岐阜数学教育研究
2018,Vol.17,174-190

三角関数の性質を利用した教材の開発と実践

高木正志[1]，菱川洋介[2]

本研究では，数学Ⅱの単元「三角関数」がどのような場面で利用・活用できるかということを焦点に，音と数学の関わりについての教材開発と実践を行った。本教材は，数学Ⅱ「三角関数」を学習した高校生を対象としている。音を三角関数で表現，及び分析することを通して，身近な事象を数学で表すことができることを実感し，数学の有用性に気づくことができることを目標に開発を試みた。本論文は，教材の内容，実践の結果，及びその考察について報告する。

＜キーワード＞音，三角関数，和積の公式，極値

1. はじめに

高等学校数学において，学んだ内容の利用や活用を取り扱う授業は，小学校や中学校の算数・数学の授業と比べると極めて少ないのではないかと著者は考えている。事実，我々が高等学校で受けた数学の授業において，利用や活用を取り扱った場面は問題演習程度である。また，現行の小学校算数及び中学校数学の教科書には，各章毎に必ず学んだ内容を利用したり活用したりする節が設けられており，学んだ内容が具体的な場面でどのように活かされるのかを例示している。その一方，高等学校数学の教科書はそのような節が設けられておらず，利用や活用の場面が強調されていないのではないかと我々は考えている。

さらに，高等学校学習指導要領（平成 30 年 3 月公示）数学編・理数編第 2 章第 2 節 2(1) 数学科の目標の改善に記載されている高等学校数学科の目標 (2) にある通り，事象と数学を繋げる授業が必要とされている。そのため，数学の有用性を実感しながら，数学を身近な事象に置き換え，具体的に捉えることができる授業の開発が必要である。

これらの背景を踏まえ，本研究では高等学校数学を学ぶ生徒が数学の有用性を実感できることを目的とし，既習内容を具体的な場面で利用・活用できるような教材を開発・実践した。具体的には，音と三角関数の関わりを題材として教材を開発し，高等学校数学Ⅱの単元「三角関数」を学習している生徒を対象に授業実践を行った。

本論文では，開発した教材の内容について論述し，その実践結果及び考察について記す。

2. 三角関数を用いた教材の研究

2.1 教材の概要

本教材は数学の有用性に気付かせるために，身近な事象が数学で表される例として，普段無意識のうちに聞いている“音”と，高校数学で扱われる三角関数の関係を題材とする。三角関数の性質や公式は，授業や試験問題などの場面でよく扱われる。一方，具体的な事象として，どんな場面で利用・活用されるのかを取り扱うことは多くない。本教材では音と三角関数の関係から，三角関数が活用される具体的場面を提示できる。さらに，2 つの三角関数の和を積になおす公式（以下，和積の公式）を身近な事象に応用することで，公式を用いることの意義を見出すことができる教材となっている。

2.2 音に関する数学的な基礎知識

t を実数，a, A を正の定数とする。純音（例えば音叉など）の波形は

$$f(t) = a\sin(2\pi At)$$

で表される。音の音量と音程は，それぞれ振

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

幅 a と周波数 A の値によって決定される。

本論文では，一般性を失わないので $2\pi t = x$ と置き，$f(x) = a\sin Ax$ として関数を扱いやすくする。

本実践では，音源（楽器やスピーカー等）から音量 1，周波数比 $A : B\ (A, B \in \mathbb{N}, A > B)$ の 2 つの音を同時に鳴らすという現象について調べる。その関数は $f(x) = \sin Ax + \sin Bx$ と表すことができる。今後，全ての $f(x)$ はこの関数とする。なお，A と B が互いに素であるならば，周期 2π をもつ周期関数であることに注意する。

本教材では，7 音階（ド，レ, ミ, ファ, ソ, ラ, シ）を純正律と呼ばれる音律で扱う。その理由は，純正律は簡単な整数比で周波数比を表すことができるからである。下表は，ドを基準に，7 音階を純正律の周波数比で表したものである。

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

加えて，ドと他の音を同時に鳴らすとき，聞こえてくる音の協和音程，及び不協和音程について下表のことが知られている。

完全協和音程	不完全協和音程	不協和音程
ド, ソ, ファ	ミ, ラ	レ, シ
非常に綺麗	綺麗	綺麗でない

2.3 問題と結果

本研究をすすめるにあたり，$f(x)$ の A, B に純正律の周波数比を用いて具体的な数値を入れ，グラフ描画ソフトを利用して視覚的に検証してみた。その結果，協和音程及び不協和音程であることの分類を調べるにあたり，以下の推測を持った。

推測

不協和音程に近いほど，1 周期内におけるグラフの極値の個数が多くなっていき，不協和音程になるとその個数が最大になる。

この推測は，音量の大小の回数が多いほど不協和音程に近づいたり，不協和音程になることを意味する。しかし，実際に $f(x)$ の導関数は $f'(x) = A\cos Ax + B\cos Bx$ となり，極値の個数を数えるのは困難である。そこで，$f(x) = 0$ となる点の個数に着目した。ロルの定理から，2 つの異なる $f(x) = 0$ となる点の間に必ず 1 つ以上の極値を持つことが知られているからである。

これらを踏まえ，本研究において，以下の問題を設定し，その結果を予想した。

＜問題＞

A と B は互いに素な自然数とする。この時，区間 $x \in [0, 2\pi)$ における $f(x) = 0$ の解の個数と，$f'(x) = 0$ の解の個数には，どのような関係があるか。

＜予想される結果＞

どちらの解の個数も等しい。

実際，1 オクターブ間かつ，ドとその他の音を同時に鳴らすという限定的な設定ではあるが，この予想が正しいことを調べたため，以下概要を記述する。

始めに，$f(x) = 0$ となる点の個数について，以下を紹介する。

命題 2.1（$f(x) = 0$ となる点の個数）

A と B は互いに素な自然数で，$A > B$ とする。このとき，区間 $[0, 2\pi)$ における $f(x) = 0$ となる x の個数は $2A$ 個である。ただし，重解を持つ場合は，重複度を数えるものとする。

証明　$f(x)$ に和積の公式を用いると，

$$f(x) = 2\sin\tfrac{A+B}{2}x\cos\tfrac{A-B}{2}x$$

となる。$f(x) = 0$ のとき，

$$\sin\tfrac{A+B}{2}x = 0 \ \text{または}\ \cos\tfrac{A-B}{2}x = 0$$

であることから，

$$\tfrac{A+B}{2}x = (n-1)\pi \ \text{または}\ \tfrac{A-B}{2}x = \tfrac{2n-1}{2}\pi$$

となる。ここで，n は任意の整数である。以上のことから，$f(x) = 0$ の解は，

$$x = \tfrac{2(n-1)}{A+B}\pi \ \text{または}\ \tfrac{2n-1}{A-B}\pi$$

である。

(i) $x = \frac{2(n-1)}{A+B}\pi$ について，$0 \le x < 2\pi$ より，$0 \le \frac{2(n-1)}{A+B}\pi < 2\pi$ における n の値の範囲を求める。すると，$1 \le n < A+B+1$ であることから，方程式 $\sin\frac{A+B}{2}x = 0$ を満たす区間 $[0, 2\pi)$ における解の個数は $(A+B)$ 個である。

