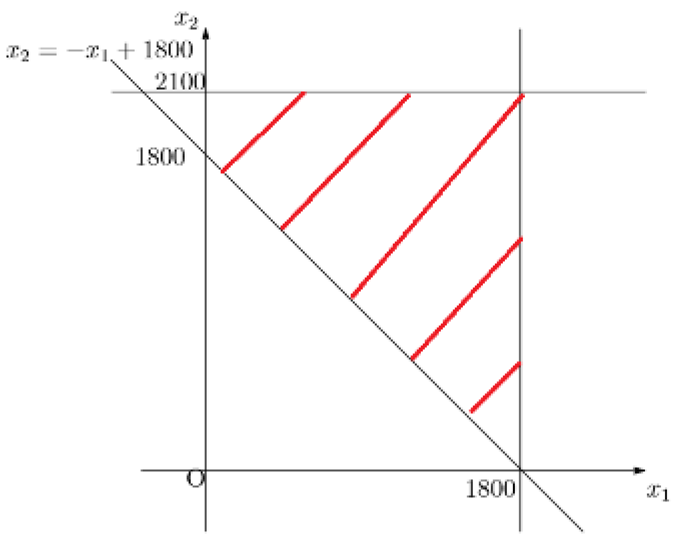
一日目と二日目の間	コアの定義(三人 ver) 特性関数形ゲーム (N, v) におけるコアとは， 任意の $S \subseteq N$，$i \in S$ に対して， $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ ……提携合理性 を満たす $\underbrace{配分}_{個人合理性、全体合理性を満たす}$ x の集合のことである． また，コアの集合を $C(v)$ と表す。 定義を今回の問題に当てはめて，定義を用いる演習をする $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 300$，$x_1 + x_3 \geq 900$，$x_2 + x_3 \geq 600$，$x_1 + x_2 + x_3 \geq 900$ ○解を定める $\mathrm{x}_1 = 300, \mathrm{x}_2 = 0, \mathrm{x}_3 = 600$となる。 問題 2　同じ方向に家のあるプレイヤー1，2，3 の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅した。 居酒屋と 3 人の家は同じ一本道沿いにあり，居酒屋からプレイヤー1，プレイヤー2，プレイヤー3 の順に家があり，その居酒屋からそれぞれの家に帰宅した場合，プレイヤー1 の家まで 1800 円，プレイヤー2 の家まで 2100 円，プレイヤー3 の家まで 2900 円の料金がかかる。 そして，最後に下車するプレイヤー3 が料金を支払い，翌日に皆で精算する。このとき，プレイヤー1，2，3 が納得して料金を支払うには，それぞれ何円ずつ支払えばよいのか。	コアの定義の演習を終え，解を出す時間を十分確保する。 問題 1 では，コアにより解が 1 つに定まったが，これは特殊な場合である。コアによる解は集合として存在することを問題 2 を提示する際に伝える。そして，解の集合から解を一意に定めるために新たな概念を加えて来るようにレポートを課す。 実践の日にちが空くため，小テストの前に定義の確認，計算方法の確認をする。
二日目	○小テスト 解答 (1) $v(\{1\}) = 200$，$v(\{2\}) = 170$，$v(\{3\}) = 230$，$v(\{1, 2\}) = 450$, $v(\{1, 3\}) = 500$，$v(\{2, 3\}) = 470$，$v(\{1, 2, 3\}) = 710$, (2) $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_3 \geq 0$，$x_1 + x_2 + x_3 = 900$ (3) $x_1 \geq 200$，$x_2 \geq 170$，$x_3 \geq 230$, $x_1 + x_2 \geq 450$，$x_1 + x_3 \geq 500$，$x_2 + x_3 \geq 470$ (4) 会社 1，2，3 はそれぞれ 240 万円，210 万円，260 万円 ○問題の確認 仮定を整理する。 ・プレイヤー1，2，3 の 3 人でタクシーを相乗りする ・3 人の家同じ一本道沿いにあり，全員帰宅する	生徒の理解度を測る。 1 日目の授業では，特性関数を出すために，差を利用したが，小テストでは，便益の値が明記されているため，それをそのまま特性関数としてよい。 3 変数から全体合理性を用いて 2 変数にすることで解を定められる。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

・居酒屋から 1，2，3 の家までそれぞれ 1800 円，2100 円，2900 円
・1 の家から 2 の家まで 1800 円，1 の家から 3 の家まで 2000 円，
2 の家から 3 の家まで 2300 円，
・3 人が納得のいく料金の支払い方をする。
図で整理する



コアによる解を定めると，以下のようになる
プレイヤー1，2，3 が得られる便益をそれぞれ x_1，x_2，x_3 とする
$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_3 \geq 0$，
$x_1 + x_2 \geq 1800$，$x_1 + x_3 \geq 1800$，$x_2 + x_3 \geq 2100$，$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3900$という条件を得る。また，配分の定義より，$x_1 + x_2 + x_3 = 3900$ となる。
これをx_3を消去して$\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2$グラフをかくと以下の領域がコアにより定められた解の集合になる。



○考えの共有
上図のコアによる解を 1 つにしぼるためにどのような概念を加えて考えるか話し合う。
「居酒屋からの距離の比で料金を配分する方法」
問題 1 とは異なり，一直線上に家が並んでいるため，距離の比でも考えられるのではないか。
プレイヤー1・・・$2900 \cdot \frac{1800}{1800+2100+2900} = 768$ 円
プレイヤー2・・・$2900 \cdot \frac{2100}{1800+2100+2900} = 896$ 円

</td>
<td>

1 日目と同様に仮定を確認することで，生徒と共に問題を整理する。

図にも整理することで，数学的表現を用いるよさを感じさせる。

コアによる解が集合として出てくる。

この領域内ならばコアの条件を満たすため，1 日目の考え方だと全員が納得することになる。しかし，どの解の組をとるかによって，各プレイヤーの損得が変わる。

そこで，極端な例を出すことで，この領域内でも全員が納得するわけではないことに気づかせる。

例えば，$x_1 = 1800$，$x_2 = 0$の場合等である。こういった例を出すと，平等な便益を得たいと感じて，そのためにどのようなことを考えるとよいのか生徒から考えを引き出せるかもしれない。

</td>
</tr>
</table>

	プレイヤー3・・・$2900 \cdot \frac{2900}{1800+2100+2900} = 1237$ 円 $x_1 = 1032$，$x_2 = 1204$，$x_3 = 1543$ 「均等に便益を配分する方法」 プレイヤー1・・・$1800 - 1300 = 500$ 円 プレイヤー2・・・$2100 - 1300 = 800$ 円 プレイヤー3・・・$2900 - 1300 = 1600$ 円 $x_1 = 1300$，$x_2 = 1300$，$x_3 = 1300$	比例配分の場合，プレイヤー3 だけ極端に料金が安くなっている。得られる便益が不平等なことに気づかせる。
	○概念の形成 「仲間の考えで納得できないところはないか」問う ・プレイヤー1 と 3 で居酒屋から 1100 円も違ったのに，支払う金額が 500 円も変わらないのは納得がいかない。 ・便益を見てみると $v(\{1\}) = 0$，$v(\{2\}) = 0$，$v(\{3\}) = 0$ $v(\{1, 2\}) = 1800$，$v(\{1, 3\}) = 1800$，$v(\{2, 3\}) = 2100$ である。 このことから，プレイヤー2，3 はプレイヤー1 よりも便益を得たいと思うため，均等に分けるのは納得いかない。平等に妥当な便益を得られるようにしたい。 ・プレイヤー3 がいるから，プレイヤー1，2 は安く帰れるのにプレイヤー3 が便益をあまりもらえないのは納得いかない。	プレイヤー3 が相乗りすることにより，他の 2 人が安くなっているのに均等な便益はおかしい。貢献具合によって便益を配分するとよいことに気づかせる。 均等と平等の違いも考えさせる。

