# 結び目不変量に関する高校生向けの授業実践

水口彰[1], 田中利史[2]

本研究では，結び目を題材とした高校生向けの教材開発とその実践を行った。高等学校学習指導要領数学編の内容をふまえて，生徒が日常の中に現れる図形を数学的に表現し，2 つの図形が同じか違うかという問題を考察する教材の開発を行った。授業では，結び目を図を用いてとらえ変形する活動や，結び目不変量である階数やジョーンズ多項式を求める活動を通して，2 つの結び目が同じか違うかを考察した。その結果，結び目の研究が，生徒が日常生活における図形を数学的に表現し考察する教材として有効であることが示唆された。一方で，2 日間の実践において，不変量の性質については生徒が十分な理解を得ることが難しいという課題を得た。
＜キーワード＞　結び目，階数，ジョーンズ多項式

## 1. 序文

平成 21 年度改定の高等学校学習指導要領数学編（[5]) における，数学科の図形領域の主な内容は，数学の図形と計量，数学の図形と方程式，数学Ａの図形の性質の 3 つである。これらの内容には共通して「事象の考察に活用できるようにする」という部分がある。また，高等学校学習指導要領数学編第 3 章における,「学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること」の説明として,「（ここでは）学習した内容を日常生活や社会生活などにおける問題の解決に活用することを述べている。この場合，日常生活や社会生活などにおける事象の数学的な側面に着目し，数学的に表現（数学化）することが必要である。また，数学的な結果が得られたら，結果を元の事象に戻し，その意味を考えることも必要である」とある。

図形領域で学習したことを日常生活や社会生活などにおける問題の解決に活用することを考える場合，生徒は日常の中で，数学で学習したことに関連することを感じている必要がある。生徒が学習した図形と日常との関連付けが出来るようになるためには，日常の中にある形を，学習した形とおおよそ似ていると考えることや，学習した形が組み合わさった形になっていると考えることができるように，さまざまな視点から図形をとらえることが必要である。

そこで，ものの形をさまざまな視点からとらえることができること，とらえたものを数量化して考察できることをねらいとした，結び目を題材とした高校生向けの教材開発を行った。本論文では，その教材の内容とそれを用いた授業実践について述べる。

## 2. 教材について

本研究では，日常生活の中に現れる図形に着目し，どのようにしたら数学的にとらえられるかを考え数量化し，その結果を用いても

[1]岐阜県立東濃高等学校
[2]岐阜大学教育学部

との図形を考察することができるような教材の開発を行なった。

本研究で教材として扱う「結び目」とは，空間の中でひもを絡めて，その端同士をつなげることによりできる空間図形である。結び目を用いた高校生向けの教材研究においては，いくつかの先行研究がある。（[2]，[4]，[6]，[7], [8], [9], [10]）また，結び目の研究は平成 26 年度に栃木県立宇都宮女子高等学校及び，平成 27 年度に岐阜県立岐山高等学校における SSH 研究開発実施報告書においてもテーマとして取り上げられている。先行研究のなかでは，ひも，モール，ロープ，針金などさまざまな道具を用いた授業実践が行われている。特に [7] において，道具として針金入りシリコンチューブを開発し用いたが小さすぎたため，さまざまな結び目の様子を有効に観察することが困難であった。本研究では，十分に長い針金入りシリコンチューブを用いて，導入の部分で，実際に生徒が結び目に触れ観察したり，描いたりする作業を取り入れた授業実践を行った。また，結び目不変量として新たに階数とジョーンズ多項式を導入した。階数は，合同式とその性質を十分に理解することが必要となる対象である。また，ジョーンズ多項式においては，多項式において負の指数をあつかう。このような点が本実践における新しい取り組みである。

本研究で題材としている「結び目」の分類の研究は，結び目理論（[3]）の問題である。結び目理論は国内外で盛んに研究が行われている現代数学の最先端の研究分野である。

本題材は高校数学における「場合の数」や「漸化式」の内容を活用・発展させたものとして位置づける。本研究では，結び目理論の考え方を用いて結び目の射影図を調べ，数量化する高校生向けの数学教材を開発をし，岐阜県内の中学生及び高校生に対し授業実践を行なっている。

## 3. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業の題材は，結び目である。それを教材として扱う理由を以下に示す。

1. 結び目はひもや針金を用いて与えることができるため，生徒にとって多角的に観察することができ，認識しやすい空間図形である。
2. 学校で扱う図形と異なり，結び目は空間の中で自由に変形しても同じとみなすため，空間図形の変化を（射影）図でとらえることが必要であり，その重要性が分かる。また結び目の性質を図を用いて理解できる。
3. 結び目を数や多項式を用いて表す活動を通して，結び目の空間図形としての違いを明確にすることができる。

(2) 授業のねらい

本授業のねらいを以下のようにした。

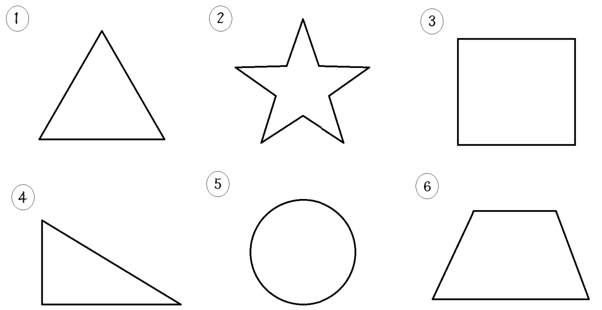
1. 結び目の図式を，重なりの上下に気をつけて描くことを通して，空間図形として多角的に観察し，それを平面図形にすることができる。
2. 結び目の図式を変形させる活動を通して，空間図形の性質が平面上で理解できることを認識する。
3. 結び目の不変量を求める活動を通して，図形を数量や式として表現し考察する視点を養う。

(3) 授業の構成

ここで授業案の流れについて述べる。本授業は 10 時間 （$2.5 \times 4$ 時間) の内容で構成している。（結び目理論の基本的な用語については [3] を参照。）

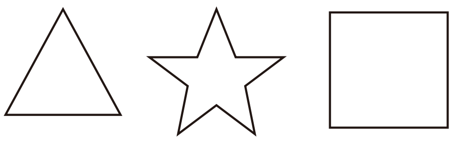
初めに導入として，次の問題演習を行なう。

**問題（導入）**
次の図形を分類しましょう。ただし，何か理由をつけてください。




導入では，生徒がこれまで数学について学習してきたことをどれくらい活用できるか，ということを確かめるような活動を行う。その後に，今回の実践では，これまで学習してきたこととは異なる考え方を用いた数学を学習していくことを伝え，セミナーを始める。授業は以下の3つの内容に分かれている。

**内容1**
結び目を図式にかいたり，それを変形させて，2つの結び目が同じかどうかを確かめる。
**練習問題1**
針金を変形して，次の形が同じであることを示しましょう。



＜定義1＞
両端の繋がっていない1本の紐を自由に動かして，端と端をつないだ物を**結び目**という。(図1)
＜定義2＞
結び目の**射影図**とは，結び目を紙と反対側から光をあててできた影をなぞったものをいう。
注意. ただし，平面上で曲線が自分自身と接したり，ひもが3重に射影されないようにする。結び目の射影図において，ひもの一部の影同士が図1のように交差している点をその**交点**という。

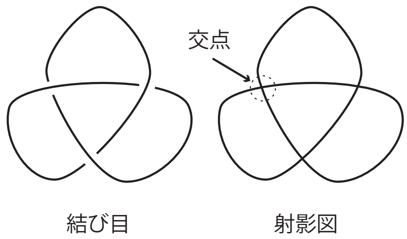
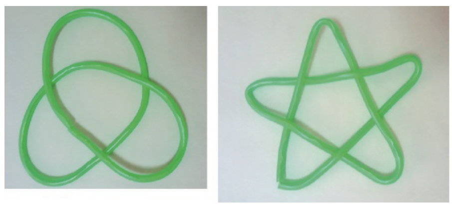



図1

**練習問題2**
下の結び目をつくり，その射影図をかきましょう。



＜定義3＞
結び目の**図式**とは,（図2のように）射影図の交点に上下関係がわかるように書き加えたものをいう。

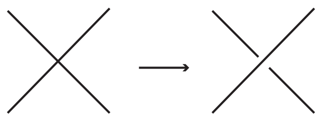
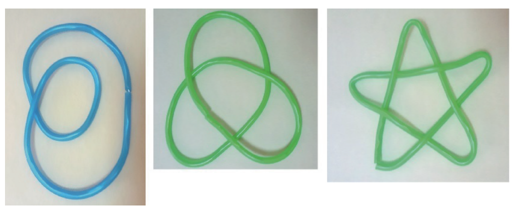


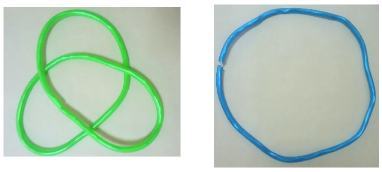
図2

**練習問題3**
以下の結び目の射影図をかき，それを図式にしましょう。



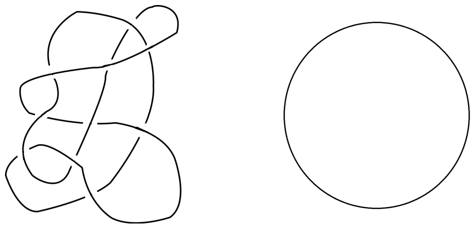
＜定義 4＞
2 つの結び目のどちらか一方を，途中で切らずに変形してもう一方と同じ形にできるとき，それらの 2 つの結び目は**同じ**であるという。

**練習問題 4**
次の結び目を，① から ② へ変形しましょう。そのとき，変形の過程もかきましょう。



① ②

**練習問題 5**
次の結び目の図式について，変形の過程がわかるように ① から ② へ変形しましょう。



① ②

（考察） 練習問題 4 と 5 の結果から，同じ結び目の図式の一部に注目すると，次の関係がいえます。
結び目の図式において，次の $R1$ から $R3$ までの変形を **$R$ 移動**と呼びます。

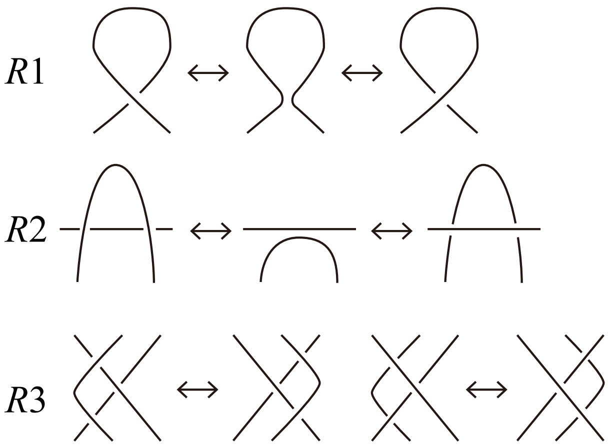
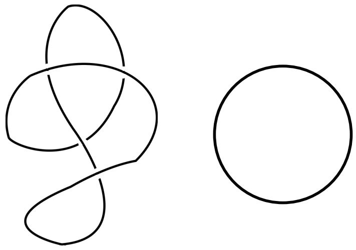