(ii) $x = \frac{2n-1}{A-B}\pi$ について，$0 \leq x < 2\pi$ より，$0 \leq \frac{2n-1}{A-B}\pi < 2\pi$ での n の値の範囲を求める。すると，$\frac{1}{2} \leq n < A - B + \frac{1}{2}$ である。$n \in \mathbb{N}$ であることより，$1 \leq n < A - B$ である。つまり，方程式 $\cos \frac{A-B}{2}x = 0$ を満たす区間 $[0, 2\pi)$ における解の個数は $(A - B)$ 個である。

以上，(i) と (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす区間 $[0, 2\pi)$ における解の個数は $2A$ 個である。 □

次に，$f(x)$ の極値の個数が $2A$ 個であることを示す。ただし，先述したように，1 オクターブ間かつドとその他の音とを同時に鳴らす，という限定的な設定について示したことを注意しておく。

方程式 $f'(x) = 0$ の解の個数を導くために，$f'(x)$ を $\cos x$ の多項式で表すことを考えた。そこで，n 倍角の公式を用いることとした。一般的に，次の補題が知られている。証明は省略する。

補題 2.2（n 倍角の公式）

$n \in \mathbb{N}$ とする。このとき，次の等式を満たす。

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j {}_nC_{2k} \cdot {}_kC_j \cos^{n-2j} x$$

ここで，$[\frac{n}{2}]$ は $\frac{n}{2}$ の整数部分を表す。

$\cos x = t(-1 \leq t \leq 1)$ と置き，その関数を $g(t)$ とする。代数学の基本定理から，$g(t) = 0$ の解の個数は，その関数の次数と一致することがわかっている。しかし, 区間 $[0, 2\pi)$ における $f(x)$ の極値の個数を知るには，区間 $[-1, 1]$ における $g(t) = 0$ の実数解の個数が必要となる。そこで，以下の定理を利用して，$g(t) = 0$ の実数解の個数を導く。

＜**Sturm** の定理＞ [[1]§15 ,P.81〜85]

多項式 $p(x)$ とその導関数 $p'(x)$ から次々に出てくる剰余の符号を変えながら，ユークリッドの互除法を行う。すなわち，$p_{h-1}(x) = q_h(x)p_h(x) - p_{h+1}(x), (h = 1, 2, \cdots, l - 1)$ とする。便宜上，$p = p_0, p' = p_1$ とも記す。

ここで，これらの関数列 $\{p_k(x)\}_{k=0}^{l}$ を k が小さい方から順に見ていき，関数の値の符号について，同じ符号が続くところと符号が変わるところを数えて，その総数をそれぞれ $P(x)$, $V(x)$ とする。ただし，0 となる関数があれば，それをとばして P, V を数える。この記号を用いて，以下の定理を紹介する。

定理 2.3（Sturm の定理）

n 次多項式 $p(x)$ について，$p(x) = 0$ が区間 $(a, b]$ においてもつ実根を，単根複根の区別なしに数えて，その数を N_0 とする。また，$V(a)$ は k を小さい方から見ていったときの関数列 $\{p_k(a)\}_{k=0}^{l}$ の値の符号変化の回数である。$V(b)$ も関数列 $\{p_k(b)\}_{k=0}^{l}$ について同様である。

このとき，次をみたす。

$$N_0 = V(a) - V(b) \tag{2.1}$$

ただし，区間の一端 $x = a$ が $p(x) = 0$ の m 重の複根である場合には，関数列 $\{p_k(a)\}_{k=0}^{l}$ の各関数を共通因子 $(x - a)^{m-1}$ で割ったうえで，$V(a)$ を求める。$x = b$ も同様である。

定理 2.3 の証明は，例えば参考文献 [[1]§15 .Sturm の定理,P.81〜85] を参照してほしい。本論文では省略する。

この定理を用いると，関数 $f(x)$ の極値の個数を計算することができる。以下例としてドとソの完全協和音程の極値の個数を求める計算過程を記述する。

＜Sturm の定理を用いた計算例＞

$f(x) = \sin 3x + \sin 2x$ とする。この時，$f'(x) = 3\cos 3x + 2\cos 2x$ となる。ここで，補題 2.2 を用いると，

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

となる。これより，

$$f'(x) = 12\cos^3 x + 4\cos^2 x - 9\cos x - 2$$

となる。ここで，$t = \cos x$ とし，$p_0(t) = f'(x)$ とおく。但し，定理2.3 を用いるため，$-1 < t \leq 1$ に t の変域を制限する。また，$p_1(t) := p_0{}'(t)$ であることから，

$$p_0(t) = 12t^3 + 4t^2 - 9t - 2,$$
$$p_1(t) = 36t^2 + 8t - 9$$

となる。さらに，Strum の定理におけるユークリッドの互除法により，

$$p_2(t) = (\tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{3}t)p_1(t) - p_0(t),$$
$$p_3(t) = (-\tfrac{135}{1156} + \tfrac{891}{170}t)p_2(t) - p_1(t)$$

であることから，

$$p_2(t) = \frac{170}{27}t + \frac{5}{3},\quad p_3(t) = \frac{2484}{289}$$

となる。定理 2.3 を用いるため，この関数列 $\{p_j(t)\}_{j=0}^{3}$ の各関数に $t = -1, 1$ を代入すると，
$p_0(-1) = -1$, $p_0(1) = 5$
$p_1(-1) = 19$, $p_1(1) = 35$
$p_2(-1) = -\frac{125}{27}$, $p_2(1) = \frac{215}{27}$
$p_3(-1) = \frac{2484}{289}$, $p_3(1) = \frac{2484}{289}$ となる。
$V(-1) = 3$, $V(1) = 0$ より，$N_0 = 3$ である。

ゆえに定理 2.3 より，$p_0(t)$ の実数解の個数は 3 個であることがわかる。また，$t = -1, 1$ の時 $p_k(t) \neq 0$ より，$f'(x)$ の実数解の個数は 6 個である。

以上のように計算し，各協和音程について $p_0(t)$ の実数解の個数，$f(x)$ の極値の個数，及び $f(x) = 0$ を満たす点の個数を計算した結果を下表にまとめた。

	ドとレ	ドとミ	ドとファ	ドとソ	ドとラ	ドとシ	ドとド
g(t)=0の解の個数	9	5	4	3	5	15	2
f'(x)=0の解の個数	18	10	8	6	10	30	4
f(x)=0の解の個数	18	10	8	6	10	30	4

以上のことにより，極値の個数と $f(x) = 0$ を満たす点の個数は一致することがわかった。ゆえに，本教材で扱うドと他の音との完全協和音程，不完全協和音程，不協和音程の分類と，方程式 $f(x) = 0$ の解の個数との関係を明らかにできた。

3　教材の実践

3.1　授業のねらい

授業のねらいを以下のように設定する。

ねらい

音の性質を三角関数の式から読み取る活動を通して、身近な問題を数学で表したり読み取ったりできることに気付き、音の変化と数式の変化を関連させながら思考し，意欲的に活動へ取り組むことができる。