＜以下，生徒から平等にしたいという声がおおかったため，平等を考える定式化をする＞

三日目	○定式化し，問題を解く 「仲間の考えに納得できない部分が出てきた。どうしたら納得のいく便益の配分の仕方になるか，文字を使って具体的に定めてみよう」と問う 考える時間をとる 「平等に得をできていないから納得行かない。（不満をもつ）その得や不満ってなんだろうか。数値で表してみよう。」と問う ・不満は，獲得できる最大便益と実際に得る便益の差 例えば，プレイヤー1 の不満は，$v(\{1\}) - x_1$と表す。 全ての提携について不満を出し，その中の最大不満を最小にすることで最も不満を持つ人の不満を最小化し，できるだけ平等になる。 ○定義 不満の定義をする	平等を数値で表すとどうなるか。 日常生活でどういうときに不満をもつか考えさせる。もらえると期待していた便益に対して，実際にあまりもらえなかった場合に不満を持つと考える。

不満の定義

特性関数形ゲーム(N, v)において，
任意の配分$x \in \mathcal{I}(v)$と任意提携$S \subseteq N$に対して，
配分xに関する提携Sの不満$e(S, x)$を以下のように定義する.

$$e(S, x) = v(S) - \sum x_i$$

定義を今回の問題に当てはめて，定義を用いる演習をする

$e(\{1\}, x) = v(\{1\}) - x_1 = -x_1$

$e(\{2\}, x) = v(\{2\}) - x_2 = -x_2$

$e(\{3\}, x) = v(\{3\}) - x_3 = -x_3$

$e(\{1,2\}, x) = v(\{1,2\}) - x_1 - x_2 = 1800 - x_1 - x_2$

$e(\{1,3\}, x) = v(\{1,3\}) - x_1 - x_3 = 1800 - x_1 - x_3$

$e(\{2,3\}, x) = v(\{2,3\}) - x_2 - x_3 = 2100 - x_2 - x_3$

以下，簡単にするため，$e(S, x)$を$e(S)$と表すことにする。

仁の定義をする

仁

今求めた，最大の不満を最小のものにしようという考え方を「**仁**」という.
すなわち，今回の問題の場合，$f(x_1, x_2, x_3) = \max\{e(\{1\}), e(\{2\}), e(\{3\}), e(\{1,2\}), e(\{1,3\}), e(\{2,3\})\}$としたときの，$\min_{x_1, x_2, x_3}\{f(x_1, x_2, x_3)\}$となる値を求めることである.

この定義に基づいて仁による解を定める。

$-x_1$，$-x_2$，$-x_3$，$1800 - x_1 - x_2$，$1800 - x_1 - x_3$，$2100 - x_2 - x_3$
の 6 つの中で最大のものを最小にしていくことを考える。

○　例題

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \end{cases}$$

また，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_1 + x_2 = 100$である.
このとき，大きい方の不満を見つけ，最小化してみよう.

この問題を解く

○問題 2 の仁による解を求める

$-x_1$，$-x_2$，$-x_3$，$1800 - x_1 - x_2$，$1800 - x_1 - x_3$，$2100 - x_2 - x_3$
の 6 つの中で最大のものを最小にしていくことを考える。

はじめて扱う定義なため，生徒の反応を見ながら演習時間をとる。
場合によっては，個々で定義の意味を考えさせる時間をとる。

仁に関しては，一般的な拡張として，n 人の場合の定義もプリントに載せておく。考えたい生徒には定義の意味も考えさせる。

仁は必ずコアの中に存在することもおさえる。

変数が 3 つもあり，6 つの不満の中でどの不満が最大なのか考えるため，とても難しい。そのため，2 人の場合の例題を解かせる。
問題 2 を仁で考えるにあたってグラフを用いるため，例題でもグラフを利用させる。

$x_1 + x_2 + x_3 = 3900$を利用させる。

	○小テスト 解答は添付するプリントに記載	場合分けが多く，難易度は高い。しかし，領域の考え方を１つずつ丁寧に行うことで，解くことができる。
	○シャープレイ値の紹介 「貢献具合を数値化したものを限界貢献度といい, 提携を結ぶプレイヤーの全ての順列に対して, 自分が加わった際の限界貢献度の期待値をシャープレイ値という」 また，一直線上にある場合,「乗っている区間のみ均等に支払う方法」 プレイヤー1・・・600 円 プレイヤー2・・・$600+150=750$ 円 プレイヤー3・・・$600+150+800=1550$ 円 とシャープレイ値は一致する。	最後にシャープレイ値の紹介をする。プリントも配布する。確率の考え方を用いているため，使われている数字の意味も考えられる生徒もいる。 シャープレイ値の公理系[3]も同時に教え，それぞれの考えの特徴も教える。
	仁，シャープレイ値のそれぞれの考え方のメリット，デメリットを議論させる。	どの場面においてどの考え方が適しているのかを考えさせることで批判する力，説明する力を養う。

相乗りタクシー

問題 1

同じ方向に家のある A，B，C の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅し、最後に下車した人が料金を支払い，翌日に皆で料金を精算する．その居酒屋からそれぞれの家にタクシーで直接帰宅した場合，
A の家まで 1800 円，B の家まで 2100 円，C の家まで 2900 円，
また，A の家から B の家までは 1800 円，A の家から C の家までは 2000 円，B の家から C の家までは 2300 円の料金が必要となる．
A，B，C をそれぞれプレイヤー 1 , 2 , 3 とする．
プレイヤー 1 , 2 , 3 が最も安くなるルートで 3 人の家を回るとき，それぞれいくらずつタクシー料金を負担すれば 3 人が納得する支払い方になるだろうか．

仮定

- プレイヤー 1 , 2 , 3 の 3 人でタクシーを相乗りする．
- 3 人の家を必ず回って全員帰宅する．
- 居酒屋から 1 の家まで 1800 円，
2 の家まで 2100 円，
3 の家まで 2900 円，
- 1 の家から 2 の家まで 1800 円，
1 の家から 3 の家まで 2000 円，
2 の家から 3 の家まで 2300 円，
- 3 人が納得いく料金の払い方をする。

上の仮定を下の四角の中に図でまとめてみよう!!

◯考えてみよう
プレイヤー１, ２, ３全員で１番安く相乗りするにはどの順で家を回ればよいのだろう. また，そのときにプレイヤー１, ２, ３は， それぞれいくらずつタクシー料金を負担すると皆が納得する支払い方になるだろうか.