図 3

＜定理 1＞
同じ結び目の図式であれば，R1～R3 で変形することで，同じ形にできる。

**まとめ問題 1**
次の結び目の図式を，$R1$～$R3$ を用いて変形して同じ形にしましょう。



① ②

結び目の図式を描く活動は，ねらい (1) で述べた空間図形を多角的に観察し，平面図形にする活動のことである。ここで，生徒は結び目のような，さまざまな角度より観察しなければ性質をとらえられない図形を十分に学習していないと仮定する。したがって，活動にしっかりと時間を確保し，ねらい (2) を達成するための準備を行う。

**内容 2**
結び目の不変量である階数について学習しながら，不変量について正確に理解し，実際に階数を求めて，2 つの結び目の違いを調べる。
＜定義 5＞
さまざまな物を区別するときに用いられる，同じグループの仲間には同じ数量を与える（対応させる）ものを，**不変量**という。
ここで，不変量の例を，合同な 3 角形のグループに対する 3 辺の長さを用いて与える。（ワークシートを参照。）
＜定義 6＞
整数 $m, n$ に対して $m - n$ が自然数 $p$ で割り切れるとき，$m$ と $n$ は **$p$ を法として合同**であるという。また，このことを $m \equiv n \pmod{p}$ とかく。このような式を**合同式**という。

ここで，合同式の性質を紹介し演習問題に取り組む。

＜性質＞

合同式には以下のように，等式の性質と同じものが成り立つ。

性質 1. $a \equiv b \pmod p$, $c \equiv d \pmod p \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod p$

性質 2. $a \equiv b \pmod p$, $c \equiv d \pmod p \Rightarrow a-c \equiv b-d \pmod p$

性質 3. $a \equiv b \pmod p$, $c \equiv d \pmod p \Rightarrow ac \equiv bd \pmod p$

**練習問題 6-1**

(1) 3 と 5 は何を法として合同ですか。その中で最も大きい数を見つけ，合同式を用いて表しなさい。

(2) 2 と 6 は何を法として合同ですか。その中で最も小さい素数を見つけ，合同式を用いて表しなさい。

**練習問題 6-2**

合同式の性質について，以下の問題を解きましょう。

(1) $2 \equiv 7 \pmod 5$, $8 \equiv 13 \pmod 5$ について，性質 1 が成り立つことを確かめましょう。

(2) $4 \equiv 6 \pmod 2$, $5 \equiv 11 \pmod 2$ について，性質 2 が成り立つことを確かめましょう。

(3) $3 \equiv 6 \pmod 3$, $13 \equiv 6 \pmod 3$ について，性質 3 が成り立つことを確かめましょう。

次に，重みのついた図式を定義し，演習問題に取り組む。

＜定義 7＞

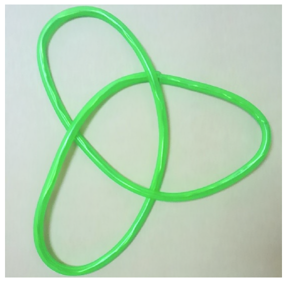
結び目の図式について，ある交点からある交点までの曲線のことを，結び目の**弧**という。

＜定義 8＞

ある自然数 $p$ を固定する。すべての結び目の弧に，0 から $p-1$ までの整数のうちどれか 1 つを対応させた図式を**重みのついた図式**という。また，弧についた数のことを弧の**重み**という。

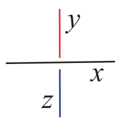
**練習問題 7**

下の結び目の図式をかいて，それに重みをつけましょう。



＜定義 9＞

すべての交点で，以下の条件を満たすような重みのついた図式を，**適切な重みのついた図式**という。また，以下の条件のことを**交点条件**という。




**練習問題 8**

練習問題 7 の結び目の図式について，それに適切な重みを 1 つつけましょう。

ここで，階数を定義し，まとめ問題を行う。

＜定義 10＞

結び目の図式が与えられたとき，その適切な重みのついた図式の総数を，結び目の**階数**という。

＜定理 2＞

結び目の階数は，不変量である。

注意．授業において，定理の証明については難易度が高いため触れずに省略した。（結び目の階数の性質については [1]，[11] を参照。）

**まとめ問題 2-1, 2-2, 2-3**（ワークシートを参照。）

結び目の階数を用いて，三葉結び目と 8 の字結び目が違うことを示しましょう。

注意．図 4 の結び目をそれぞれ**三葉結び目**，**8 の字結び目**という。

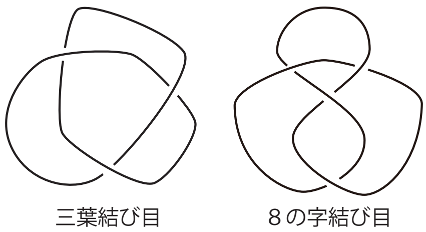
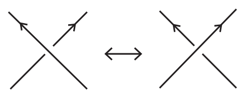



図４

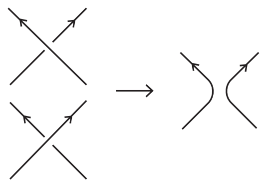
まとめ（ワークシートを参照。）
２つの図形（結び目）が違う形であることを示すためには,「実際に変形することができないようだ」では示したことになりません。不変量を活用して，それが違うことを示すことによって，もとの結び目も違うことを示すことができます。

２つの図式が変形操作（R 移動）を用いて移り合うとき，その２つの結び目が同値であることを示せる。しかし，図式の変形操作のみを用いて２つの結び目が同値でないことを示すことは出来ない。ここでは，そのことを理解させながら，ではどうすれば２つの結び目が違うことを示せるかということについて学習する。そのために結び目の不変量である階数を用いる。階数には高校数学の発展的内容である合同式が関係しており，学校で学習したことが活かせるような内容にする。

**内容 3**
結び目の不変量であるジョーンズ多項式について学習しながら，結び目を分類する際に階数だけでは不十分であることを理解し，実際にジョーンズ多項式を求めて，階数では区別できない２つの結び目が違うかを調べる。
ここで，指数法則について紹介し，問題演習に取り組む。
指数法則１
(1) $a^0 = 1$
(2) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
指数法則２
(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$,
(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$,
(3) $(a^m)^n = a^{mn}$,
(4) $ab^m = a^m b^n$
(5) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$
**練習問題 9**
次の計算をしましょう。
(1) $2^2 \times 2^2$ (2) $3^{\frac{7}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ (3) $6^{\frac{5}{2}} \times 6^{\frac{1}{2}}$ (4) $(5^4)^{\frac{1}{2}}$
(5) $(3^5 \times 2^5)^{\frac{1}{5}}$ (6) $(2^4 \times 7^8)^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{2}} \div 2$
(7) $x^3 \times x^5$ (8) $y^{\frac{8}{9}} \times y^{\frac{2}{9}}$ (9) $(t^2 \times 3^8)^{\frac{1}{4}} \times t^4 \div 3^3$
次に，図式の交差交換及びスプライスを定義し，演習問題取り組む。
＜定義 11＞
以下のような図式の操作を**交差交換**，**スプライス**という。ただし，図式には向きをつけたものを考える。

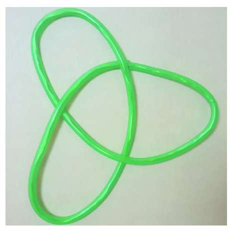


交差交換

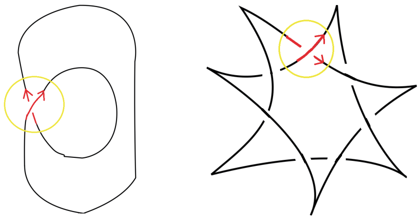


スプライス

**練習問題 10**
次の結び目の図式をかきましょう。その図式に交差交換，スプライスをしてどのような形になるか調べよう。



**練習問題 11**
次の図式の指定された交点について，交差交換，スプライスをして $D_{L_+}$,$D_{L_-}$,$D_{L_0}$ をつくりましょう。



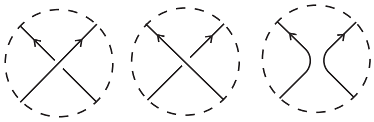
ここで，ジョーンズ多項式を定義し，演習問題に取り組む。

＜定義 12＞

有向絡み目 $L$ に対して，次の 2 つの公理を用いて $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$ が定義される。

(1) 自明な結び目 $O$ に対して，$V_O(t) = 1$ が成立する。

(2) 3 つの絡み目 $L_+$ ,$L_-$ ,$L_0$ のそれぞれの図式 $D_{L_+}$ ,$D_{L_-}$ ,$D_{L_0}$ があり，それらの図式は，ある交点以外では全く同じであり，その交点では，以下のようになっているものとする。



$D_{L_+}$　$D_{L_-}$　$D_{L_0}$

このとき，

$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$

が成り立つ。この $V_L(t)$ を有向絡み目 $L$ の**ジョーンズ多項式**という。

＜定義 13＞

結び目がいくつか組み合わさった物を**絡み目**という。このとき，その数 $N$ に対して,「$N$ **成分の絡み目**」と呼ぶ。図 5 の図式で表される絡み目を**自明な絡み目**という。

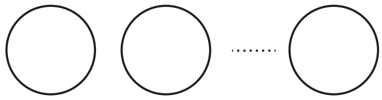


図 5

＜定理＞ [3]

$N$ 成分の自明な絡み目 $O_N$ について，以下の式が成り立ちます。

$V_{O_N}(t) = (-1)^{N-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{N-1}$

注意． 絡み目に対して，それを構成するすべての結び目に向きをつけたものを**有向絡み目**という。有向結び目の図式にも，その向きにそって向きをつける。結び目の場合と同様に（有向）絡み目に対して，同値や $R$ 移動及び不変量が定義できる。

ここで，定義式を用いたジョーンズ多項式の求め方の説明を行い，具体的な計算問題に取り組む。

**練習問題 12**

指示に沿って，三葉結び目のジョーンズ多項式を求めてみましょう。

**まとめ問題 3-1**

三葉結び目の鏡像のジョーンズ多項式を求めましょう。

**まとめ問題 3-2**

これまでの結果から，この 2 つの結び目が違うことを説明しましょう。ただし「ジョーンズ多項式」という言葉を必ず使いましょう。

全ての自然数 $p$ に対して階数が一致しても，結び目としては同じではないようなものが存在する。例えば三葉結び目と三葉結び目の鏡像は，階数は一致する。このような場合，別の不変量を用いれば，２つの結び目が区別できることがある。その確認のために，ジョーンズ多項式について学習し，実際に三葉結び目と三葉結び目の鏡像のジョーンズ多項式を求めて，２つの結び目が違うことを確かめる。以上が本研究における授業案の概要である。

## 4. 実践と結果

### 実践内容

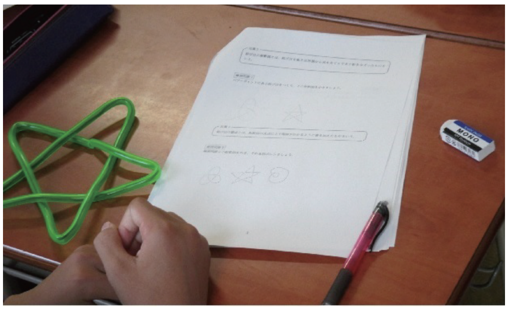
講座名：高校数学セミナー　～結び目の違いは数字でわかる？～

日程：平成 29 年 7 月 29 日（土）・7 月 30 日（日）
場所：岐阜大学教育学部棟
対象：岐阜県内の中学生・高校生　40 名
指導補助：岐阜大学・教育学部 4 年生及び教育学研究科大学院生