また，音を三角関数で表すことにより，身近な事象を数学で表現できることに気づき，数学の有用性を認知してほしいと考える。

3.2　授業の展開

授業案の展開を，大きく分けて次のように設定する。
(1) 協和音程や不協和音程への疑問を持たせ，課題を提示し，極値の個数に目を向ける。
(2) 音を式で表現する方法を学び，式から読み取れることを考える。
(3) 実際に音を聞き，グループで計算して全体で交流する。

以下, 活動について詳しく述べる。

(1) について

はじめに，ドとソ，ドとシをそれぞれ同時に鳴らした音を聞かせ，どちらが整っていたかを問う。その後，2 つの音のグラフを，どちらがどちらの音を表すかを踏まえて提示し，2 つのグラフの違いを問う。そこで,「山や谷の数」という言葉を使うことで，グラフの複雑さの違いを表現する。そして，山や谷の数が多い程，音は整って聞こえなくなるのか，という発問により，山や谷の数と音の整い方との関係に目を向けさせ，課題へとつなげる。

課題を次のように設定する。

課題

山や谷の数が多ければ多い程，音は整って聞こえなくなるのか調べよう。

課題を提示したら，山や谷の数を数えるには極値の数を数えれば良いことに気づかせる。その時,「山や谷の数と同じ数のものはないかな？」という発問をし，発言が無ければグラフをなぞりながら，極値の部分で「ここで減る」などの言葉を使い，極値に気づきやすいようにする。

(2) について

前述した 2 つの音以外の協和音程，及び不協和音程はグラフが描けないことに気づかせ，式の導入に入る。その時,「仮にグラフを描くためには，何が必要か？」という発問において，表や式が必要であると認識させることで，式の導入の必要性を意識させる。音は三角関数で表すことができること，及び純正律の周波数比から，式が求められることを説明する。この時，整数比で式を求めることを確認する

ことで，後の $f(x)=0$ を解く際に，$0 \leq x < 2\pi$ で求められるようにしておく。

再び極値を数えることへ目を向け，極値を求めるためには式を微分する必要があることを確認し，導入した式が微分できるかを問う。今回対象とした学年は2年生で，三角関数の微分については学んでいないため，微分ができないことを確認し，極値の個数は求まらないことを認識させる。そのため視点を変えさせ，極値の数と対応している $f(x)=0$ を満たす点の個数に着目し，$f(x)=0$ の解き方を考えさせることで，和積の公式を導入する。ここで，$A \cdot B = 0$ ならば $A=0$ もしくは $B=0$ であることを確認し，和から積に変形すれば良いことに気づけるようにすることで，和積の公式を用いることの有用性に気づけるようにする。

(3) について

ここで，4〜5人の集団を作り，集団活動が行えるようにする。そして，和積の公式を用いて $f(x)=\sin 3x+\sin 2x=0$ を解き，その解の個数から $f(x)=0$ を満たす点の個数を数える。ここで，周期は 2π であることを確認し，$0 \leq x < 2\pi$ での解を求めさせることに注意する。グループで話し合いながらも，あまり計算が進んでいなければ，全体で解き方を交流する。

次に全体で，いくつかの音にわたり，2つの音の整い方の比較をする。聞いた感じと実際に計算をした結果とを対応させ，山や谷の数が多い程，音が整わないという予想が正しいかどうかを確認する活動となる。音としては，ドと同時にソとラ，レとファ，レとミ，ミとラをそれぞれ比較する。この後，グループで自分たちが気になった音について計算を行う。この中でも特に差があるのがソとラ，レとミとなる。また，ミとラに関しては同じような整い方で聞こえる。そのため，主にこの3つを計算するグループが多くなると予想できる。これらを計算することで，明確に聞いた感じと計算の差があるのか，もしくはミとラのように差がないのかを確認することができ，予想が正しいことがわかる。グループ活動では前述したような活動を主に行うが，それぞれの比較についての計算が終わったら，自分たちが気になったことや気づいたことについて追究をさせることとする。

全体で比較と計算の対応について交流し，音が整って聞こえていない方が $f(x)=0$ を満たす点の個数が多いことが言えそうであることを交流する。協和音程，及び不協和音程についての一般的な分類分けの表を見せ，活動で計算した $f(x)=0$ を満たす点の個数と対応させることで，課題が正しいことを明確にし，まとめへ入る。

まとめ

極値の個数と等しい $f(x)=0$ を満たす点の個数を数えることで，音の整い方を比較することができる。

4　実践結果と考察

本教材の実践を，以下のように行った。

場所：岐阜県立可児高等学校
日程：平成30年11月9日（金）50分
対象：岐阜県立可児高等学校2年5組40名

4.1　活動の様子と考察

授業中の生徒の反応や活動の様子と，その考察を行っていく。

(1) について

授業後すぐに，ドとソ，ドとシをそれぞれ同時に鳴らし,「どちらが整って聞こえた？」という問いかけに対して，考える様子や隣と話す様子が見られ，取り掛かりやすい内容であることが見られた。音という身近な事象であるためだと考える。この問いかけに対して,「ドとソの方が整っていると思う」に挙手した生徒が多かった。その後グラフを提示し,「2つのグラフを比較して，どんなところが違う？」という問いかけに対しては，今まで見てきたグラフと異なるためか，発言が少なかった。そのため，隣同士で少し話し合いをさせ，意見を出させることとした。何人かを指名し，意見を聞いたところ,「ドとソのグラフの方が整っている」と答えたため,「どんな部分でそれが読み取れた？」という質問を全体にした。それに対して「周波数が大きい」や「ギザギザが多い」といった意見があり，他の生徒も納

得した顔で聞いていた。周波数に関しては定義が異なり適当な言葉ではなかったため，ギザギザという言葉を具体的な「山や谷」という言葉に置き換えることにした。生徒はうなずいて聞いていたため，わかりやすい言葉であったと考える。

次に「整って聞こえないドとシの音の方が，山や谷の数が多い。他の音でも，整って聞こえない程山や谷の数が多いのか？」という問いから，課題への導きを試みた。この発問について隣同士で話し合わせ，生徒に明確な疑問を持たせることが必要であったが，このような時間を取らなかったため，疑問を各生徒に確実に持たせることができず，この後の説明や活動で目的を明確化できなかった。後のグループ活動における机間指導で，何を目的に今の活動をしているのかの説明をしたため，何とか潤滑な活動へ結びつけることができたが，ここまでの流れを改善することで，より効果の高い授業を行えると考えている。

「山や谷の数と同じ数で対応しているものはない?」という問いかけに対して，グラフをなぞりながら山や谷の数を数えることで，極値が対応していることに気づかせることができた。実際に極値の個数を数えることで，山や谷の数を数えるには，極値の個数がわかれば良いことを把握させることができた。ここで，x 軸との交点の数が等しいと言う生徒がいたことも，後に確認することができた。その発言を取り上げることができていれば，よりスムーズに活動へと入ることができ，また，生徒が山や谷の数を数える方法をより深く吟味することができたと考えている。次に，極致の数をどう数えるかを発問し，グラフが描けないことを確認した。そして,「グラフを描くためには，何が必要か？」という発問をすることで,「式がいる」という発言を引き出すことができたため，違和感なく式の導入を行うことができた。まず，ドとソの式を提示し，立式への導入とした。まずは,「$\sin 2x$ がドの音，$\sin 3x$ がソの音を表し，それを同時に鳴らすということで，和になっている。」という説明をすることで，式の表す意味を把握できるようにした。その後，音が三角関数で表すことができること，周波数や振幅の知識と，それらと式との関連，そして純正律の表から周波数比を用いることで立式することができることを説明した。