- 考えをかいてみよう.

仲間の意見

$1 \to 2 \to 3$ または，$2 \to 1 \to 3$ の順で帰るときが最も安く，5900 円である．
一人で帰るときよりも安く支払いを済ませたい（得をしたい）と考えられるため，
プレイヤー 1，2，3 はそれぞれ 1800 円，2100 円，2900 円よりも安く精算したい．
と全員が宿題で考えてきてくれました．

○仲間の考え 1

距離 (金額) の比で金額を決める方法.

$1 \cdots 5900 \cdot \dfrac{1800}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 1562$ 円，$2 \cdots 5900 \cdot \dfrac{2100}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 1822$ 円，
$3 \cdots 5900 \cdot \dfrac{2900}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 2516$ 円

○仲間の考え 2

得した金額 900 円を分ける方法.

300 円，300 円，300 円に分ける．
もともと一人で帰るときの金額は，1800 円，2100 円，2900 円だったので，
プレイヤー 1，2，3 はそれぞれ 1500 円，1800 円，2600 円支払う

◯ 仲間の考え 1, 2 も納得できるかもしれない。
しかし，自分の考えと異なっている考えには，なにか納得できない部分があるはずだ.
その納得できない部分を書き出し，交流しよう．
（こういう部分が何は腑に落ちない，考慮したい等）

◯紹介した一人で帰るときよりも得をして，二人で帰るときよりも得をしたいという価値観を数学的に定式化し，解を１つに定めよう．

便益（得する金額）に注目して，文字等を使って考えてみよう．

特性関数の定義 (三人 ver)

N をプレイヤーの集合とする.$N=\{1,2,3\}$ である．$S\subseteq N$ に対して，
提携 S のプレイヤーが協力することによって得られる最大の利益のことを
特性関数といい，$v(S)$ と定義する.
また，プレイヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N,v) を特性関数形ゲームと呼ぶ.
ただし，$v(\phi)=0$ とする.

例: $v(N)$ を求める.

プレイヤー 1，2，3 がそれぞれ一人で帰るならば，必要となる料金は $1800+2100+2900$ 円，三人で協力して帰るならば，必要となる最安料金は $1800+1800+2300=5900$ 円または，$2100+1800+2000=5900$ 円なので，

$$
\begin{aligned}
v(N)=v(\{1,2,3\}) &= (1800+2100+2900)-5900 \\
&= 900
\end{aligned}
$$

よって，$v(N)=v(\{1,2,3\})=900$ 円となる.

◯ このようにして，今回の問題で，任意の S に対して $v(S)$ を求めてみよう.

特性関数の定義 (一般形)

N をプレイヤーの集合とする. このとき，特性関数 $v:2^N\longrightarrow\mathbf{R}$ を
各提携 $S\subseteq N$ に対して，

$v(S)=$ 提携 S のメンバーが協力することによって獲得できる最大便益 (べんえき)

と定義する.
プレイヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N,v) を特性関数形ゲームと呼ぶ.
ただし，$v(\phi)=0$ とする.

配分の定義 (三人 ver)

3 人、特性関数形ゲーム (N, v) において，利得ベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$ が
次の 2 条件を満たすとき、x を配分という.

(i) $x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$ …… 全体合理性
(今回の問題では，全員の得した金額の和は全体で得した金額と一致すること)

(ii) 任意の $i \in N$ に対して、$x_i \geq v(\{i\})$ …… 個人合理性
(今回の問題では，一人で帰るよりも得したいということ)

また，この配分の集合を $\mathcal{I}(v)$ と表す。

プレイヤー 1，2，3 の配分は $x = (x_1, x_2, x_3)$ と表す.

例えば，プレイヤー 1，2，3 にそれぞれ 300 円ずつ配分したとき，$x = (300, 300, 300)$ と表す.

◯今回の問題で、x_1, x_2, x_3 の満たすべき配分の定義による条件を求めてみよう.

(i) 全体合理性より

(ii) 個人合理性より

配分の定義

n 人、特性関数形ゲーム (N, v) において，利得ベクトル $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が
次の 2 条件を満たすとき、x を配分という.

(i) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(N)$ …… 全体合理性

(ii) 任意の $i \in N$ に対して、$x_i \geq v(\{i\})$ …… 個人合理性

また，この配分の集合を $\mathcal{I}(v)$ と表す。

コアの定義 (三人 ver)

特性関数形ゲーム (N, v) におけるコアとは，
任意の $S \subseteq N$，$i \in S$ に対して、

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \cdots\cdots \text{提携合理性}$$

を満たす $\underbrace{\text{配分}}_{\text{個人合理性，全体合理性を満たす}}$ x の集合のことである．
また，コアの集合を $\mathcal{C}(v)$ と表す。

例えば，$S = \{1, 2\}$ で帰るとき，不等式は $x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\})$ となる．
よって，今回の問題で $S = \{1, 2\}$ としたとき，$v(\{1, 2\}) = 300$ なので，
$x_1 + x_2 \geq 300$ という条件が導出される．

◯ 今回の問題で任意の S について，コアの定義による条件を求めよう．

コアの定義

$S \neq \phi$ となる任意の提携 S に対して，$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ を満たす x_i の組をコアと定義する．

また，コアの集合を $\mathcal{C}(v)$ と表す。

コアに属していれば、配分の条件も満たすことになる．

個人合理性，提携合理性，全体合理性の条件を用いると，**今回の場合**は，
先程のそれぞれのプレイヤーのタクシー料金の支払い金額を導くことができる．

問題 2

同じ方向に家のある プレイヤー1，2，3 の3人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅した．居酒屋と3人の家は同じ一本道沿いにあり，居酒屋からプレイヤー1，プレイヤー2，プレイヤー3の順に家があり，その居酒屋からそれぞれの家に帰宅した場合，プレイヤー1の家まで1800円，プレイヤー2の家まで2100円，プレイヤー3の家まで2900円の料金がかかる．そして，最後に下車するプレイヤー3が料金を支払い，翌日に皆で精算する．このとき，プレイヤー1，2，3が納得して料金を支払うには，それぞれ何円ずつ支払えばよいのか．

仮定

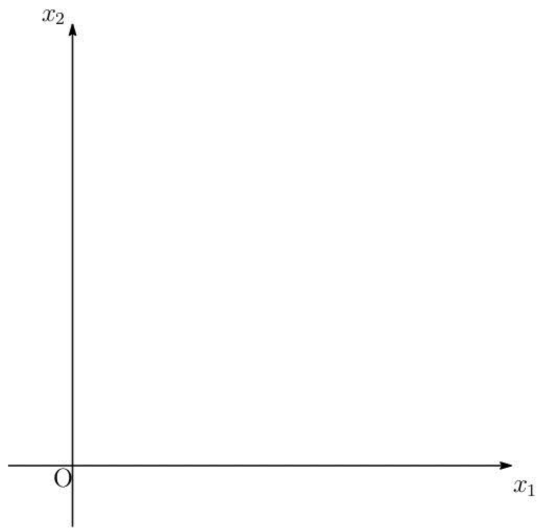
- プレイヤー1，2，3の3人でタクシーを相乗りする．
- 3人の家は同じ一本道沿いにあり，全員帰宅する．
- 居酒屋から 1 の家まで 1800 円，
2 の家まで 2100 円，
3 の家まで 2900 円，
- 3 人が納得いく料金の支払い方をする。

上の仮定を下の四角の中に図でまとめてみよう!!