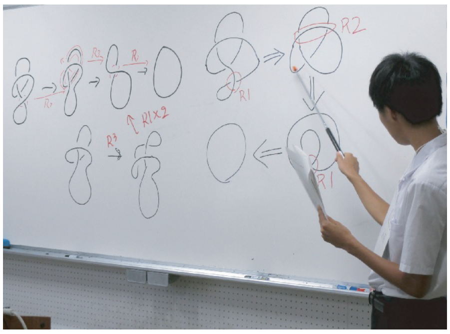
### 実践の流れ

**1 日目**

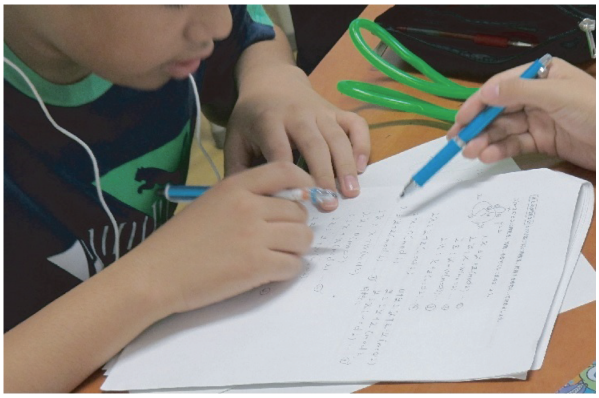
1. 8 の班に分け，針金入りシリコンチューブとワークシートを配布した。
2. 事前アンケートを行った。
3. スライドを用いて，授業で扱う図形について説明を行った。
4. 導入問題を提示した。
5. 結び目を定義し，演習問題 1 に取り組んだ。
6. 結び目の射影図を定義し，演習問題 2 に取り組んだ。
7. 結び目の図式を定義し，演習問題 3 に取り組んだ。

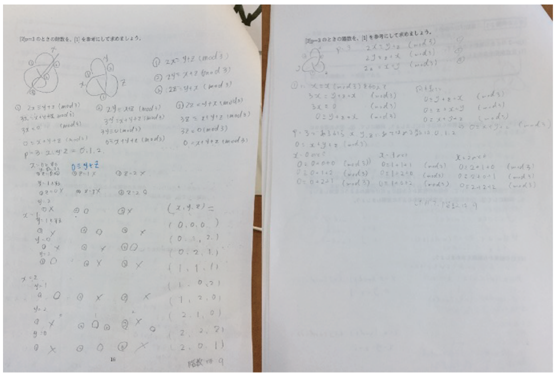


8. 結び目が同じであることを定義し，練習問題 4, 5 に取り組んだ。
9. $R1$ から $R3$ の変形についてスライドで提示し，練習問題 4, 5 の結果から，同じ結び目の図式は $R1$ から $R3$ の変形をすることで，同じ結び目にできることを確認した。
10. まとめ問題 1 に取り組んだ。



11. スライドを用いて三葉結び目とその鏡像を表示し，それらが同じ結び目かという問題を提示した。
12. 図式が何回かの $R1$ から $R3$ の変形を用いても同じ形にできないから，結び目が同じとは言えないことを説明した。
13. 不変量について定義し，スライドを用いて説明した。
14. 合同式を定義し，練習問題 6-1，6-2 に取り組んだ。
15. 結び目の弧と重みのついた図式について定義し，練習問題 7 に取り組んだ。
16. 適切な重みのついた図式について定義し，練習問題 8 に取り組んだ。
17. 結び目の不変量として階数を定義し，不変量であることを説明した。
18. まとめ問題 2 に取り組んだ。

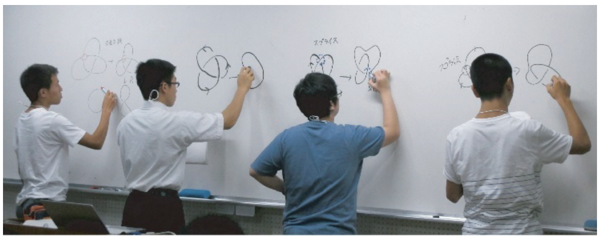




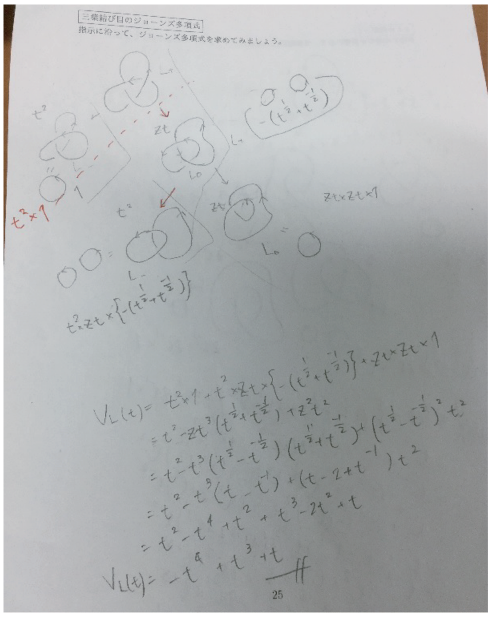
19. 1 日目のまとめを行った。

**2 日目**

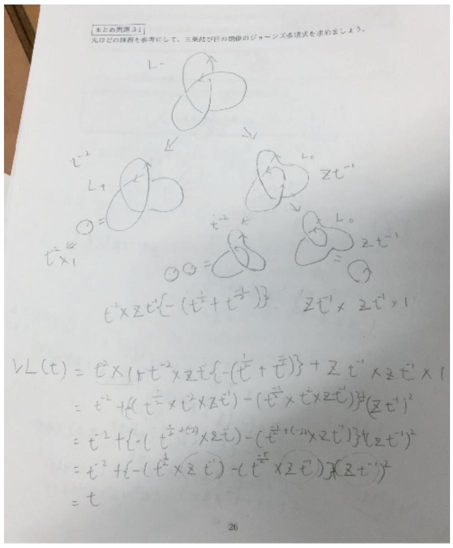
20. 1 日目の復習を行った。
21. 階数が同じ結び目を区別するためには，新たな不変量が必要であることを説明した。
22. 指数法則を説明し，練習問題 9 に取り組んだ。
23. 交差交換とスプライスを定義し，練習問題 10 に取り組んだ。



24. ジョーンズ多項式を定義し，練習問題 11 に取り組んだ。
25. 三葉結び目のジョーンズ多項式の計算（練習問題 12）をスライドによる説明に従って取り組んだ。



26. まとめ問題 3-1, 3-2 に取り組んだ。



28. 事後アンケートを実施した。

アンケート結果

事前アンケートの結果

(1) あなたは，数学に「幾何学」という分野があることを知っていますか。

| よく知っている | 知っている | それなりに知っている | あまり知らない | まったく知らない |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 13 | 13 |

(2) これまで学習してきた幾何学の内容だと思うものについて，できるだけ記述してくだ

さい。
・図形の性質　・三平方の定理　・合同，相似　・図形の面積や体積　・ユークリッド幾何学　・幾何学模様　・言葉だけ聞いたことがある

幾何学が図形分野の内容であることが，分かっていると考えられる学習者は１０人程度で，３０人が無記入であった。これは，質問の意味がうまく理解できなかったことが関係していると考える。

(3) あなたは，幾何学の中に「結び目」という分野があることを知っていますか。

| よく知っている | 知っている | それなりに知っている | あまり知らない | まったく知らない |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 12 | 24 |

(4) 身近な生活の中で,「これは数学に関連しているな」と感じたことがありますか。

| よく感じたことがある | 感じたことがある | 何度か感じたことがある | あまり感じたことがない | まったく感じたことがない |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 9 | 15 | 3 |

(5)(4) で感じたことがあると答えた人は，下にその具体例を書いてください。
・確率　・部活のリーグ試合数　・図書館のオブジェ　・買い物時の計算　・時刻表　・建築　・黄金比

(5) について，32 人の学習者が無記入であった。また，記述してあるが，どのように数学に関連しているかを書いた学習者は 1 人もいなかった。これについては質問の内容を工夫する必要があったと考える。

事後アンケートの結果
(1) 2 日間のセミナーであなたの中の図形のとらえ方に変化はありましたか。

| とても変化した | 変化した | それなりに変化した | あまり変化していない | まったく変化していない |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 4 | 0 | 0 |

(2) 今回のセミナーで結び目について，性質や特徴を理解できましたか。

| よく理解した | 理解した | それなりに理解した | あまり理解できなかった | まったく理解できなかった |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 13 | 11 | 1 | 0 |

(3) 今回のセミナーでは，図形がどのようなときに同じであると考えましたか。自由に図や文章で説明してください。（第 6 節を参照。）

(4) 今回扱ったトポロジーは現代数学といわれています。トポロジー以外の現代数学も体験してみたいと思いますか。

| とてもそう思う | そう思う | それなりにそう思う | あまりそう思わない | まったくそう思わない |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 19 | 5 | 0 | 0 |

注意. 無記入の部分があるために，集計の合計が 1 日目で 39 人，2 日目で 38 人以下になっている部分がある。本実践での参加者は岐阜県内の高校において募集が行われたが，参加者の様子をみると，自主的に参加した生徒が多いと考えられる。したがって，(4) については「とてもそう思う」,「そう思う」を選ぶ生徒が多いことが想定できた。

## 5. 考察

(1) ねらいの達成度について

**ねらい 1 について**

学習者のテキストから調査できた範囲では，すべての学習者が結び目の図式について，正確に描けていた。また，ジョーンズ多項式を求める際の図式の変形についても，交点の交差交換やスプライスについて正確に図式を変形させていた。したがって，ねらい 1 については達成できたと考える。

**ねらい 2 について**

事後アンケートの質問 (3) の自由記述を通して，33 人が「図式の変形で同じ形になれば，もとの結び目が同じである」ということが理解できていた。また，学習者のテキストから調査したところ,「2 つの結び目が同じであることを示しましょう」という設問に対して，結

び目の図式の変形から考えることができていた。したがって，ねらい２については達成できたと考える。

**ねらい3について**

学習者のテキストから調査できた範囲では，ほぼすべての学習者が，結び目の不変量を求めることは出来ていた。しかし，事後アンケートの質問 (3) の自由記述で,「不変量が同じであるならば，２つの結び目は同じである。」という記述をしていた人が20人いた。これは学習者の半数が不変量の意味について間違ったとらえ方をしているということである。学習者が不変量の使い方やその意義について，正確に学習することが出来なかったことが推察される。

(2) アンケート結果の分析・考察

(1) において，3 つのねらいについて考察したが，日常生活における図形を数学的に表現し考察する教材の 1 例として，結び目がある程度の有効であることが示唆される。実際，事後アンケートの結果から，生徒は結び目について興味･関心を得ることができ，また，図形が異なるかということについて，新しい見方をできるようになったと考えられる。特に，図式の変形については，数学が苦手だと言っていた生徒も，楽しみながら考えることが出来ていた。