ここで，ドとソの音を三角関数で表したが，そもそも生徒が音が波であること，三角関数で表すことができることを知っているかを確認するべきであった。今回の実践では，音の物理としての知識を復習したり，物理で学んでいなければ新たに説明することが，時間の都合上困難であったが，今後この実践を再度行うことができるならば，事前に音と波の基礎知識を身に付けられるようにすると良いと考えている。本実践では物理学における音の知識を説明していなかったため，ドとソの音を三角関数で表すことに納得していない生徒が多かったと考えられる。しかし，後の活動の中では立式を円滑に行えていたため，式の作り方を身に付けることはできていたと考えている。

(2) について

極値の求め方を問うと,「微分する」や,「(微分した) 式が 0 になる時」などの発言があったため，グラフと式を見せながら「$\sin 3x + \sin 2x$ は微分できる？」という発問をしたところ,「できない」と発言したり，首を横に振る仕草が多くみられた。そのため,「三角関数の微分は習ってないよね」という確認をした後,「極値の個数と同じ個数で対応してるものって何かないかな？」という発問をした。ここでも，極値に目を向ける時と同様，グラフをなぞりながら確認をした。その時,「ここ (x 軸との交点部分) で山から谷に入る」という言葉を交えることで，x 軸との交点の数に着目しやすいようにした。そうすることで,「x 軸との交点の数が同じ」という発言があり，x 軸との交点の個数が極値の個数と同じであることを全体で確認した。

こうして x 軸との交点の数を数えれば，極値の数がわかることを確認した後,「x 軸との交点を求めるには何を求めれば良い？」という発問から，$f(x) = 0$ を求めれば良いことに気づかせた。そこで，$f(x) = 0$ を求める方法を問いかけ，$A \cdot B = 0$ のとき，$A = 0$ もしく

は $B = 0$ であることを確認し，積の形にすれば良いことを確認した。そうすることで,「和積の公式かなぁ？」という発言があり，和積の公式の復習を円滑に行うことができた。

次に，和積の公式を実際に使って $\sin 3x + \sin 2x = 0$ を計算するよう促した。ここで，周期が 2π であることを確認し,$0 \leq x < 2\pi$ を定義域として計算することを確認した。活動の初めは個人で計算を行い，使い方及び計算の仕方を思い出せるようにした。ここで活動の様子を見て回ったところ，和積の公式を使って式変形をしたところで手が止まっている生徒が多かったため，ここで4〜5人のグループを作り，計算の仕方を交流できる形とした。そうすることで，多くの生徒が解法を理解できていた。一方で，解法を理解できていない生徒も数名いたため，全体で解法の流れを確認することとした。ここでは，わからなかった生徒も改めて思考を深められるように，大まかな解法の流れを解説することとした。

(3) について

x 軸との交点とその個数の求め方を確認した後，実際に音を聞くことで，音の整い方の比較を行った。前節で述べた音を聞かせ，生徒に整い方を確認したところ，レとファについては意見が分かれたが，他については予想していた結果となった。こうして音を聞いたのち，気になった音について計算をするよう促した。ここで,「聞いて比較した感じと，x 軸との交点の個数には対応関係があるのか，調べよう」と言うことで，何故この活動を行うのかを再度確認したが，後に述べるように生徒に上手く伝わっていなかった。

グループでの活動では，レとミ，ソとラについて調べるグループが多かった。活動の中で出た質問として,「なんでこれを計算しているのか？」という質問があった。この発言から，課題への導入において生徒に疑問を持たせられていないことが明確になったことに加えて，活動前での呼びかけについても上手く伝わっていなかったと考えられる。一方で，音を聞いているときの反応やグループ活動の活発さ，そしてこのような発言が出たことによって，十分に興味を惹くことができ，意欲的に活動できる内容であることを確認することができた。また，この発言については，現実と数学の結びつけがまだ曖昧であることも考えられる。そのため，この質問をした生徒には，予想として山や谷の数が多い方が音が整っていなさそうであると考え，それが正しいかどうかを確認するために，数学を使って計算し，音を比較して聞いたときの感じと対応させることで，山や谷の数を数えるということを丁寧に説明した。こうして，この生徒は活動に向かい，x 軸の個数と山や谷の個数の対応関係を把握しながら，音を聞いた感じと照合しながら計算をしていた。前節で述べた，他に気になることや気づいたことへの追究については，時間の都合上行えなかった。

前節で述べた通りの流れでまとめを行った。しかし活動時間が短く，対応関係を明確化できていなかったため，ここでまとめるべきではなく，次の授業などで少し時間をとってまとめに入るべきであったと考える。本実践では50分の1コマ分を予定していたため，強引ではあったがまとめることとした。

＜授業後の生徒の発言について＞

ここで，度々述べてきた授業後でのある生徒の発言について述べていく。まず，その生徒は吹奏楽部に所属している。その為，音楽に関する知識があることを前提に，発言が出たことを述べておく。その生徒は授業後,「ドとソが綺麗なのはわかったけど，ドとファ♯の方が綺麗に聞こえると思う」と述べた。「どうしてそう考えた？」と問いかけたところ,「x 軸との交点の個数とか，実際に聞いてみて，ソは真ん中で，ドに近づくほど音が整っていなくなったから，(黒鍵を含めて) 鍵盤の真ん中の方が音が綺麗になると思う。それで，鍵盤の一番真ん中はファ♯だから，ドとファ♯がドとソよりももっと綺麗だと思う」と答えた。そのため,「本当にそうかな？何を調べればそれがわかる？」と問いかけたところ,「x 軸との交点の個数がわかればいい」と答え，本授業の内容と結びつけながら考えられるようになった。ここで,「x 軸との交点の個数がわかるためには何をすれば良い？」と問い,「式が0になる時を求める」と答えたため,「何がわか

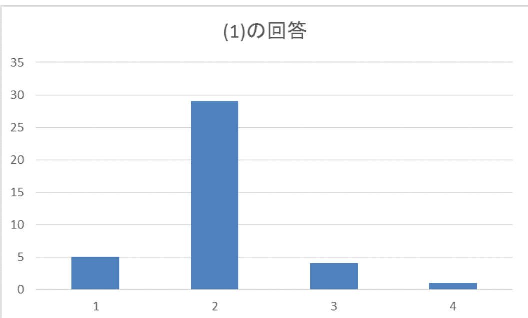
れば式がわかる？」と質問したところ，純正律の表に指を差し「これが知りたい」と答えた。今回は半音階の部分 (黒鍵の部分) の周波数比は用意していなかったため,「実は，黒鍵の部分は用意してないから，インターネットとかで調べてみよう。すぐに出てくるよ」という声をかけ，その生徒に調べさせることとした。