◯考えてみよう 3

前回考えた様々な定義を踏まえて，タクシー料金を求めてみよう.
(不等式を立て，解いても解は一つに定まらない. そこで，どのように考えて解を一つに定めるのか考えてみよう.)

- まずは，不等式を立て，それを解き，不等式の満たす範囲を下のグラフに図示しよう.



●前ページのグラフの領域の内部にあればすべてのプレイヤーは納得しそうだが，その中で，全員が最も納得しそうなタクシー料金の支払い方を考えてみよう．

仲間の意見

∘ 仲間の考え 1

距離 (金額) の比で金額を決める方法.

$1 \cdots 2900 \cdot \dfrac{1800}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 768$ 円，$2 \cdots 2900 \cdot \dfrac{2100}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 896$ 円，
$3 \cdots 2900 \cdot \dfrac{2900}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 1237$ 円

∘ 仲間の考え 1

距離 (金額) の比で利益を配分する方法.

$1 \cdots 3900 \cdot \dfrac{1800}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 1032$ 円，$2 \cdots 3900 \cdot \dfrac{2100}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 1204$ 円，
$3 \cdots 3900 \cdot \dfrac{2900}{1800+2100+2900} \fallingdotseq 1663$ 円

∘ 仲間の考え 2

得した金額 3900 円を分ける方法.

1300 円，1300 円，1300 円に分ける

◯ 仲間の考え 1, 2 は，コアの条件を満たす料金の支払い方になっている.
この支払い方にも，なにか改善点はあるのだろうか.

もしあるならば，改善点を下の余白に書いてみよう.

もしなければ，良い理由も書いてみよう.

◯ どのように考えたらプレイヤー1, 2, 3全員が納得するタクシー料金の支払い方ができるのだろうか．考えてみよう．

〇平等に「得」をできていないから納得いかない（不満をもつ）．
その「得」や不満って何だろうか． 数値で表してみよう．

〇全ての提携（個人も含む）に関する不満を求めよう．
また，全員の不満を小さくすることは不可能。
→最大の不満を小さくしよう．

＜計算スペース＞

不満の定義

配分xに関する提携Sの不満を$e(S,x)$と表し，以下のように定義する．

$$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

仁の定義

最大の不満を最小にしようという考え方

不満の定義

配分xに関する提携Sの不満を$e(S,x)$と表し，以下のように定義する．

$$e(S,x)=v(S)-\sum_{i\in S}x_i$$

正の値になると不満をもち，値が小さくなればなるほど不満が無くなっていく．

例えば，$S=\{1\}$ のとき，$e(\{1\})=v(\{1\})-x_1=0-x_1=-x_1$ となる．

◯任意の提携 S についての不満を全て書き出そう．

平等な配分をするために，全てのプレイヤーや提携が不満を平等に持つように

この中で最大不満を見つけ，それをできるだけ小さくしていく配分を考えたい．

→ **最大**不満の**最小**値を求める．

すなわち，$f(x_1,x_2,x_3)=\max\{e(\{1\}),e(\{2\}),e(\{3\}),e(\{1,2\}),e(\{1,3\}),e(\{2,3\})\}$

としたときの，$\displaystyle\min_{x_1,\,x_2,\,x_3} f(x_1,x_2,x_3)$ となる値を求めることになる．

上記の不満は 6 つもあるため，考えづらい．まずは 2 人の例を考えてみよう．

◯例題

$$\begin{cases} e(\{1\})=-x_1 \\ e(\{2\})=-x_2 \end{cases}$$

また，$x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，$x_1+x_2=100$ である．

このとき，大きい方の不満を見つけ，最小化してみよう．すなわち，$f(x_1,x_2)=\max\{e(\{1\})$, $e(\{2\})\}$ としたときの，$\displaystyle\min_{x_1,\,x_2} f(x_1,x_2)$ となる値を求めることになる．

2人の場合ができたので,
◯今回の問題(3人)についても,最大不満を最小化してみよう.

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \\ e(\{3\}) = -x_3 \\ e(\{1,2\}) = 1800 - x_1 - x_2 = x_3 - 2100 \\ e(\{1,3\}) = 1800 - x_1 - x_3 = x_2 - 2100 \\ e(\{2,3\}) = 2100 - x_2 - x_3 = x_1 - 1800 \end{cases}$$

を $0 \leq x_1$, $0 \leq x_2$, $0 \leq x_3$, $1800 \leq x_1+x_2$, $1800 \leq x_1+x_3$, $2100 \leq x_2+x_3$, $x_1+x_2+x_3 = 3900$ の条件下で最大不満を最小にする.

＜計算用紙＞

最大値のグラフをかいて解くのは大変だった. 式のみで解いていく方法もある.
◯例として，2 人の時を考えよう.

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \end{cases}$$

また，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_1 + x_2 = 100$ である.
これらの値はどっちが大きくなるか分からない. それらを上からある値 M で抑える.
すると，最大値を上から抑えることになり，その M を最小にすることで，最大値を最小化することができる.

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \leq M \\ e(\{2\}) = -x_2 \leq M \end{cases}$$

◯この M の最小値を求めることで，配分を求めよう.
M の最小値を求める際には，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_1 + x_2 = 100$ の条件を満たしているのかも確認しよう.

解説

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \leq M \\ e(\{2\}) = -x_2 = x_1 - 100 \leq M \end{cases}$$

よって，$-M \leq x_1$，$x_1 \leq M + 100$ となる. よって，

$$-M \leq x_1 \leq M + 100$$

となるので，$-M \leq M + 100$ より，$-50 \leq M$ となる. これを満たす M の最小値は $M = -50$ であり，これは $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$ を満たしている.

$M = -50$ であるので，

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \leq -50 \\ e(\{2\}) = -x_2 = x_1 - 100 \leq -50 \end{cases}$$

よって，

$$50 \leq x_1$$
$$x_1 \leq 50$$

より，$x_1 = 50$ となる. また，$x_1 + x_2 = 100$ なので，
求める配分は，$x_1 = x_2 = 50$ である.