一方で，不変量の学習については改善点がある。ねらい3の考察でも述べているが，実践の中で不変量の扱い方について，階数やジョーンズ多項式では，２つの結び目が違うことを示すことはできても，同じことは示すことができないという部分を伝えていたが，しっかり伝わっていなかった。今後の課題として，不変量の例とその伝え方を改善する必要があると考える。また，階数やジョーンズ多項式については，その計算が生徒にとって容易でなく，授業者が誘導を行うことでやり方が決まってしまい，学習者が独自な視点から考える要素が少ないという問題点がある。結び目を題材とした教材を扱う場合には，学習者の自由な考え方を引き出すことの出来るようなテーマを用いる必要があると考える。

## 6. 本研究のまとめと課題

(1) 研究のまとめ

本研究では結び目理論における結び目の不変量である，階数及びジョーンズ多項式を用いた教材開発とその実践について考察した。本研究で用いた教材は高校生向けであり，中学生に対しては学習していない発展的な内容を含む授業となったが，大学生による指導補助により，知識不足を補うことができていたようである。結び目について図式をかき，そこから階数・ジョーンズ多項式といった結び目不変量を求める活動を通して，生徒が２つの図形が同じか違うかを考えるために有効な実践を行うことができたと考える。

(2) 今後の課題

結び目不変量の階数について，より効果的な計算方法と応用例を考えていく必要があると感じた。教材開発では，不変量の性質について十分な理解が得られなかったために，階数が同じならば結び目も同じであると間違えて理解している学習者が多く，それがアンケートの結果に表れた。不変量の意味を理解する上で，より有効な手段や不変量を用いる必要があると考える。

## 7. 添付資料

本論文に，授業で使用したワークシート及びスライドを添付する。

## 8. 謝辞

実践及びその準備でお世話になった実施委

員会の関係者の方々，岐阜大学の山田雅博教授，指導補助をしていただいた岐阜大学教育学部学部生及び大学院生の方々に感謝する。

**9. 参考文献**

[1] 村上斉,「結び目のはなし」，遊星社，1990 年.

[2] 河内明夫・柳本朋子編,「結び目の数学教育」への導入　―小学生・中学生・高校生を対象として―,「結び目の数学教育」研究プロジェクト, 2005 年.

[3] 河内明夫著, レクチャー結び目理論, 共立出版株式会社, 2007 年.

[4] 河内明夫・柳本朋子編,「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動 研究報告書 第 2 号, 2007 年.

[5] 文部科学省,『高等学校学習指導要領解説 数学編　理数編』，実教出版株式会社，2009 年.

[6] 河内明夫・柳本朋子編,「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動 研究報告書 第 3 号, 2009 年.

[7] 酒井道宏，田中利史，中坊滋一,「結び目を用いた中学生向け数学教材の実践」, 岐阜数学教育研究 (2012), vol. 11, 76-83.

[8] 河内明夫・柳本朋子編,「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 研究報告書 第 4 号, 2014 年.

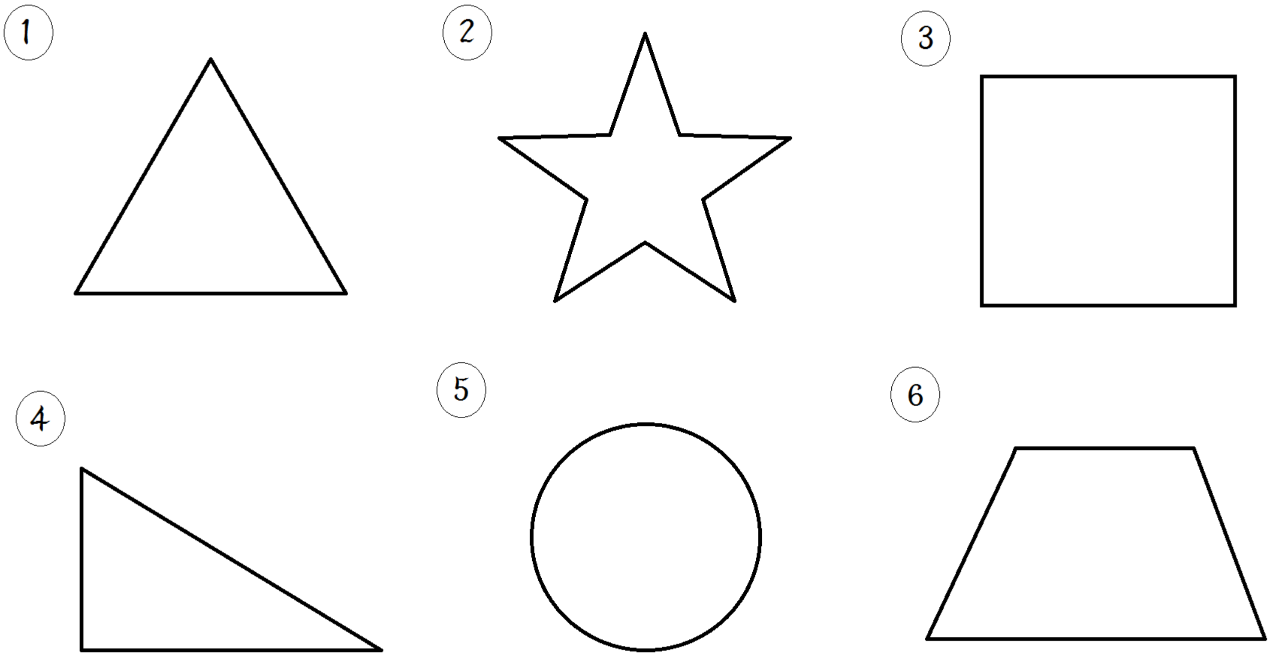
[9] 川嶋克利，酒井道宏，田中利史,「行列と結び目を用いた中等教育向けの数学教材の実践」, 岐阜数学教育研究 (2014)，Vol. 12，1-11.

[10] 河内明夫・柳本朋子編,「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 研究報告書 第 5 号, 2017 年.

[11] 水口彰,「結び目の幾何学的研究とそれを活用した授業実践」，岐阜大学大学院教育学研究科修士論文, 2018 年.

# 高校数学セミナー

以下の図形を自分なりの基準を持ってグループ分けしましょう。




この下に自由に記述してください。ただし、どのようにして分けたかを文章で書いてください。

本日の授業では、この 6 つの図形はすべて同じグループの図形だと考えます。そのような数学の世界をトポロジーといいます。

トポロジーとは

やわらかい幾何学ともいわれます。よくあげられる例は以下のような物です。


上のコーヒーカップ (取っ手つき) とドーナツは同じ形だと見なします。その理由は穴の数です。穴の数が同じ図形は同じ物だと考えるのがトポロジーの特徴です。

◦ 今回の授業では、辺の長さや角の大きさにこだわらない幾何学について学習します。

定義 1

両端の繋がっていない 1 本の紐を自由に動かして、端と端をつないだ物を**結び目**という。

練習問題 1

針金を変形して、パワーポイントの問題に取り組みましょう。

定義 2

結び目の**射影図**とは、結び目を紙と反対側から光をあてててできた影をなぞったものをいう。

練習問題 2

パワーポイントにある結び目をつくり、その射影図をかきましょう。

定義 3

結び目の**図式**とは、射影図の交点に上下関係がわかるように書き加えたものをいう。

練習問題 3

練習問題 2 の射影図をかき、それを図式にしましょう。

定義 4

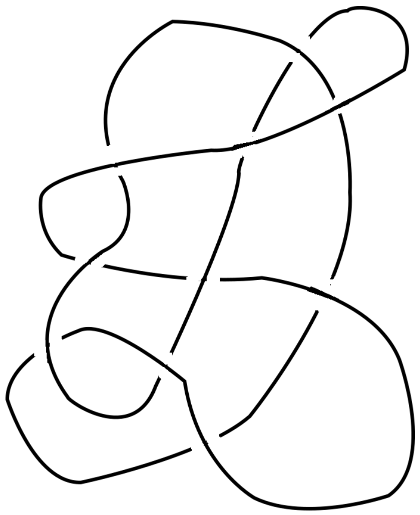
2 つの結び目のどちらか一方を、途中で切らずに変形してもう一方と同じ形にできるとき、それらの 2 つの結び目は同じであるという。

練習問題 4

パワーポイントの結び目を、1 から 2 へ変形しましょう。そのとき、例のように変形の過程もワークシートにかきましょう。

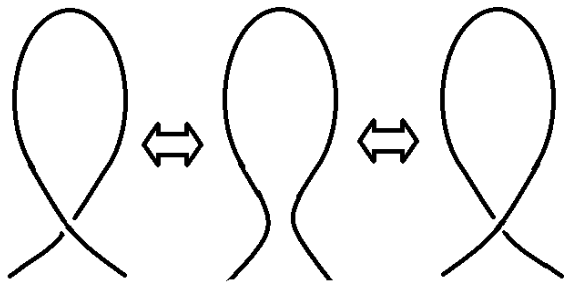
$\boxed{\text{練習問題 5}}$

パワーポイントの結び目の図式を、変形の過程がわかるように 1 から 2 へ変形しましょう。

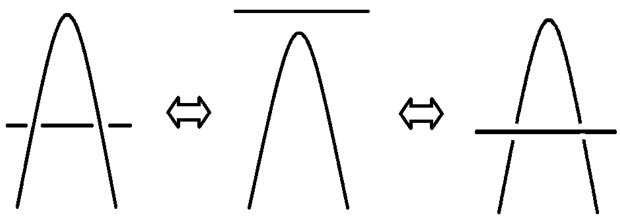


練習問題 4 と 5 の結果から、同じ結び目の図式の一部に注目すると、次の関係がいえます。

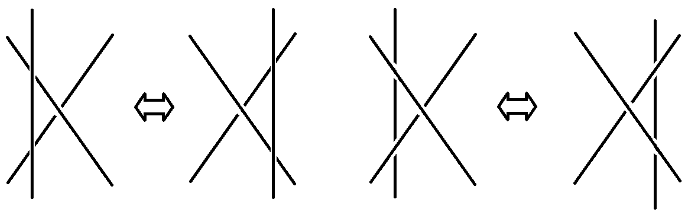
R1



R2



R3



**定理 1**

同じ結び目の図式であれば、上の R1〜R3 で変形することで、同じ形にできる。

$\boxed{\text{まとめ問題 1}}$

パワーポイントの結び目の図式をかき、R1〜R3 を利用して同じ形に変形しましょう。

問題

パワーポイントの結び目は同じか違うか考えましょう。

定義 5

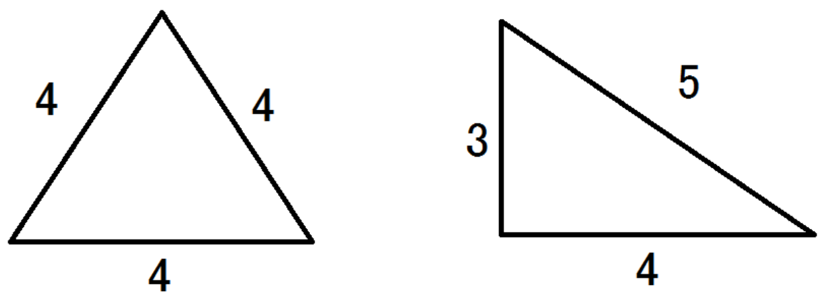
様々な物を区別するときに用いられる同じグループの仲間には同じ数量を与えるものを、**不変量**という。