この生徒の発言に関して考察をしていく。まず最初の発言から，ドに近づく程，音が整って聞こえないということに気づき,「ドと 1 オクターブ高いドの音の真ん中の音が一番整いそうである」という予想を持ったと考えられる。自分の音楽の知識と繋げ，黒鍵を入れた 12 音階のうちちょうど真ん中なのはファ♯であることから，予想通りならばドとファ♯の方がドとソよりも整っているという見通しを持ったのだろう。この考察から，この授業を行うことで，自ら課題を見つけ，課題解決の方法を模索する力を身に付けることができることがわかった。また，一連の問いかけに対して的確に答えていたことから，本授業の内容を身に付けけられたうえで，自らの知識と本授業で得た知識を 1 つに結びつけ，それらの知識を応用した思考や判断を行うことができたと考えられる。

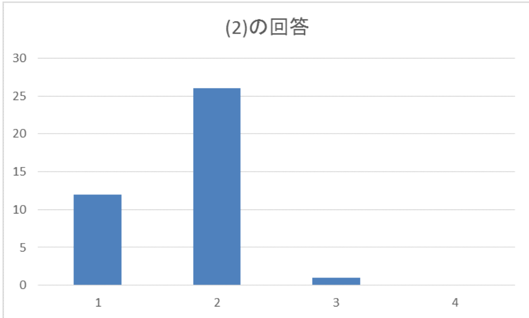
4.2　アンケートの内容とその結果

本実践では授業後にアンケートを実施した。以下，アンケートの質問内容及び結果を示していく。

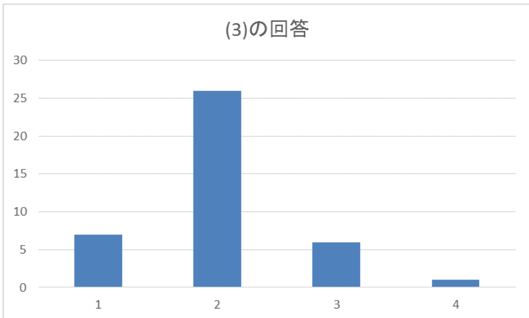
(1) 数学に対して，興味が湧きましたか。
(1. とても湧いた 2. 湧いた 3. あまり湧かなかった 4. 湧かなかった)
＜回答値の平均＞　2.03



(2) 数学を学ぶことに意味があると思いますか。
(1. とても思う 2. 思う 3. あまり思わない 4. まったく思わない)
＜回答値の平均＞　1.72

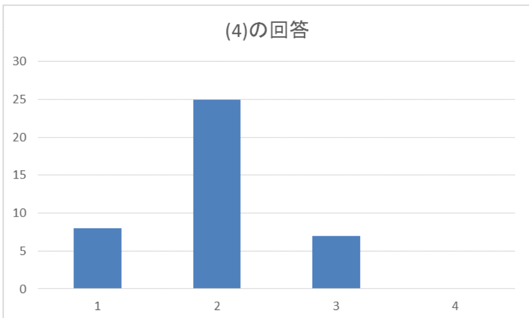


(3) 身近な現象などを，数学を使って解決できると思いますか。それはどんなことですか。
(1. とても思う 2. 思う 3. あまり思わない 4. まったく思わない)
＜回答値の平均＞　2.03



＜回答例＞
・音の測定，設計，自然現象

(4) 和積変換を用いることの良さを感じることができましたか。
(1. とてもできた 2. できた 3. あまりできなかった 4. まったくできなかった)
＜回答値の平均＞　1.98



(5) 今回の授業の感想を書いてください。(回答は原文のままである。)
・身近な事象が数学を用いて知ることができることに驚きました。

・整うか整わないかを数字でしれると初めて知った。なんでそれで分かるのか不思議だった。
・音楽のことで楽しかった。自分が考えたこともなくて新しい感覚だった。
・身近なものの測定ができて面白かった。
・音の波も三角関数を使うことによって式に表すことができ，どの音の組み合わせがきれいであるか判断できるのに面白いと思った。

4.3　アンケート結果の考察

(1) について，本実践で生徒の主体的に学習に取り組む姿勢が向上するかを確認する内容となっている。まず，数値の平均が 2.03 であり，2. 湧いた と回答する生徒が一番多かったということから，多くの生徒が音と数学の関係や数学の利用，活用について学び，数学への興味や関心，そして主体的に学習に取り組む姿勢を向上させることができたと考えられる。

次に，(2) について考察すると，1 と 2 を回答する生徒が合わせて 38 人と，ほぼ全員が数学の有用性を感じることができる授業であることがわかる。更に，(5) の質問では,「数学で身近な事象を表すことができることを知って驚いた」といった感想を書く生徒が多く，身近な事象と数学に大きな関係があることを初めて知ったことによって，数学を学ぶ意義を見出すことができたと考えられる。また，(2) だけでなく，全ての質問で 3 と回答した生徒の中にも，(5) の質問で「面白かった」と答える生徒がいたため，数学の有用性を感じていなくても，身近な事象を数学で扱うことの面白さを実感できる題材であると考えられる。

(3) の質問については，平均が 2.03 となった。この質問では，本授業以外で，身近な現象と数学が繋げられるかどうかを問う内容であった。そのため，数字としてはある程度の成果が得られたとも見られる。一方で，(3) の記述部分において記述している生徒がとても少なく,「わかりません」と書く生徒や,「音の測定」といった本授業と関連する内容を書く生徒もいた。これは，普段から身近な事象について疑問を持たずに生活をしているためであると考える。そのため，身近な事象と数学を繋げて考える以前に，まずは身近な事象に疑問を持たせるよう，日々の授業で具体的な事象と数学を関連付けた授業を行い，少しずつ事象へ目を向ける力を付けていくことが必要であると考える。その上で，自ら課題を見つけ，解決する方法を模索し，解決する力を付けることに繋げていけると良いのではないかと考える。

(4) については，和積の公式を的確に使えたか，公式を使うことの有用性に気づけたかを問う内容となっている。この質問でも，平均が 1.98 と良い成果を得ることが出来た。これは，授業内で和積の公式を使って計算する時間を多くとり，個人で考えた後にグループで計算方法を交流したためであると考える。普段の授業で公式を導いたり公式の意味を考える授業が頻繁に行われているため，本実践によって，公式の有用性に関する深い理解が得られたと捉える。一方で授業を行った際，$f(x) = 0$ を解く方法を考える時間があまり多く取れなかったため，この時間をしっかりと取ることができれば，より公式の有用性を実感させることができたと考える。

最後に，(5) について考察する。回答の中で特に多かったのが，身近な事象と数学との関連を知って面白かったということや，数学で身近な事象が表せることの発見と驚きについての感想が多かった。これらの感想から，普段は気にしていなかった数学の利用や身近な事象と数学との関連性の深さを知り，数学の奥深さや面白さを実感することができたのだと考える。それゆえに，(2) の質問と関連するが，本授業は数学の有用性に気づき，数学の面白さを伝えることのできる授業であったと考えられる。他にも，和積の公式を忘れていたから復習できてよかった，三角関数を復習したいなど，三角関数を思い出し，学習意欲も向上させることができる授業でもあったと考える。