◯ 問題に戻って，3 人の時も M の最小値を求めることで，配分を求めよう．

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \leq M \\ e(\{2\}) = -x_2 \leq M \\ e(\{3\}) = -x_3 \leq M \\ e(\{1,2\}) = 1800 - x_1 - x_2 \leq M \\ e(\{1,3\}) = 1800 - x_1 - x_3 \leq M \\ e(\{2,3\}) = 2100 - x_2 - x_3 \leq M \end{cases}$$

M の最小値を求める際には，個人合理性，提携合理性，全体合理性の条件である，
$0 \leq x_1$， $0 \leq x_2$， $0 \leq x_3$， $1800 \leq x_1 + x_2$， $1800 \leq x_1 + x_3$， $2100 \leq x_2 + x_3$，
$x_1 + x_2 + x_3 = 3900$ の条件を満たしているのかも確認しよう．

解説

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \leq M \\ e(\{2\}) = -x_2 \leq M \\ e(\{3\}) = -x_3 \leq M \\ e(\{1,2\}) = 1800 - x_1 - x_2 = x_3 - 2100 \leq M \\ e(\{1,3\}) = 1800 - x_1 - x_3 = x_2 - 2100 \leq M \\ e(\{2,3\}) = 2100 - x_2 - x_3 = x_1 - 1800 \leq M \end{cases}$$

より，上の 3 つの式から，$-M \leq x_1$，$-M \leq x_2$，$-M \leq x_3$，
下の 3 つの式から，$x_3 \leq M + 2100$，$x_2 \leq M + 2100$，$x_1 \leq M + 1800$ となるので，

$$\begin{aligned} -M \leq x_1 \leq M + 1800 \\ -M \leq x_2 \leq M + 2100 \\ -M \leq x_3 \leq M + 2100 \end{aligned}$$

となるので，$-M \leq M + 1800$，$-M \leq M + 2100$，$-M \leq M + 2100$ となる．
また，x_1, x_2, x_3 は伴って変わる変数なので，上記の 3 式を足して，
$-3M \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3M + 6000$ という条件も確認し忘れないように!!
これらの 4 つの不等式を解くと，$-900 \leq M$，$-1050 \leq M$，$-1050 \leq M$，
また，$-3M \leq 3900 \leq 3M + 6000 \rightarrow -1300 \leq M, -700 \leq M$ となる．
これらの共通範囲は，$-700 \leq M$ となるので，これを満たす最小の M は $M = -700$ となる．
また，$M \leq 0$ なので，これは，個人合理性も提携合理性も満たしている．

$M=-700$ なので，

$$\begin{cases} e(\{1\})=-x_1\leq -700 \\ e(\{2\})=-x_2\leq -700 \\ e(\{3\})=-x_3\leq -700 \\ e(\{1,2\})=1800-x_1-x_2=x_3-2100\leq -700 \\ e(\{1,3\})=1800-x_1-x_3=x_2-2100\leq -700 \\ e(\{2,3\})=2100-x_2-x_3=x_1-1800\leq -700 \end{cases}$$

となり，

$$-700\leq x_1\leq 1100$$
$$-700\leq x_2\leq 1400$$
$$-700\leq x_3\leq 1400$$

である. これに加えて，$x_1+x_2+x_3=3900$ なので，
求める配分は，$x_1=1100$，$x_2=1400$，$x_3=1400$ となる.

仁

今求めた，最大の不満を最小のものにしようという考え方を **「仁」** という.
すなわち，今回の問題の場合，$f(x_1,x_2,x_3)=\max\{e(\{1\}),e(\{2\}),e(\{3\}),e(\{1,2\}),e(\{1,3\}),e(\{2,3\})\}$ としたときの，$\displaystyle\min_{x_1,\,x_2,\,x_3}\{f(x_1,x_2,x_3)\}$ となる値を求めることである.

次に貢献具合に着目して配分を定める考え方を紹介する.
それを**「シャープレイ値」**という.

シャープレイ値を定義する前に，**「限界貢献度」**というものを定義する.
「限界貢献度」とは，プレイヤーが参加することによる利益の増分のことである.

限界貢献度の定義

プレイヤー全体の集合をNとし，任意のプレイヤーをiとする。部分集合$S \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して，

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

をプレイヤーiの限界貢献度と定義する。

今回の問題の場合，
$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 1800 - 0 = 1800$
$v(\{1,3\}) - v(\{1\}) = 1800 - 0 = 1800$
$v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 1800 - 0 = 1800$
$v(\{2,3\}) - v(\{2\}) = 2100 - 0 = 2100$
$v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 1800 - 0 = 1800$
$v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 2100 - 0 = 2100$
$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 3900 - 1800 = 2100$
$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = 3900 - 1800 = 2100$
$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 3900 - 2100 = 1800$
$v(\{1\}) - v(\phi) = 0$
$v(\{2\}) - v(\phi) = 0$
$v(\{3\}) - v(\phi) = 0$

「シャープレイ値」とは，あるプレイヤーが任意の提携Sに参加することを想定し，その提携Sが構成される順序を全ての順列について考え，その際に発生する限界貢献度を平均した値のことである.

シャープレイ値の定義

プレイヤーの集合Nとする.任意の部分集合$S \subseteq N$に対して
Sの要素の数をsとする.($S = \phi$ならば$s = 0$.)
そのとき，次の式で与えられるプレイヤー$i \in N$の利得$\phi_i(v)$を
特性関数型ゲーム(N, v)におけるプレイヤーiのシャープレイ値という.

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(3-s-1)!}{3!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

提携 S の全ての順列を考え，その確率を $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ に掛けている．
これは，任意の提携 S の順列に対して $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ を求め，平均することと同値．
提携に参加するの全ての順列とは，
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$，　$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$，
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$，　$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$，
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$，　$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$，　　が考えられる．

◯以下，プレイヤー1のシャープレイ値を考える．
•定義に従うと，
$S = \{2\}$ のとき，($2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$ のとき)

$$\frac{1!(3-1-1)!}{3!}(v(\{2,1\}) - v(\{2\})) = \frac{1}{6} \cdot 1800$$

$S = \{3\}$ のとき，($3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$ のとき)

$$\frac{1!(3-1-1)!}{3!}(v(\{3,1\}) - v(\{3\})) = \frac{1}{6} \cdot 1800$$

$S = \{2,3\}$ のとき，($2 \leftarrow 3 \leftarrow 1, 3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$ のとき)

$$\frac{2!(3-2-1)!}{3!}(v(\{2,3,1\}) - v(\{2,3\})) = \frac{2}{6} \cdot 1800$$

$S = \{\phi\}$ のとき，($1 \leftarrow 2 \leftarrow 3, 1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$ のとき)

$$\frac{0!(3-0-1)!}{3!}(v(\{\phi\} \cup \{1\}) - v(\{\phi\})) = \frac{2}{6} \cdot 0$$

$$\begin{aligned}\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(3-s-1)!}{3!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) &= \frac{1}{6} \cdot 1800 + \frac{1}{6} \cdot 1800 + \frac{2}{6} \cdot 1800 + \frac{2}{6} \cdot 0 \\ &= \frac{1 \cdot 1800 + 1 \cdot 1800 + 2 \cdot 1800 + 2 \cdot 0}{6} \\ &= 1200\end{aligned}$$

•平均する考え方だと，
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$ のとき，$v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 1800 - 0 = 1800$
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$ のとき，$v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 1800 - 0 = 1800$
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$ のとき，$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 3900 - 2100 = 1800$
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$ のとき，$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 3900 - 2100 = 1800$
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ のとき，$v(\{1\}) - v(\phi) = 0$
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$ のとき，$v(\{1\}) - v(\phi) = 0$

$$\phi_i(v) = \frac{1800 + 1800 + 1800 + 1800 + 0 + 0}{6} = 1200$$

このようにして，シャープレイ値を求めることができる．

◯上記のようにして、プレイヤー2，3のシャープレイ値もそれぞれ求めてみよう．
(プレイヤー2，プレイヤー3のシャープレイ値は，どちらも1350になる．)