・今回は、三角形について、移動させたり回転させたりして重なり合うものを同じだと考えます。なお、そのことを合同という。

不変量の例

三角形に対して、次のような量を考える。

「三角形の各辺について、辺の長さが大きい順に（a,b,c）」



**定義 6**

整数 $m, n$ に対して $m-n$ が $p$ で割り切れるとき、$m$ と $n$ は自然数 $p$ を法として合同であるという。また、このことを $m \equiv n \,(mod\; p)$ とかく。このような式を合同式という。

練習問題 6-1

(1) 3 と 5 は何を法として合同ですか。その中で最も大きい数を見つけ、合同式を用いて表しなさい。

(2) 2 と 6 は何を法として合同ですか。その中で最も小さい素数を見つけ、合同式を用いて表しなさい。

合同式の性質 1

合同式には以下のような基本的な性質が成り立つ。

(1) $a \equiv b\,(mod\ p) \Rightarrow b \equiv a\,(mod\ p)$

(2) $a \equiv b\,(mod\ p)\,, b \equiv c\,(mod\ p) \Rightarrow a \equiv c\,(mod\ p)$

(3) $a \equiv a\,(mod\ p)$

(4) $pa \equiv 0\,(mod\ p)$

合同式の性質 2

合同式には以下のような等式の性質と同じものが成り立つ。

(1) $a \equiv b\,(mod\ p)\,, c \equiv d\,(mod\ p) \Rightarrow a + c \equiv b + d\,(mod\ p)$

(2) $a \equiv b\,(mod\ p)\,, c \equiv d\,(mod\ p) \Rightarrow a - c \equiv b - d\,(mod\ p)$

(3) $a \equiv b\,(mod\ p)\,, c \equiv d\,(mod\ p) \Rightarrow ac \equiv bd\,(mod\ p)$

練習問題 6-2 合同式の性質 2 について、以下の問題を解きましょう。

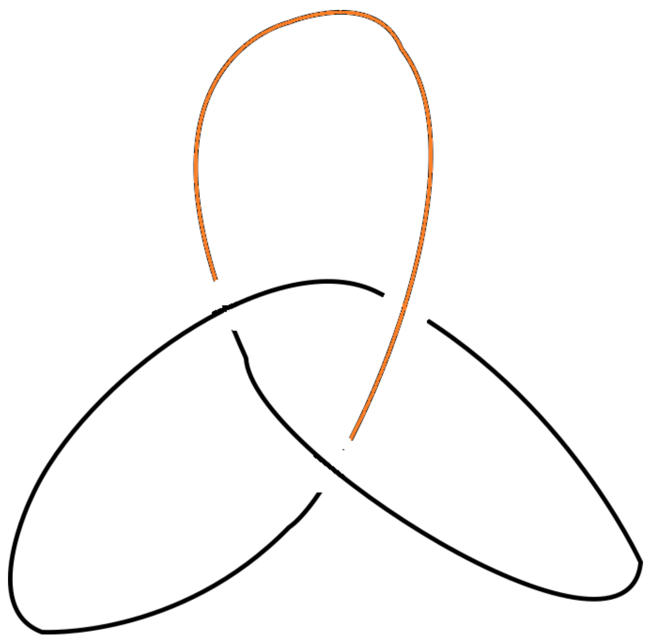
(1) $2 \equiv 7\,(mod\ 5)\,, 8 \equiv 13\,(mod\ 5)$ について、上の (1) が成り立つことを確かめましょう。

(2) $4 \equiv 8\,(mod\ 2)\,, 5 \equiv 11\,(mod\ 2)$ について、上の (2) が成り立つことを確かめましょう。

(3) $3 \equiv 6\,(mod\ 3)\,, 13 \equiv 6\,(mod\ 3)$ について、上の (3) が成り立つことを確かめましょう。

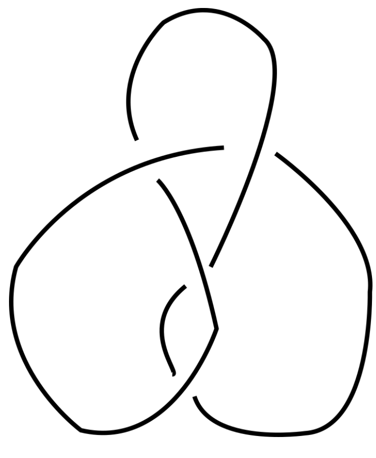
定義 7

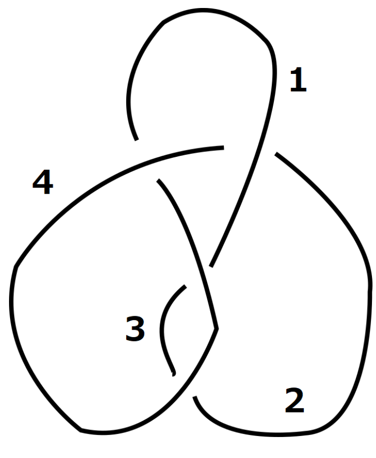
結び目の図式について、ある交点からある交点までの曲線のことを、**結び目の弧**という。



定義 8

ある自然数 $p$ を固定する。すべての結び目の弧に、0 から $p-1$ までの整数のうちどれか 1 つを対応させた物を **重みのついた図式**という。また、弧についた数のことを**弧の重み**という。





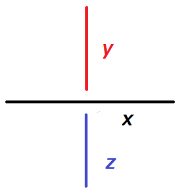
練習問題 7

パワーポイントの結び目の図式をかき、それに重みをつけましょう。

定義 9

すべての交点で、以下の条件を満たすような重みのついた図式を、**適切な重みのついた図式**という。また、以下の条件のことを**交点条件**という。

交点条件 下のような図式の一部の交点について、$2x \equiv y + z\,(mod\ p)$ を満たす。




練習問題 8

練習問題 7 の結び目の図式について、それに適切な重みを 1 つつけましょう。

定義 10

ある図式について、適切な重みの付け方の総数を結び目の**階数**という。

定理 2

結び目の階数は、不変量である。

・結び目の階数を利用して、2つの結び目が違うことを示すことができます。
今回は、三葉結び目と8の字結び目が違うことを示してみましょう。

$\boxed{\text{まとめ問題 2-1}}$ 三葉結び目の階数を、以下の小問に沿って求めましょう。

[1]p=2 のときの階数を求めます。

(1) 交点条件を求めましょう。

(2)①について、合同式の性質から左辺を 0 にしましょう。同様にして、②、③も左辺を 0 にしましょう。

(3)(2) で変形した①について、合同式の性質から左辺に $y$ だけが現れるように変形しましょう。同様にして②、③も左辺に 1 文字だけ現れるように変形しましょう。

(4)(3) の結果から階数を求めましょう。

[2]p=3 のときの階数を、[1] を参考にして求めましょう。

$\boxed{\text{まとめ問題 2-2}}$ 8の字結び目の階数を、問題1を参考にして求めましょう。

[1]p=2 のときの階数を、問題1を参考にして求めましょう。

[2]p=3 のときの階数を、問題 1 を参考にして求めましょう。

$\boxed{\text{問題 2-3}}$ 問題 2-1 と問題 2-2 の結果から、三葉結び目と 8 の字結び目が違うことを説明しましょう。ただし、「三葉結び目」「8 の字結び目」「階数」という言葉を必ず使いましょう。

1 日目のまとめ

①結び目が同じことを示すには、実際の操作で変形して同じ形にできればいい。
②R 変形で図式が同じ形にできるならば、もとの結び目は同じといえるが、同じ形にできないからといって違う結び目であるとはいえない。
③2 つの結び目が違うことを示すためには、階数を利用できる。

1日目の復習

(1) パワーポイントの図式を、R変形を使って同じ形に変形しましょう。

(2) パワーポイントの2つの結び目が、同じか違うかを考えましょう。

指数法則 1

(1)$a^0 = 1$

(2)$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

指数法則 2

(1)$a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2)$a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3)$(a^m)^n = a^{mn}$

(4)$(ab)^m = a^m b^m$

(5)$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

練習問題 9

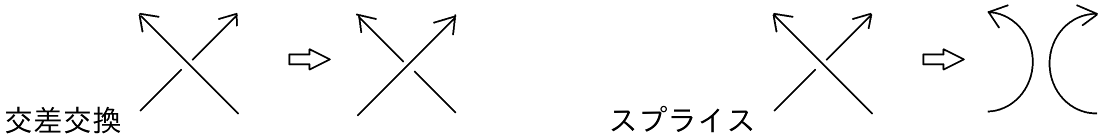
次の計算をしましょう。

(1)$2^2 \times 2^2$　(2)$3^{\frac{7}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$　(3)$6^{\frac{5}{2}} \div 6^{\frac{1}{2}}$　(4)$(5^4)^{\frac{1}{2}}$　(5)$(3^5 \times 2^5)^{\frac{1}{5}}$　(6)$(2^4 \times 7^8)^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{2}} \div 2$

(7)$x^3 \times x^5$　(8)$y^{\frac{8}{9}} \div y^{\frac{2}{9}}$　(9)$(t^2 \times 3^8)^{\frac{1}{4}} \times t^4 \div 3^3$

定義 11

以下のような図式の操作を**交差交換**、**スプライス**という。ただし、図式には向きをつけたものを考える。




練習問題 10

パワーポイントの結び目を図式にかきましょう。その図式に交差交換、スプライスをして同じ形にしましょう。

定義 12

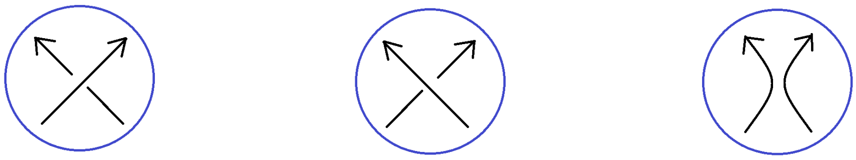
向きのついた結び目 $L$ に対して、次の $V_L(t)$ が定義される。

(1) 自明な結び目 $O$ に対しては、$V_O(t)=1$

(2) 3 つの結び目 $L_+, L_-, L_0$について、それぞれの図式を $D_{L_+}, D_{L_-}, D_{L_0}$とする。それぞれの図式はある交点以外では全く同じで、その交点では以下のようになっているとする。

このとき、$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}})V_{L_0}(t)$ という関係式が成り立つ。

$D_{L_+}$ $D_{L_-}$ $D_{L_0}$



定理 3

定義 12 の $V_L(t)$ をジョーンズ多項式という。これは結び目の不変量である。

練習問題 11

パワーポイントの図式について、交差交換、スプライスをして $D_{L_+}, D_{L_-}, D_{L_0}$をつくりましょう。

定義 13

結び目がいくつか組み合わさった物を絡み目という。そのとき、その数 $N$ に応じて、「$N$ 成分の絡み目」と呼ぶ。

ジョーンズ多項式の性質

$N$ 成分の自明な絡み目 $O_N$について、以下の式が成り立つ。

$$V_{O_N}(t) = (-1)^{N-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})^{N-1}$$