5.　終わりに

本実践を終えた上で，今後の課題点として時間配分の改善があげられる。特に導入部分を改善し，生徒に明確な疑問と，それに合った課題を提示することが，この課題点を解決する糸口であると考える。本実践を通して感じたこととして，導入部分で生徒に「音が整う

時とそうでない時の違いはなんだろう？」という発問から，山や谷の個数を比較することで整い方を比較できそうであることに気づかせたかった。また，活動においても 2 つの音を比較して整い方を調べる内容となっていた。しかし，課題が「山や谷の個数が多いほど音は整っていないのか調べよう」という設定をしていたため，2 つの協和音程の比較というより，全ての協和音程を見て特徴を調べるという課題であった。一方で，授業内容や活動はあくまで 2 つの音の比較を扱ったため，課題と内容とのギャップがあったと考えられる。更に展開部だけでなく導入においても，2 つの音を比較して音を聞いたりグラフを見比べたりしていた。その点でも，導入部で生徒が得た「どんな違いがあるのだろう？」といった疑問と，課題で書かれた内容に違いがあったと考える。例えば,「音が整っている時とそうでない時を比較して，違いを調べよう。」といったように，2 つの音を比較して，音の整い方の特徴を調べるような課題にすると良いと考える。本実践では明確な疑問を生徒に持たせることができなかったために，活動が円滑に進まず，予定していた時間に収めることが出来なかったと考える。今後もこの課題点を解決し，研究を進めることによって，本教材をより成果の得られる教材としていきたい。

本研究においては，限られた授業時間数のうちの貴重な時間をいただいて，本実践を行うことができた。岐阜県立可児高等学校の生徒と，同高等学校の櫛部祐成先生，竹中俊文先生，松井真也先生をはじめ，ご指導いただいた先生方に感謝の意を表する。

参考文献

[1] 高木貞治，代数学講義 改訂新版，共立出版，1965.

[2] 中井三留，微分法と積分法，学術図書出版社，1989.

[3] M.J.POWELL，Approximation theory and methods，1981.

[4] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説，2018.

[5] 山本慎 入江幸右衛門他，最新 数学 II，III 数研出版，2011.

授業実践指導案

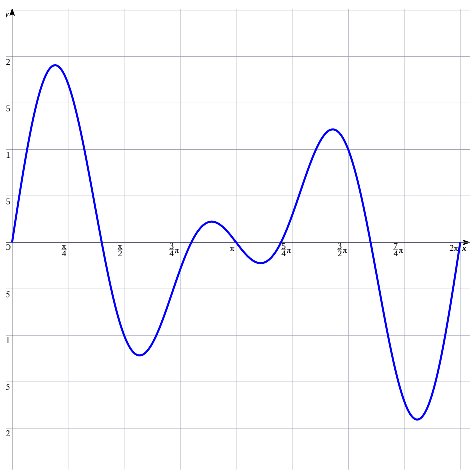
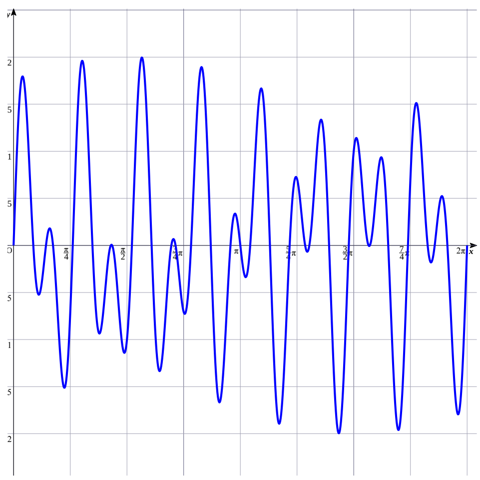
・本時のねらい

音の性質を三角関数の式から読み取る活動を通して、数学が身近な事象を表し，分析ができることに気づき，数学の有用性を実感することができる。

・評価規準

ア:知識・技能	イ:思考・判断・表現	ウ:主体的に学習に取り組む態度
①三角関数の和積の公式を用いて、三角関数の和を正確に計算できる。 ②音の変化と数式の変化を繋げて考え、事象を正確に把握できる。	①事象の原因を、数学を用いて論理的に推測及び判断をすることができる。 ②三角関数の式やその変化を、身近な音の問題に置き換えて事象を考察できる。	① 音と数学の関わりに関心を持ち、意欲的に課題に取り組むことができる。 ②自ら課題を見つけ、課題解決の方法を模索し、活動に取り組むことができる。

・本時の展開

段階	学習活動と内容 (予想される生徒の反応)	指導上の留意点・支援・計画 (評価)	準備物等
導入	○①ドとソ，②ドとシの２つの協和音程を聞き，整って聞こえる音とそうでない音の違いに疑問を持つ。 ○２つの協和音程のグラフを見る。  ① ○2 つのグラフを比較して，異なる点を考える。 ・①のグラフの方が整っている。 ・②のグラフの方がギザギザしていて，複雑。→山や谷の数が多い。	●普段聴く楽曲から，２つの違う音が１つにまとまって整って聞こえることを確認する。 ●どちらがどちらの音を表すか説明する。  ② ●生徒の発言に対し，次々に質問をして，山や谷に着目させる。 「2 つのグラフを比較して，どんな違いがある？」 「どんな点から整っていると思っ	・パワーポイント ・タブレット（ピアノアプリ）

	○山や谷の数が多いほど，音は整って聞こえないという予想を持つ。	た？」 ●「他の音でも，山や谷の数が多い程，音は整って聞こえないのかな？」	
	山や谷の数が多い程，音は整って聞こえなくなるか調べよう。		
展開 活動	○山や谷の数と極値の関係に目を向ける。 ○どう数えるか問い，グラフが描けないことを確認し，①の式を提示する。 ○式と音の関係を知り，式の根拠となる純正律の表から，②の式を考える。	●「山や谷の数と対応しているものって何かないかな？」 ●「ドとミの山や谷の数はどう数える？グラフ描いて数える？」 ●振幅や周波数，純正律の導入。純正律の表を見せ,何か気づくことがないかを問う。	・パワーポイント ・プリント ・タブレット（ピアノアプリ）

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

○極値が求まらないことに気づき，その数と対応しているものがないか考える。 ・極値の数は求まらない。→x 軸との交点の数が等しい。 ○sin3x+sin2x=0 の解き方を全体で考える。 ○掛け算の形にすることで方程式が解きやすいことに気づき，和積の公式を確認する。 ○和積の公式を用いて①の sin3x+sin2x=0 を満たす点の数をグループで調べる。 ○ドと同時に，ソとラ，レとファ，レとミ，ミとラをそれぞれ聞き比べ，整い方の優劣を決める。 ○各グループで気になる音について，x 軸の交点の個数を計算，及び比較をする。 ○全体で交流する。	●「グラフが山から谷、もしくは谷から山になるときは、必ず x 軸を通る。」という説明をすることで、極値に対して f(x)=0 となる点が対応することを把握させる。 ●方程式の解法を考え，和積の公式を導入する場面となる。 「3 倍角の公式使う？15 倍角ってわからんよね？」 ●「実際に聞いてみて，この後の結果と聞いた感じと対応させましょう。」 ●時間が許す限り，活動を行う。ドからシまで計算したグループは,気になることや気づいたことを計算，まとめさせる。 ●下表は個数を表す。