小テスト：初年次セミナー（相乗りタクシー1）

学籍番号	名前

ある会社1, 2, 3が事業提携を結ぼうか迷っています．1のみで事業をすると200万円の**便益**が出ます．2のみだと170万円，3のみだと230万円の**便益**をそれぞれ得られます．また，1と2が協力して事業をすると450万円の**便益**が出ます．2と3の場合，470万円，1と3の場合，500万円です．そして，三社が協力して事業をすると710万円の**便益**を得られます．

ただし，$N=\{1,2,3\}$とし，SをNの部分集合とする．

(1)　$v(S)$を特性関数にしたとき，$\forall S$に対して$v(S)$を求めよ.(ただし，$v(\phi)=0$は書かなくてよい. また，単位は万円とし，単位はつけなくてよい．)

1, 2, 3の得られる金額をそれぞれx_1, x_2, x_3とすると配分$x=(x_1, x_2, x_3)$と表せる.

(2)　配分の定義に従って個人合理性，全体合理性の条件をそれぞれ求めよ.

(3)　コアの定義に従って提携合理性の条件を求めよ．($S\neq\phi, \{i\}, N$の場合のみでよい)

(4)　(2), (3)の等式，不等式を解き，1, 2, 3に便益を何万円ずつ得られるか求めよ.

小テスト：初年次セミナー（相乗りタクシー2）

学籍番号	名前

問題用紙

提携 S のもつ不満を $e(\{S\}) = v(S) - \sum_{\{i\}\in S} x_i$ と表す．

簡単にするため，$e(S,x)$を$e(S)$と表している。

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \\ e(\{3\}) = -x_3 \\ e(\{1,2\}) = 1800 - x_1 - x_2 = x_3 - 2100 \\ e(\{1,3\}) = 1800 - x_1 - x_3 = x_2 - 2100 \\ e(\{2,3\}) = 2100 - x_2 - x_3 = x_1 - 1800 \end{cases}$$

また，$0 \leq x_1$， $0 \leq x_2$， $0 \leq x_3$， $1800 \leq x_1 + x_2$， $1800 \leq x_1 + x_3$，
$2100 \leq x_2 + x_3$， $x_1 + x_2 + x_3 = 3900$ の条件がある．
これらの不満の最大不満を最小にしよう．
($f(k, x_2, x_3) = \max\{e(\{1\}), e(\{2\}), e(\{3\}), e(\{1,2\}), e(\{1,3\}), e(\{2,3\})\}$ とする．)
x_2 と x_3 に対称性があるので，$x_2 \leq x_3$ のときの場合のみを考えればよかった．
(x_1 は $x_1 = k$ として固定する．)
その時に，$x_2 \leq x_3$ から，$e(\{2\}), e(\{3\}), e(1,2), e(\{1,3\})$ のなかで，$e(1,2)$ が最大であると分かった．あとは，$e(\{1\})$ と $e(\{2,3\})$ を比べ，この二つの不満の大きい方と $e(\{1,2\})$ を比べる．
ここで，(i) $e(\{1\}) \geq e(\{2,3\})$ と (ii) $e(\{1\}) \leq e(\{2,3\})$ の場合分けをする．
場合分け (i) では，$x_3 \leq 2100 - k$ のとき，$f(k, x_2, x_3) = -k$ で，
$x_3 \geq 2100 - k$ のとき，$f(k, x_2, x_3) = k - 1800$ であり，$\min_{k,\, x_2,\, x_3} f(k, x_2, x_3) = -300$ となり，その時の配分は $(x_1, x_2, x_3) = (300, 1800, 1800)$ であった．

- 問 1 (ii) について解き進め，(ii) の時の最大不満 $f(k, x_2, x_3)$ を求め，
  その最小値とその時の配分も求めよ．
- 問 2 (i) から得られた結果と，今求めた (ii) の結果をもとにして，
  最大不満を最小化する配分を 1 つに定めよ．

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -k \\ e(\{2\}) = -x_2 \\ e(\{3\}) = -x_3 \\ e(\{1,2\}) = x_3 - 2100 \\ e(\{1,3\}) = x_2 - 2100 \\ e(\{2,3\}) = k - 1800 \end{cases}$$

また，$0 \leq k$， $0 \leq x_2$， $0 \leq x_3$， $1800 \leq k+x_2$， $1800 \leq k+x_3$， $2100 \leq x_2+x_3$，
$k + x_2 + x_3 = 3900$ の条件がある．

小テスト：初年次セミナー（相乗りタクシー2）

学籍番号	名前

解答用紙

2 人の場合を例にして考えてみよう.

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \end{cases}$$

簡単にするため，$e(S,x)$を$e(S)$と表している。

また，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_1 + x_2 = 100$ である.
このとき，最大不満を最小化した配分を求めよう.

解答

変数が 2 つあるとどっちの不満が大きいか分からないので，文字を一つ減らす.(x_2 を消去する)

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 = x_1 - 100 \end{cases}$$

よって，$-x_1$ と $x_1 - 100$ のどちらの不満が大きくなるのか場合分けして考える.
また，その大きい方の不満を $f(x_1, x_2)$ とおく.($f(x_1, x_2) = \max\{e(\{1\}), e(\{2\})\}$)

(i) $-x_1 \leq x_1 - 100$ のとき，

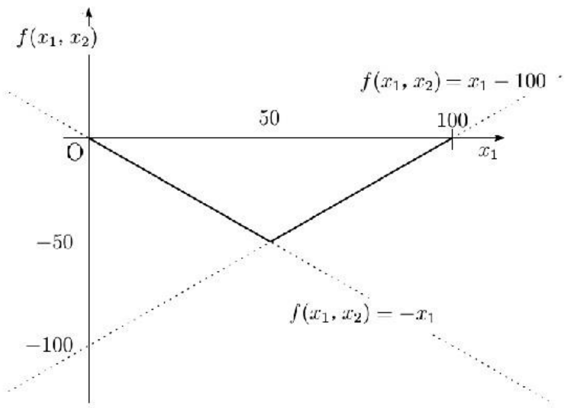
$$\begin{aligned} -x_1 &\leq x_1 - 100 \\ 100 &\leq 2x_1 \\ 50 &\leq x_1 \end{aligned}$$

したがって，$50 \leq x_1$ のとき，
$f(x_1, x_2) = x_1 - 100$ となる.

(ii) $-x_1 \geq x_1 - 100$ のとき，

$$\begin{aligned} -x_1 &\geq x_1 - 100 \\ 100 &\geq 2x_1 \\ 50 &\geq x_1 \end{aligned}$$

したがって，$50 \geq x_1$ のとき，
$f(x_1, x_2) = -x_1$ となる.



$f(x_1, x_2)$ の挙動は，上図より分かった. この $f(x_1, x_2)$ の最小値 ($\min\limits_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$) は，-50 で，その時, $x_1 = 50$ である. また，$x_1 + x_2 = 100$ を用いると，$x_2 = 50$ となる.
したがって，求める配分は，$x_1 = x_2 = 50$ となる.