三葉結び目のジョーンズ多項式

指示に沿って、ジョーンズ多項式を求めてみましょう。

$\boxed{\text{まとめ問題 3-1}}$

先ほどの練習を参考にして、三葉結び目の鏡像のジョーンズ多項式を求めましょう。

$\boxed{\text{まとめ問題 3-2}}$

これまでの結果から、この 2 つの結び目が違うことを説明しましょう。ただし「ジョーンズ多項式」という言葉を必ず使いましょう。

# 高校数学セミナー

岐阜大学大学院教育学研究科総合教科教育専攻

水口彰

## 2日間のテーマ

- 空間図形の平面での把握
- 図形の分類

## 幾何学とは・・・

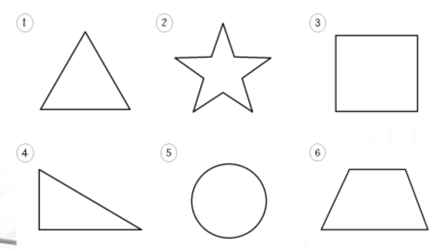
小学校：三角形、四角形
図形の面積

中学校：立体の表面積、体積
図形の合同、相似の証明

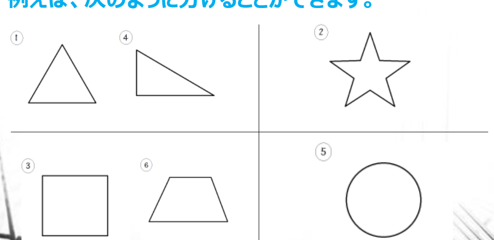
高校　：三角比(sin,cos,tan)
三角形の性質

**つまり、ものの形を扱う分野です！**

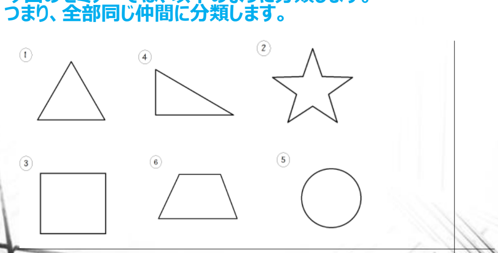
## 問題
次の図形を分類しましょう。ただし、何か理由をつけてください。



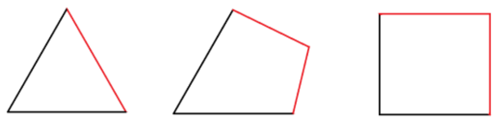
## 問題の答え①
例えば、次のように分けることができます。



## 問題の答え②
今回のセミナーでは、以下のように分類します。
つまり、全部同じ仲間に分類します。



**問題の答え③**
**図形の辺をゴムのような曲げたり、伸ばしたりできる素材でできていると考えると・・・**



**問題の答え④**
**図形の辺をゴムのような曲げたり、伸ばしたりできる素材でできていると考えると・・・**

先ほどのように考えると、①～⑥まですべての図形は同じ形に変形出来ることがわかります。

このようにして、同じ形に変形出来るときに同じグループに分類します。

**そのような幾何学の分野を、トポロジーといいます。**

トポロジーとは・・・

よくいわれる例として、コーヒーカップとドーナツは同じ形であるという考え方があります。

理由は穴の数です。


**今回のテーマはトポロジーです。**

小、中、高校では、図形の辺の長さや角の大きさに注目して幾何学について学習してきました。

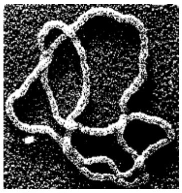
今回の高校数学セミナーでは、辺の長さや角の大きさにこだわらない「おおざっぱな」数学という物を体験しましょう。

**練習問題１**
**針金を変形して、次の形が同じであることを示しましょう。**


**普通の平面図形を扱っても面白くないので・・・**

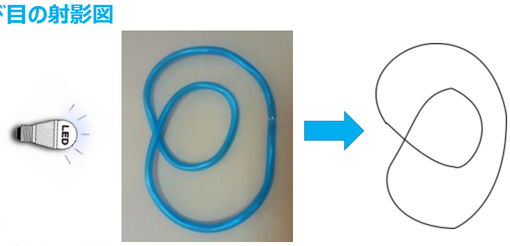
本日は、「結び目」とよばれる形について学習しましょう。

## 結び目の例



## 練習問題１－２
針金を変形して、次の形にしましょう。

## 結び目の射影図



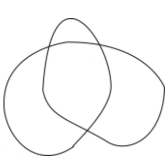

## 練習問題2
下の結び目をつくり、その射影図をかきましょう。

(1)

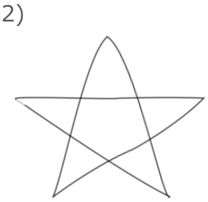
(2)

## 練習問題2

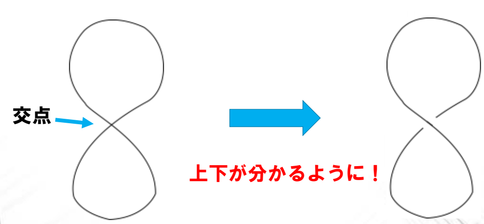
(1)



(2)



## 結び目の図式(1)

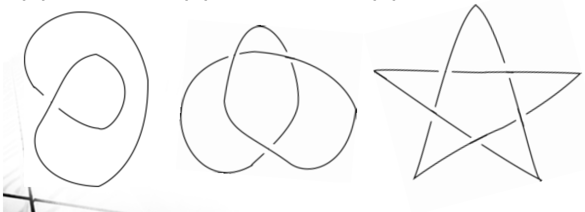


**練習問題3**
**以下の結び目の射影図をかき、それを図式にしましょう。**



**練習問題3**

(1)　(2)　(3)



**結び目が同じとは・・・**

(1)の結び目は、矢印の部分をねじると以下のように変形出来ます。

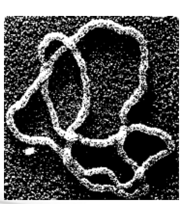

**結び目が同じとは・・・**

結び目を新たに切ったりつないだりしないで同じ形に変形出来るとき、2つの結び目は同じであると考えます。

したがって、下の2つの結び目は同じです。


**結び目が同じとは・・・**

実際に結び目を変形して同じかどうか判断することが、難しいこともあります。



**これまでの幾何学ではどうするか・・・**

△ABCにおいて、AB=5,BC=4,CA=3とし、∠Aの二等分線と対辺BCとの交点をPとする。また、頂点Aにおける外角の二等分線と対辺BCとの交点をQとする。このとき、BP,PC,CQの長さを求めよ。　（金沢工大）

このままではよく分からないので、図にかいて考える。

### 結び目でも同じ

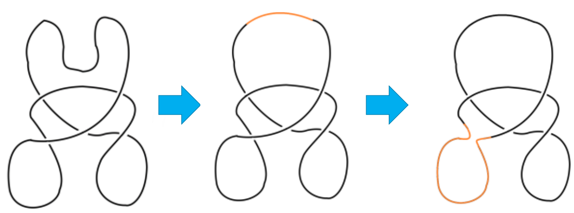
結び目について考えるときも、同様にして図にかいて考えてみましょう。

### 変形を、平面上で表す。

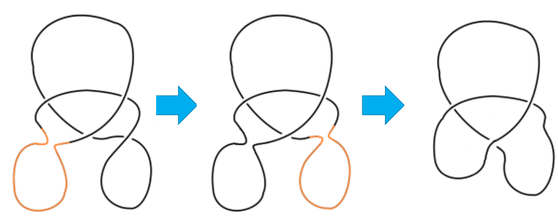
①変形した部分に注目しましょう。
変形した部分が分かるように色を変えましょう。

②1度の変形ではなるべく操作する箇所を少なくするようにしましょう。

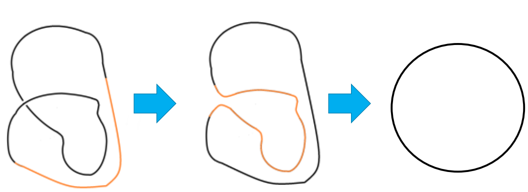
### 例えば･･･



### 例えば･･･



### 例えば･･･

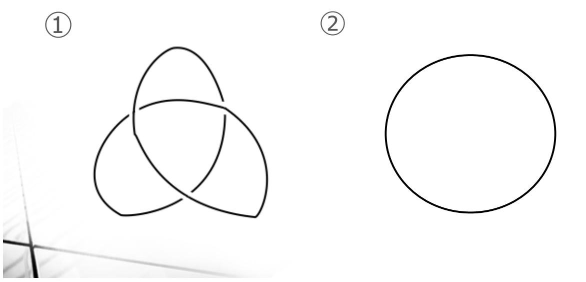


### 練習問題４
**次の結び目を、①から②へ変形しましょう。そのとき、例のように変形の過程もワークシートにかきましょう。**

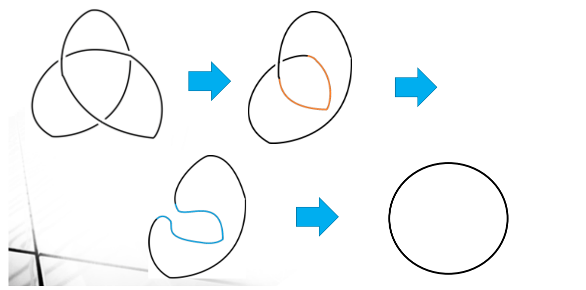
①

②

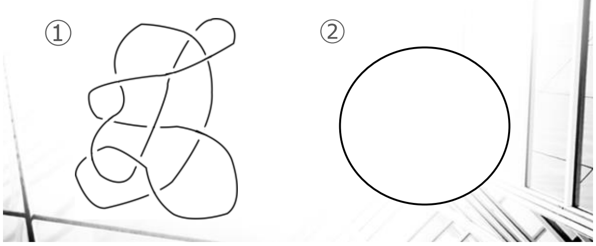
## 練習問題４



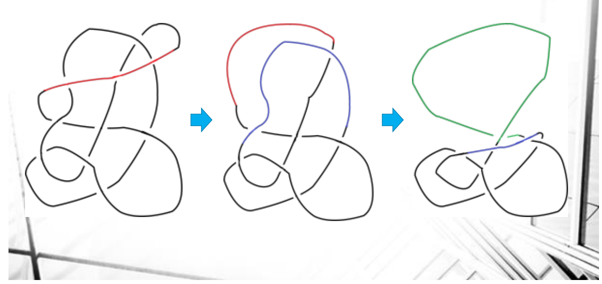

## 練習問題４



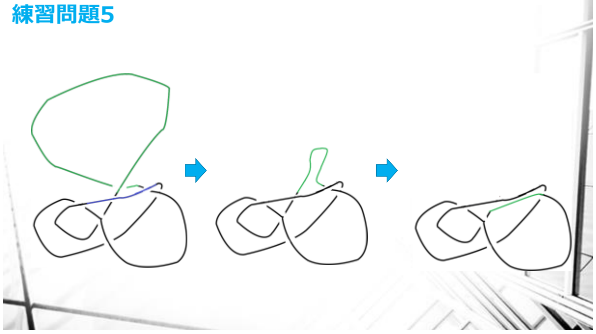
## 練習問題5
次の結び目の図式を、変形の過程がわかるように①から②へ変形しましょう。