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
2	18	10	8	6	10(8)	30	4

括弧内は重解を 1 つの解としてま

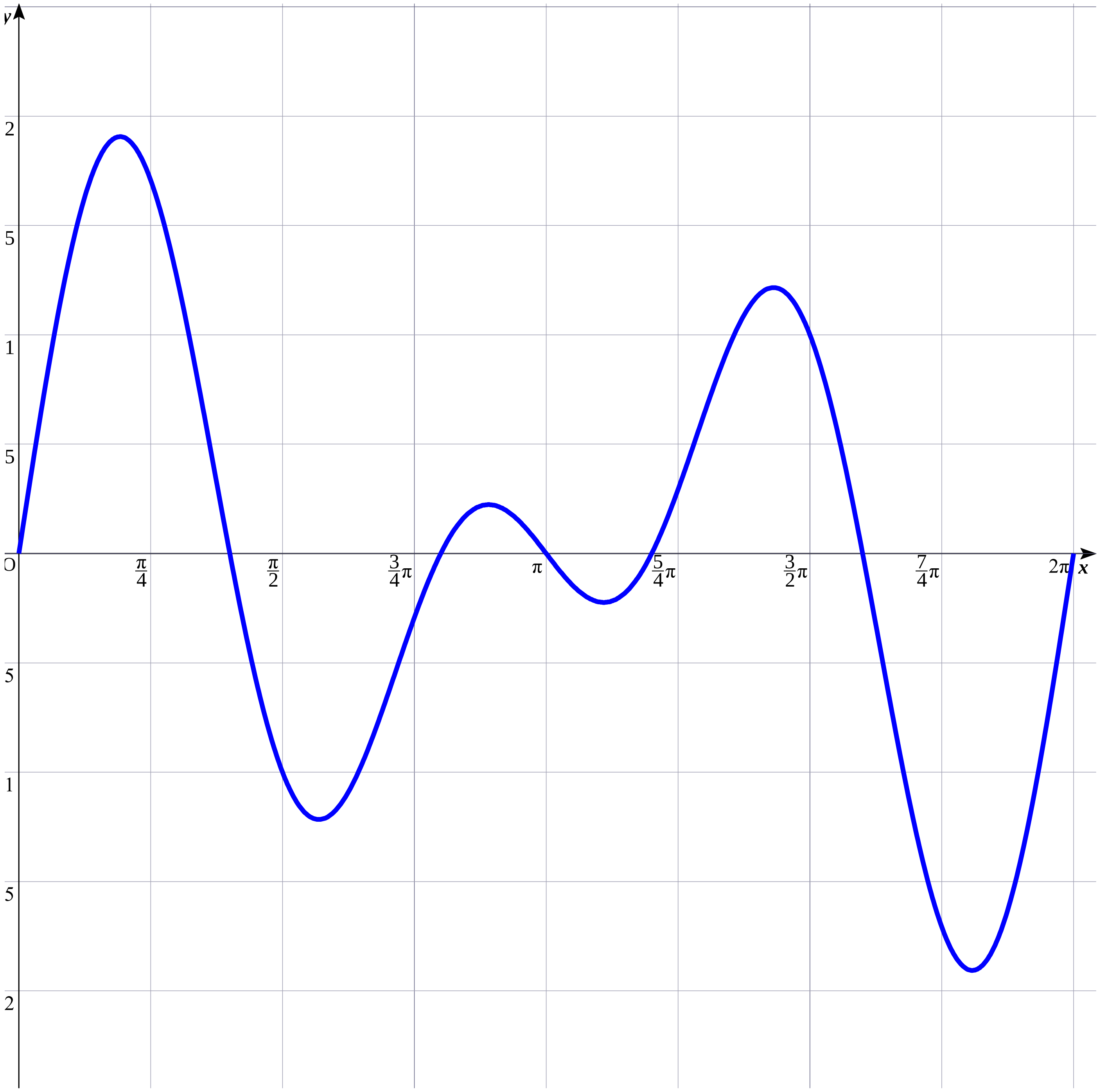
<table>
<tr><td></td><td></td><td>とめた場合の個数である。</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">まとめ</td><td>○協和音程についての音楽的分類分けを見て，予想が正しいことがわかる。</td><td>●「みんなが聞いた感じと個数は対応するね。実は，次のような表のことが知られています。予想は正しいことがわかったね。」</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">
<table>
<tr><td>完全協和音程</td><td>不完全協和音程</td><td>不協和音程</td></tr>
<tr><td>ド、ソ、ファ</td><td>ミ、ラ</td><td>レ、シ</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">極値点の個数と等しい f(x)=0 を満たす点の個数を数えることで, 音の整い方を比較することができる。</td></tr>
</table>