簡単にするため，$e(S,x)$を$e(S)$と表している。

問題を考えてみよう．

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -x_1 \\ e(\{2\}) = -x_2 \\ e(\{3\}) = -x_3 \\ e(\{1,2\}) = 1800 - x_1 - x_2 = x_3 - 2100 \\ e(\{1,3\}) = 1800 - x_1 - x_3 = x_2 - 2100 \\ e(\{2,3\}) = 2100 - x_2 - x_3 = x_1 - 1800 \end{cases}$$

また，$0 \leq x_1$，$0 \leq x_2$，$0 \leq x_3$，　$1800 \leq x_1 + x_2$，$1800 \leq x_1 + x_3$，$2100 \leq x_2 + x_3$，$x_1 + x_2 + x_3 = 3900$ の条件がある．これらの不満の最大不満を最小にした配分を求めよう．

解答

変数が 3 つあるので，文字を一つ固定する．x_2 と x_3 には，対称性がある．したがって，残りの x_1 を定数とみる．$(x_1 = k)$ とおく．

$$\begin{cases} e(\{1\}) = -k \\ e(\{2\}) = -x_2 \\ e(\{3\}) = -x_3 \\ e(\{1,2\}) = x_3 - 2100 \\ e(\{1,3\}) = x_2 - 2100 \\ e(\{2,3\}) = k - 1800 \end{cases}$$

x_2 と x_3 に対称性があるので，　$x_2 \leq x_3$ のときを考えれば，　$x_2 \geq x_3$ も同様に考えれる．また，最大不満を $f(k, x_2, x_3)$ とおく.($f(k, x_2, x_3) = \max\{e(\{1\}), e(\{2\}), e(\{3\})$ $, e(\{1,2\}), e(\{1,3\}), e(\{2,3\})\})$

よって，　$x_2 \leq x_3$ のときのみを考える．

$$e(\{3\}) = -x_3 \leq -x_2 = e(\{2\})$$

また，$e(\{1,3\}) = x_2 - 2100 \leq x_3 - 2100 = e(\{1,2\})$

ここで，$x_2 + x_3 \geq 2100$ より，$x_3 - 2100 \geq -x_2$ となるので，

$e(\{2\}) = -x_2 \leq x_3 - 2100 = e(\{1,2\})$ となる．

したがって，$e(\{2\}), e(\{3\}), e(\{1,2\}), e(\{1,3\})$ の中で最大になる不満は
$e(\{1,2\}) = x_3 - 2100$ である．
あとは，$e(\{1\})$ と $e(\{2,3\})$ と比べなければならない．

(i)　$-k \geq k - 1800$ のとき，

$$\begin{aligned} -k &\geq k - 1800 \\ 1800 &\geq 2k \\ 900 &\geq k \end{aligned}$$

したがって，$900 \geq k$ のとき，
$e(\{1\}) = -k \geq k - 1800 = e(\{2,3\})$
となる．

(ii)　$-k \leq k - 1800$ のとき，

$$\begin{aligned} -k &\leq k - 1800 \\ 1800 &\leq 2k \\ 900 &\leq k \end{aligned}$$

したがって，$900 \leq k$ のとき，
$e(\{1\}) = -k \leq k - 1800 = e(\{2,3\})$
となる．

あとは，$e(\{1\})$ と $e(\{1,2\})$ のどちらがいつ大きくなるか考えればよい．

(ア)$e(\{1\}) = -k \leq x_3 - 2100$ のとき，

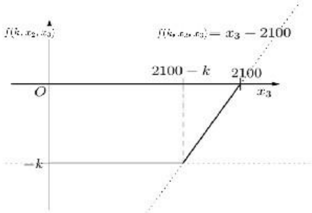
$$2100 - k \leq x_3$$

この時，$f(k, x_2, x_3) = x_3 - 2100$ となる．

(イ)$e(\{1\}) = -k \geq x_3 - 2100$ のとき，

$$2100 - k \geq x_3$$

この時，$f(k, x_2, x_3) = -k$ となる．



上図より，$f(k, x_2, x_3)$ の挙動は分かる．
この $f(k, x_2, x_3)$ の最小値は $-k$ で
$x_3 \leq 2100 - k$ のときである．
よって，この $-k$ の最小値を求めれば最大不満の最小値を求めることが出来る．
そのとき，つぎの条件を満たさなければならない．
$k+x_2+x_3 = 3900$，$0 \leq k$，$0 \leq x_2$，$0 \leq x_3$，$k + x_2 \geq 1800$，$k + x_3 \geq 1800$，$x_2 + x_3 \geq 2100$，$x_2 \leq x_3$，$k \leq 900$，$x_3 \leq 2100 - k$
$k + x_2 + x_3 = 3900$ を用いて，k を消去する式変形をすると，

$0 \leq k$

$$\begin{aligned} &\to 0 \leq 3900 - x_2 - x_3 \\ &x_2 + x_3 \leq 3900 \end{aligned}$$

$k + x_2 \geq 1800$

$$\begin{aligned} &\to 3900 - x_3 \geq 1800 \\ &2100 \geq x_3 \end{aligned}$$

$k + x_3 \geq 1800$

$$\begin{aligned} &\to 3900 - x_2 \geq 1800 \\ &2100 \geq x_2 \end{aligned}$$

あとは，$e(\{2,3\})$ と $e(\{1,2\})$ のどちらがいつ大きくなるか考えればよい．

(ウ)$e(\{2,3\}) = k - 1800 \leq x_3 - 2100$ のとき，

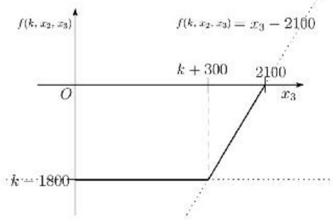
$$k + 300 \leq x_3$$

この時，$f(k, x_2, x_3) = x_3 - 2100$ となる．

(エ)$e(\{2,3\}) = k - 1800 \geq x_3 - 2100$ のとき，

$$k + 300 \geq x_3$$

この時，$f(k, x_2, x_3) = k - 1800$ となる．



上図より，$f(k, x_2, x_3)$ の挙動は分かる．
$f(k, x_2, x_3)$ の最小値は $k - 1800$ で
$x_3 \leq k + 300$ のときである．
よって，この $k - 1800$ の最小値を求めれば最大不満の最小値を求めることが出来る．
そのとき，つぎの条件を満たさなければならない．
$k+x_2+x_3 = 3900$，$0 \leq k$，$0 \leq x_2$，$0 \leq x_3$，$k + x_2 \geq 1800$，$k + x_3 \geq 1800$，$x_2 + x_3 \geq 2100$，$x_2 \leq x_3$，$900 \leq k$，$x_3 \leq k + 300$
$k + x_2 + x_3 = 3900$ を用いて，k を消去する式変形をすると，

$0 \leq k$

$$\begin{aligned} &\to 0 \leq 3900 - x_2 - x_3 \\ &x_2 + x_3 \leq 3900 \end{aligned}$$