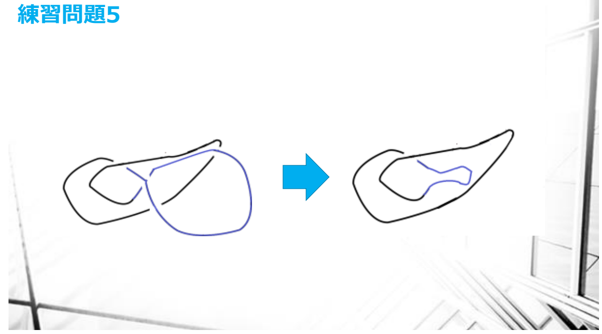

## 練習問題5



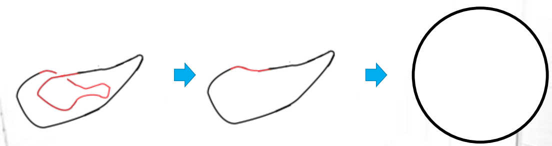
## 練習問題5



## 練習問題5

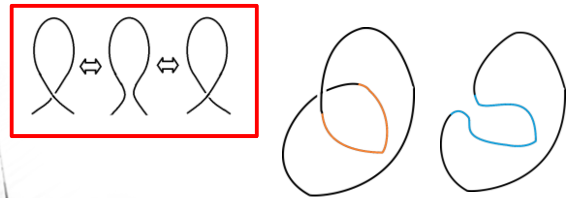


練習問題5

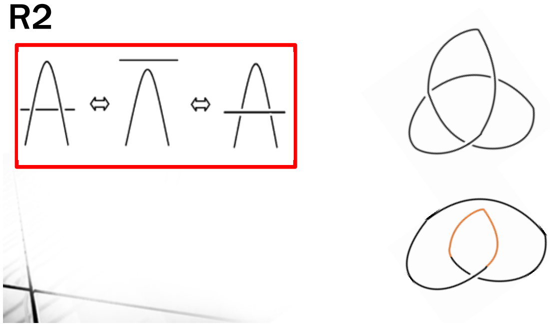


同じ結び目の図式ならば、3つの変形で同じ形にできます。

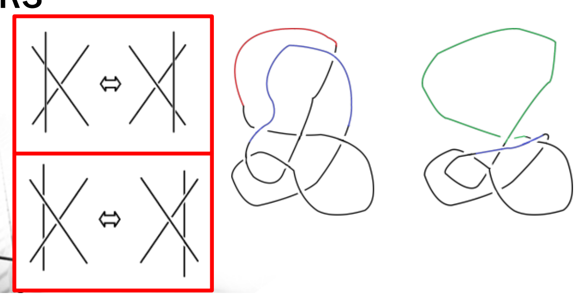
R1



R2

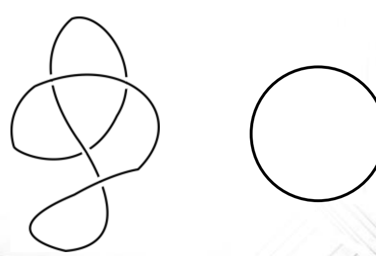


R3

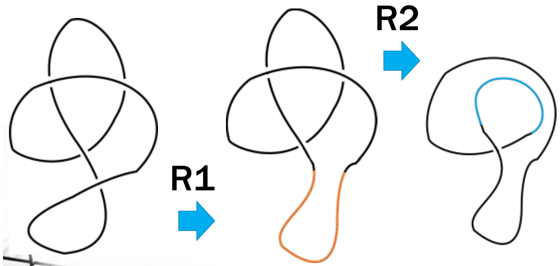


まとめ問題１
次の結び目の図式を、Ｒ１～Ｒ３を用いて変形して同じ形にしましょう。

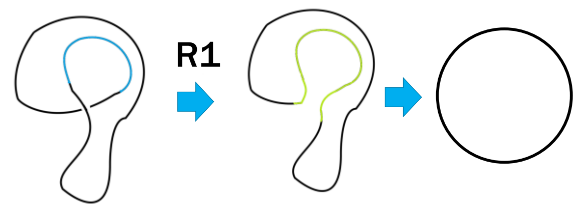
まとめ問題１



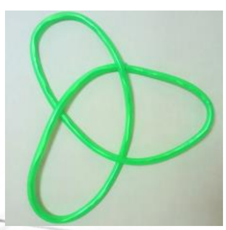
**まとめ問題１**




**まとめ問題１**




**次の結び目は同じか違うか考えましょう。**



**結び目が同じなら・・・**

２つの結び目の図式がＲ１～Ｒ３の変形で同じ形にできる。

2つの結び目は同じであると証明できる。

**結び目が同じでない(＝違う)**

その図式がＲ１～Ｒ３の変形で同じ形にできない。

2つの結び目が同じでないと証明できる。

**結び目が同じでない(２)**

本当にＲ１～Ｒ３の変形で同じ形にできないのか、
それとも変形の手順がわからないだけなのかはわからない。

違うことを証明するためには、別のアプローチが必要である。

## 不変量

様々な物を区別するときに用いられる、同じグループの仲間には同じ数量を与えるものを、不変量という。

**何をもって違うと考えるかが重要**

## 不変量(２)

例：三角形の合同に対して、次のような量を考える。

「三角形の各辺について、辺の長さが大きい順に（a,b,c）」


(５，４，３) ≠ (４，４，４)

## 結び目の不変量

結び目の不変量として、階数という物を学習していきます。

これから、階数を学習していくための準備をしていきます。少し難しいですが、頑張っていきましょう。

## 合同式(1)

整数$m, n$に対して、$m-n$ が自然数 $p$ で割り切れるとき、

$m$ と $n$ は $p$ を法として合同という。

また、このことを$m \equiv n \ (mod\ p)$ とかく。

このような式を合同式という。

## 合同式(2)

7と3で考えてみましょう。

7-3＝4から、7-3は4で割り切れます。

よって、 $7 \equiv 3 \ (mod\ 4)$ とかくことができます。

一方で、7-3は１でも２でも割り切れるので、

$7 \equiv 3 \ (mod\ 1)$ , $7 \equiv 3 \ (mod\ 2)$ とかくことができます。

１つに定まらないこともあるということは、しっかりと認識しておきましょう。

## 合同式の性質(1)

合同式には以下のような基本的な性質が成り立つ。

(1) $a \equiv b \ (mod\ p) \Rightarrow b \equiv a \ (mod\ p)$

(2) $a \equiv b \ (mod\ p),\ b \equiv c \ (mod\ p) \Rightarrow a \equiv c \ (mod\ p)$

(3) $a \equiv a \ (mod\ p)$

(4) $ap \equiv 0 \ (mod\ p)$

## 合同式の性質(2)

合同式には以下のような等式の性質と同じ物が成り立つ。

(Ⅰ) $a \equiv b \ (mod\ p),\ c \equiv d \ (mod\ p) \Rightarrow a + c \equiv b + d \ (mod\ p)$

(Ⅱ) $a \equiv b \ (mod\ p),\ c \equiv d \ (mod\ p) \Rightarrow a - c \equiv b - d \ (mod\ p)$

(Ⅲ) $a \equiv b \ (mod\ p),\ c \equiv d \ (mod\ p) \Rightarrow a \times c \equiv b \times d \ (mod\ p)$

## 練習問題6－１の答え

(1) 5 - 3 ＝ 2 より、これは 1 と 2 で割り切れる。

したがって、最も大きいのは 2 であるので、答えは

$3 \equiv 5\ (mod\ 2)$ である。

(2) 6 - 2 ＝ 4 より、これは 1， 2 と 4 で割り切れる。

したがって、最も小さい素数は 2 であるので、答えは

$2 \equiv 6\ (mod\ 2)$ である。

## 練習問題6－２の答え

(1) 2＋8 ＝ １０、7＋１３ ＝ ２０である。

ここで、２０-１０ ＝ １０より、これは 5 で割り切れる。

したがって、$2 + 8 \equiv 7 + 13\ (mod\ 5)$ が成立する。

(2) 4 - 5 ＝- 1 、8 - １１ ＝- 3 である。

ここで、- 1 -（- 3） ＝ 2 より、これは 2 で割り切れる。

したがって、$4 - 5 \equiv 8 - 11\ (mod\ 2)$ が成立する。

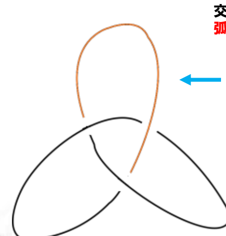
(3) 3 × １３ ＝ ３９、6 × 6 ＝ ３６である。

ここで、３９ - ３６ ＝ 3 より、これは 3 で割り切れる。

したがって、$3 \times 13 \equiv 6 \times 6\ (mod\ 3)$ が成立する。

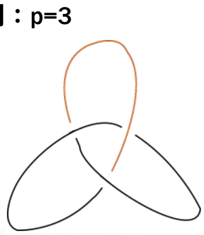
## 結び目の弧

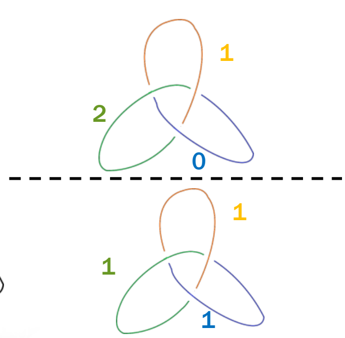
**交点から交点までの部分を結び目の弧という。**



## 重みのついた図式

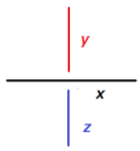
**例：p=3**






## 練習問題７
## 下の結び目の図式をかいて、それに重みをつけましょう。

## 交点条件

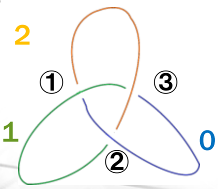



$2x \equiv y + z \ (mod\ p)$

## 適切な重み

すべての交点の周りで、交点条件をみたす図式を
適切な重みのついた図式という。

p=3




① $2 \times 1 \equiv 2 + 0 \ (mod\ 3)$

② $2 \times 0 \equiv 1 + 2 \ (mod\ 3)$

③ $2 \times 2 \equiv 0 + 1 \ (mod\ 3)$

## 階数

結び目の図式が与えられたとき、その適切な重みのついた図式の総数を、結び目の階数という。

結び目の階数は、不変量である。

## まとめ問題２

結び目の階数を用いて、三葉結び目と８の字結び目が違うことを示しましょう。

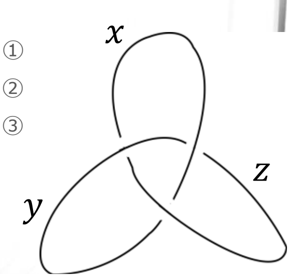
## まとめ問題２

### 三葉結び目(p=2)

(1) $2x \equiv y + z \ (mod\ 2)$・・・①

$2y \equiv x + z \ (mod\ 2)$・・・②

$2z \equiv x + y \ (mod\ 2)$・・・③




## まとめ問題２

(2)合同式の性質(4)より、$2x \equiv 0 \ (mod\ 2)$である。
同様にして、$2y \equiv 0 \ (mod\ 2)$、$2z \equiv 0 \ (mod\ 2)$。
したがって、
①より、$0 \equiv y + z \ (mod\ 2)$であり、②，③についても
同様にして、$0 \equiv x + z \ (mod\ 2)$、$0 \equiv x + y \ (mod\ 2)$
である。