音を数学で調べよう１

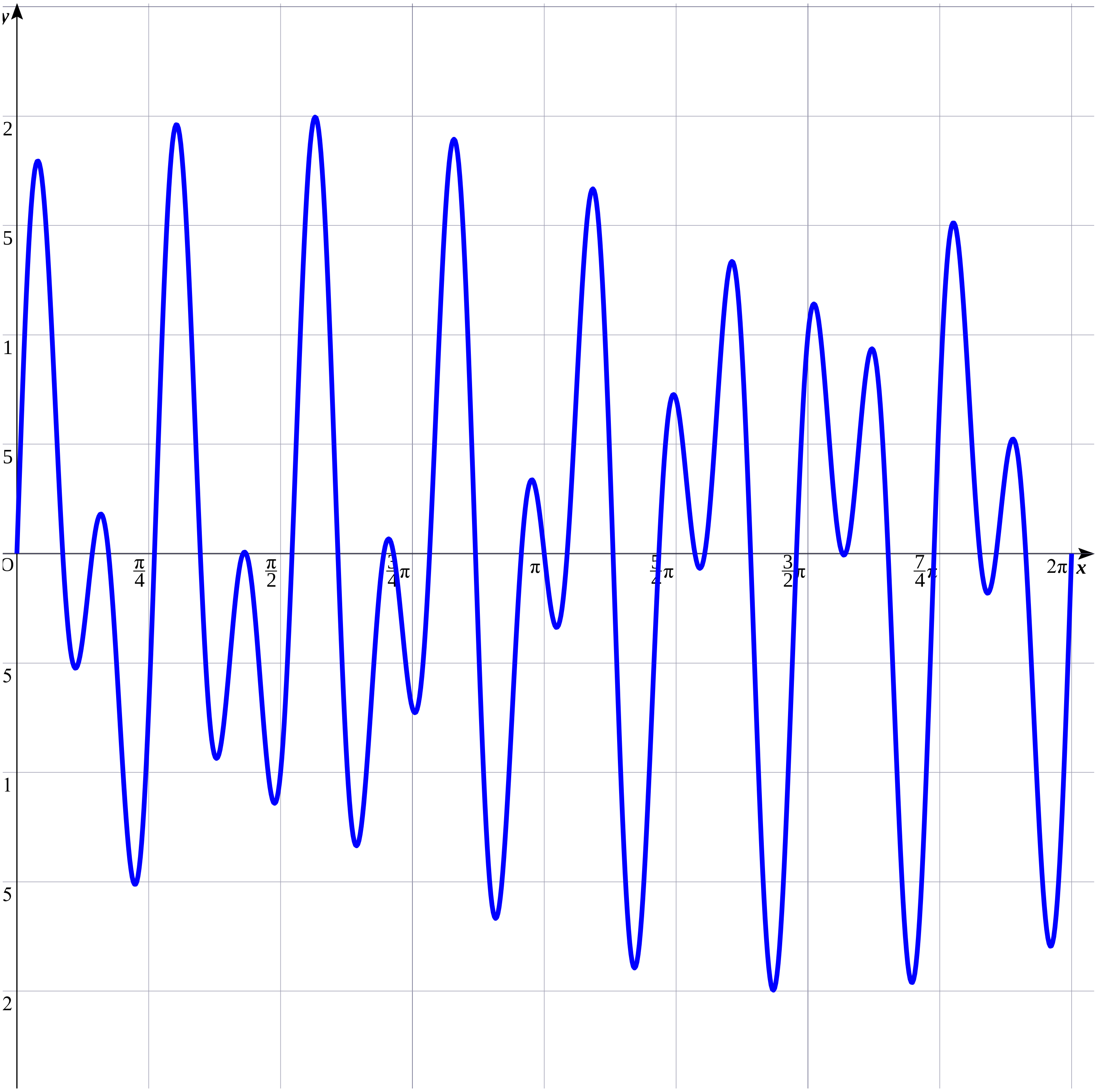
学年　　　　　クラス　　　　　番号

純正律　　・・・周波数 f(Hz)のド１の音を基準に，以下の比率で構成された音のこと。

ド1	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド2
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2



① ドとソ



②ドとシ

音を数学で調べよう２

学年　　　　　クラス　　　　　番号

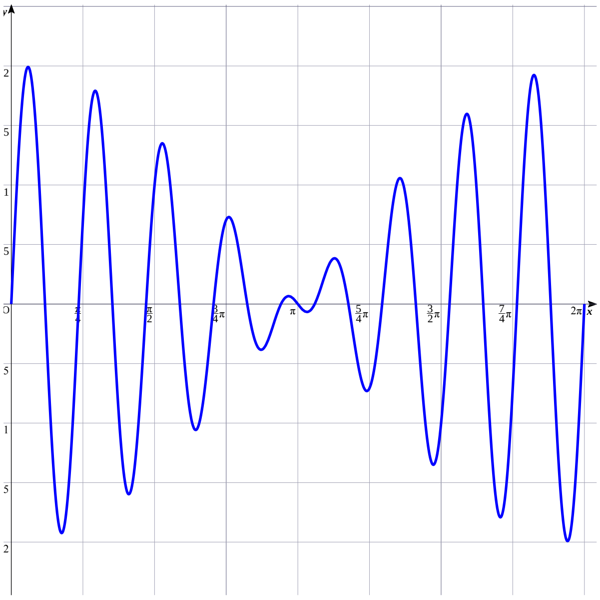
・気になる音について計算しよう！
終わったグループは，気づいたことや，他に気になることについて調べよう。

音を数学で調べよう３

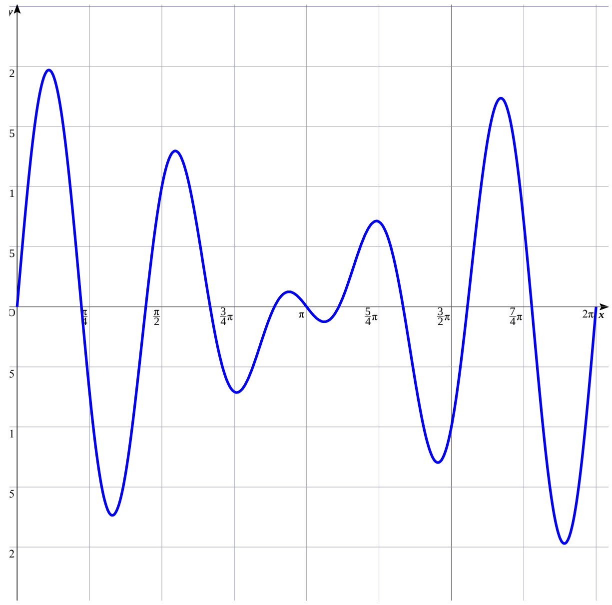
学年　　　　クラス　　　　番号

・一般的に次の表のような分類が知られているよ。

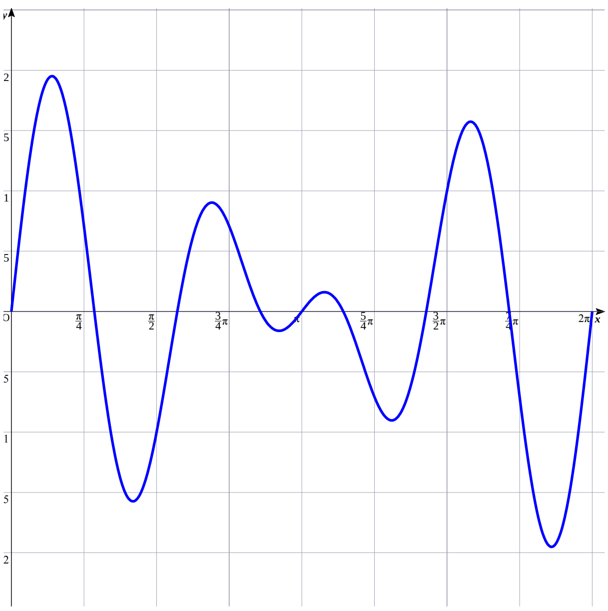
完全協和音程	不完全協和音程	不協和音程
ド1,2　ソ　ファ	ミ　ラ	レ　シ
めっちゃ綺麗	そこそこ綺麗	綺麗じゃない



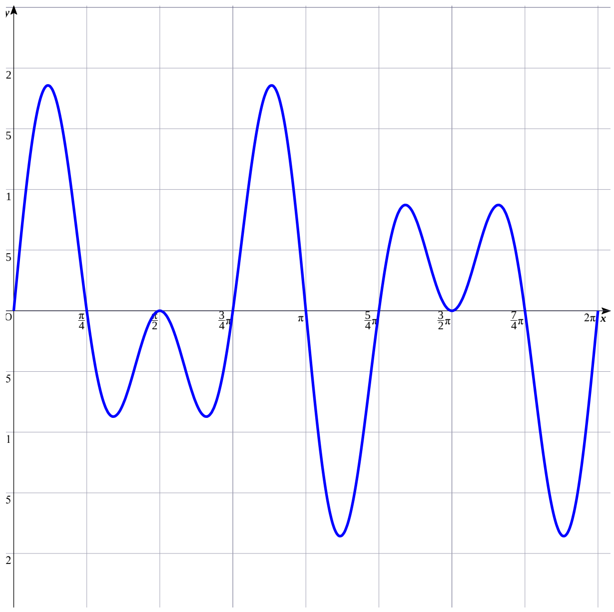
ドとレ



ドとミ



ドとファ



ドとラ