$k + x_2 \geq 1800$

$$\begin{aligned} &\to 3900 - x_3 \geq 1800 \\ &2100 \geq x_3 \end{aligned}$$

$k + x_3 \geq 1800$

$$\begin{aligned} &\to 3900 - x_2 \geq 1800 \\ &2100 \geq x_2 \end{aligned}$$

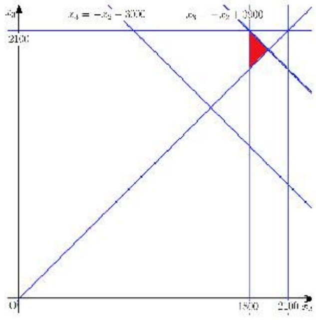
$k \leq 900$

$$\begin{aligned} \to 3900 - x_2 - x_3 &\leq 900 \\ 3000 &\leq x_2 + x_3 \end{aligned}$$

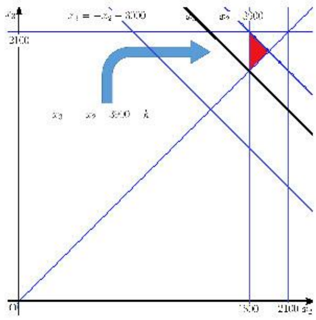
$x_3 \leq 2100 - k$

$$\begin{aligned} \to x_3 &\leq 2100 - (3900 - x_2 - x_3) \\ 1800 &\leq x_2 \end{aligned}$$

したがって，条件を整理すると，
$k+x_2+x_3 = 3900$，$3000 \leq x_2+x_3 \leq 3900$，$1800 \leq x_2 \leq 2100$，$0 \leq x_3 \leq 2100$，$x_2 \leq x_3$，
であり，このときの $-k$ の最小値を求める．
$3000 \leq x_2+x_3 \leq 3900$，$1800 \leq x_2 \leq 2100$，$0 \leq x_3 \leq 2100$，$x_2 \leq x_3$
この条件を図示すると以下の領域となる．



最後に $k + x_2 + x_3 = 3900$ を用いて，線形計画法を行い，$-k$ が最小となるように，x_2, x_3 を定める．



$k + x_2 + x_3 = 3900$ が上図の時に $-k$ が最小となるので，その時，$x_2 = x_3 = 1800$.

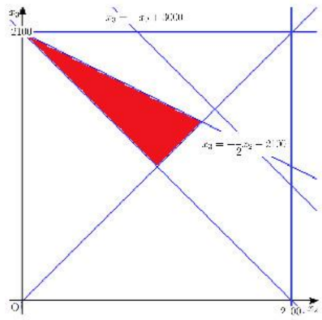
$900 \leq k$

$$\begin{aligned} \to 900 &\leq 3900 - x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 &\leq 3000 \end{aligned}$$

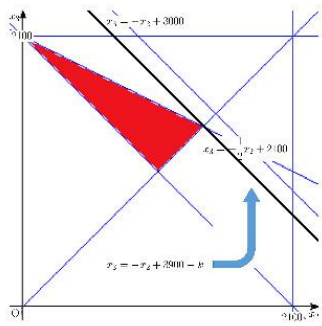
$x_3 \leq k + 300$

$$\begin{aligned} \to x_3 &\leq 3900 - x_2 - x_3 + 300 \\ 2x_3 &\leq -x_2 + 4200 \\ x_3 &\leq -\frac{1}{2}x_2 + 2100 \end{aligned}$$

したがって，条件を整理すると，
$k+x_2+x_3 = 3900$，$2100 \leq x_2+x_3 \leq 3000$，$0 \leq x_2 \leq 2100$，$0 \leq x_3 \leq 2100$，$x_2 \leq x_3$，$x_3 \leq -\frac{1}{2}x_2 + 2100$
であり，このときの $k-1800$ の最小値を求める．
$2100 \leq x_2 + x_3 \leq 3900$，$0 \leq x_2 \leq 2100$，$0 \leq x_3 \leq 2100$，$x_2 \leq x_3$，$x_3 \leq -\frac{1}{2}x_2 + 2100$
この条件を図示すると以下の領域となる．



最後に $k + x_2 + x_3 = 3900$ を用いて，線形計画法を行い，$k-1800$ が最小となるように，x_2, x_3 を定める．



よって，$k = 300$
したがって，$(x_1, x_2, x_3) = (300, 1800, 1800)$ で最大不満の最小値は -300 となる．

$k+x_2+x_3 = 3900$ が上図の時に $k-1800$ が最小となるので，その時，$x_2 = x_3 = 1400.$
よって，$k = 1100$
したがって，$(x_1, x_2, x_3) = (1100, 1400, 1400)$ で最大不満の最小値は -700 となる．

上記の (i)，(ii) より，$(x_1, x_2, x_3) = (1100, 1400, 1400)$ で最大不満の最小値は -700 となるので，$x_2 \leq x_3$ では，$(x_1, x_2, x_3) = (1100, 1400, 1400)$ で最大不満の最小値は -700 となる． さらに， $x_2 \geq x_3$ のときも同様に考えると，x_2 と x_3 の対称性から，$(x_1, x_2, x_3) = (1100, 1400, 1400)$ で最大不満の最小値は -700 となる．
したがって，求める配分は，$(x_1, x_2, x_3) = (1100, 1400, 1400)$ となる．

授業前アンケート

(i)　身近な問題について数学を用いて考えた経験がありますか。

ある　　少しある　　あまりない　　ない

◯ある，少しあると答えた人に聞きます。
なぜ数学を用いて考えようと思いましたか。

(ii)　高校で習った数学で生活の役に立つ (立っている) と思う単元はありますか。
また，それはどの単元でどのような生活の場面で役に立つ (立っている) と思いますか。

(iii)　身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますか。

思う　　少し思う　　あまり思わない　　思わない

◯それはなぜですか。

ご協力ありがとうございました。岐阜大学大学院教育学研究科１年　林　訓史

授業後アンケート

(i)　高校で習った数学は生活の役に立つと思いますか。

思う　　少し思う　　あまり思わない　　思わない

◯ それはなぜですか。

(ii)　数学の活用について興味を持ちましたか。

持った　　少し持った　　あまり持たない　　持たない

◯ それはなぜですか。

(iii)　身近な問題について数学を用いて考えてみたいと思いますか。

思う　　少し思う　　あまり思わない　　思わない

◯ それはなぜですか。

ご協力ありがとうございました。岐阜大学大学院教育学研究科１年　林　訓史

最終レポート

提出期限:7/30(月) 昼休み終了まで
提出場所:A408 の前の箱の中へ

全部で 3 回授業をさせていただきました. それについてのレポートを課します.
相乗りタクシーの問題を通して，便益をどのように配分するのか定めました.
そこで，日常の場面で料金または便益を配分する場面を見つけ，そのときにどのような配分の仕方をすると良いと考えるのかレポートにまとめてきてください.
日常の場面は詳しく述べてください. もし，難しければ私が提示した問題のように具体的な例を作ってもらっても構いません.
(1) 日常生活の場面で料金または便益を配分する場面を教えてください.
(2) (1) のときに，あなたはどのような配分をするとよいと考えるか教えてください.