**まとめ問題２**

(2)まとめると以下のようになる。

$2x \equiv y + z \ (mod\ 2)$

$2y \equiv x + z \ (mod\ 2)$

$2z \equiv x + y \ (mod\ 2)$

$\Rightarrow$

$0 \equiv y + z \ (mod\ 2)$

$0 \equiv x + z \ (mod\ 2)$

$0 \equiv x + y \ (mod\ 2)$

**まとめ問題２**

(3) $0 \equiv y + z \ (mod\ 2)$ の両辺に$y$を加えると、

$y \equiv 2y + z \ (mod\ 2)$ であり、合同式の性質(4)より、

$y \equiv z \ (mod\ 2)$ である。

同様にして、$0 \equiv x + z \ (mod\ 2)$、$0 \equiv x + y \ (mod\ 2)$

はそれぞれ、$z \equiv x \ (mod\ 2)$、$x \equiv y \ (mod\ 2)$ である。

**まとめ問題２**

(3)まとめると以下のようになる。

$0 \equiv y + z \ (mod\ 2)$ $\Rightarrow$ $y \equiv 2y + z \ (mod\ 2)$ $\Rightarrow$ $y \equiv z \ (mod\ 2)$

$0 \equiv x + z \ (mod\ 2)$ $\Rightarrow$ $z \equiv x + 2z \ (mod\ 2)$ $\Rightarrow$ $z \equiv x \ (mod\ 2)$

$0 \equiv x + y \ (mod\ 2)$ $\Rightarrow$ $x \equiv 2x + y \ (mod\ 2)$ $\Rightarrow$ $x \equiv y \ (mod\ 2)$

**まとめ問題２**

(4) (3)より、$y \equiv z \ (mod\ 2)$、$x \equiv z \ (mod\ 2)$、$x \equiv y \ (mod\ 2)$

である。ここで、$x$、$y$、$z$は0か1なので、$x \equiv y \ (mod\ 2)$より

$x = 1$ ならば $y = 1$である。同様にして考えると以下のようになる。

$x = 1$ ならば $y$、$z = 1$

$x = 0$ ならば $y$、$z = 0$

$\Rightarrow$ **２通り**

**したがって、階数は２**

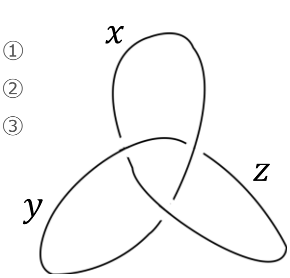
**まとめ問題２**

**三葉結び目(p=3)**

(1) $2x \equiv y + z \ (mod\ 3)$・・・①

$2y \equiv x + z \ (mod\ 3)$・・・②

$2z \equiv x + y \ (mod\ 3)$・・・③




**まとめ問題２**

(2)合同式の性質(4)より、$3x \equiv 0 \ (mod\ 3)$である。

同様にして、$3y \equiv 0 \ (mod\ 3)$、$3z \equiv 0 \ (mod\ 3)$である。

ここで、$2x \equiv y + z \ (mod\ 3)$ の両辺に$x$を加えると、

$3x \equiv x + y + z \ (mod\ 3)$ より $0 \equiv x + y + z \ (mod\ 3)$

である。

### まとめ問題２

(2)まとめると以下のようになる。

$2x \equiv y+z \ (mod\ 3)$ | $3x \equiv x+y+z \ (mod\ 3)$

$2y \equiv x+z \ (mod\ 3)$ | $3y \equiv x+y+z \ (mod\ 3)$ → $0 \equiv x+y+z \ (mod\ 3)$

$2z \equiv x+y \ (mod\ 3)$ | $3z \equiv x+y+z \ (mod\ 3)$

### まとめ問題２

(3) (2)より、$0 \equiv x+y+z \ (mod\ 3)$である。

このことと、$x, y, z$ は 0~2 の整数であるので、

$x+y+z$ が 0 か 3になるのは以下の場合である。

$(x, y, z)$

| | | |
|---|---|---|
| (0,0,0) | (1,1,1) | (2,2,2) |
| (0,1,2) | (1,0,2) | (2,0,1) |
| (0,2,1) | (1,2,0) | (2,1,0) |

→ **９通り**

**したがって、階数は９**

### 階数を求める上で注意する点

合同式を変形して、簡単な式を見つける。

それに、数字を代入して、当てはまる組み合わせを探す。

### まとめ問題２

結び目の階数を用いて、三葉結び目と８の字結び目が違うことを示しましょう。

### まとめ問題２

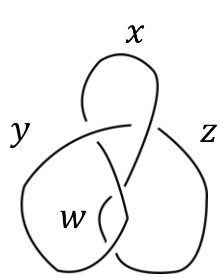
**８の字結び目(p=2)**

(1) $2x \equiv y+z \ (mod\ 2)$・・・①

$2y \equiv x+w \ (mod\ 2)$・・・②

$2z \equiv w+y \ (mod\ 2)$・・・③

$2w \equiv x+z \ (mod\ 2)$・・・④




### まとめ問題２

**８の字結び目（p=2）**

$2x \equiv y+z \ (mod\ 2)$ → $0 \equiv y+z \ (mod\ 2)$

$2y \equiv x+w \ (mod\ 2)$ → $0 \equiv x+w \ (mod\ 2)$

$2z \equiv w+y \ (mod\ 2)$ → $0 \equiv w+y \ (mod\ 2)$

$2w \equiv x+z \ (mod\ 2)$ → $0 \equiv x+z \ (mod\ 2)$

まとめ問題２

８の字結び目（p=2）

$0 \equiv y+z \ (mod\ 2)$ → $y \equiv 2y+z \ (mod\ 2)$ → $y \equiv z \ (mod\ 2)$

$0 \equiv x+w \ (mod\ 2)$ → $x \equiv 2x+w \ (mod\ 2)$ → $x \equiv w \ (mod\ 2)$

$0 \equiv w+y \ (mod\ 2)$ → $w \equiv 2w+y \ (mod\ 2)$ → $w \equiv y \ (mod\ 2)$

$0 \equiv x+z \ (mod\ 2)$ → $z \equiv x+2z \ (mod\ 2)$ → $z \equiv x \ (mod\ 2)$

まとめ問題２

８の字結び目（p=2）

| $(x, y, z, w)$ |
| --- |
| (0,0,0,0) |
| (1,1,1,1) |

→ ２通り

したがって、階数は２

まとめ問題２

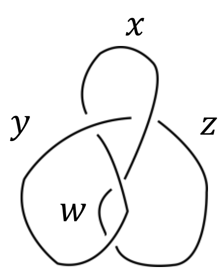
８の字結び目(p=3)

(1) $2x \equiv y+z \ (mod\ 3) \cdots ①$

$2y \equiv x+w \ (mod\ 3) \cdots ②$

$2z \equiv w+y \ (mod\ 3) \cdots ③$

$2w \equiv x+z \ (mod\ 3) \cdots ④$




まとめ問題２

８の字結び目（p=3）

$2x \equiv y+z \ (mod\ 3)$ → $3x \equiv y+z+x \ (mod\ 3)$ → $0 \equiv y+z+x \ (mod\ 3)$

$2y \equiv x+w \ (mod\ 3)$ → $3y \equiv x+w+y \ (mod\ 3)$ → $0 \equiv x+w+y \ (mod\ 3)$

$2z \equiv w+y \ (mod\ 3)$ → $3z \equiv w+y+z \ (mod\ 3)$ → $0 \equiv w+y+z \ (mod\ 3)$

$2w \equiv x+z \ (mod\ 3)$ → $3w \equiv x+z+w \ (mod\ 3)$ → $0 \equiv x+z+w \ (mod\ 3)$

まとめ問題２

| $(x, y, z, w)$ |
| --- |
| (0,0,0,0) |
| (1,1,1,1) |
| (2,2,2,2) |

→ ３通り

したがって、階数は３

まとめ問題２

これまでの結果から、階数についてまとめると以下のようになる。

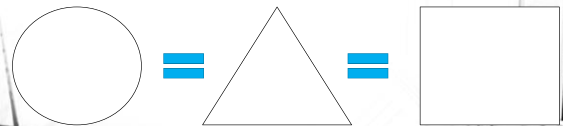
| | p=2 | p=3 |
| --- | --- | --- |
| 三葉結び目 | 2 | 9 |
| ８の字結び目 | 2 | 3 |

### まとめ問題２

p=3のとき、三葉結び目と８の字結び目の階数が違うので、２つの結び目が違うことがわかる。

### 1日目のまとめ

①トポロジーの世界では、三角形も四角形も円も同じ形と考えます。



### 1日目のまとめ

② ２つの図形（結び目）が同じ形であることを示すためには、実際に変形するだけでなくて、平面上で図式を変形して示すことができます。
その際には、R変形という変形を用います。

### 1日目のまとめ

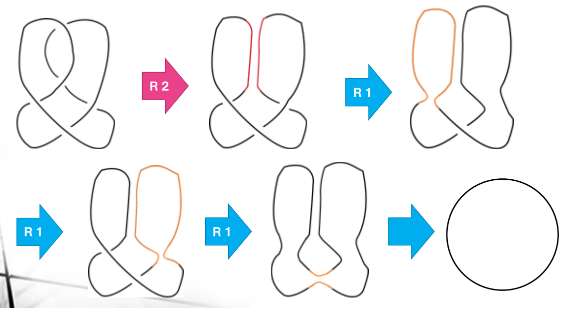
③ ２つの図形（結び目）が違う形であることを示すためには、「実際に変形できません」では示したことになりません。
不変量を活用して、それが違うことを示すことによってもとの結び目も違うことを示すことができます。

# 高校数学セミナー

岐阜大学大学院教育学研究科総合教科教育専攻

水口彰

## 練習問題（復習１）



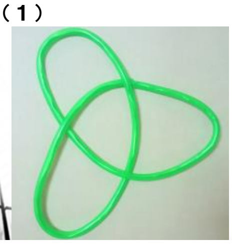

## 2日間のテーマ

- 空間図形の平面での把握
- 図形の分類

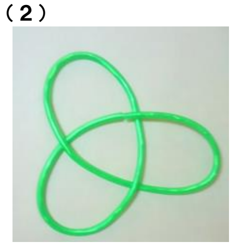
## 練習問題（復習２）

**次の2つの結び目が同じか違うかを考えましょう。**

（１）

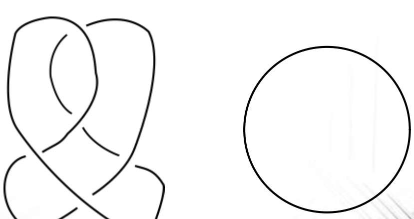


（２）



## 練習問題（復習１）

**以下の図を、R変形を使って同じ形にしましょう。**

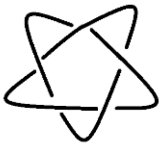


## 練習問題（復習２）

階数を求めると次のようになる。

| | p=2 | p=3 |
|---|---|---|
| （１） | 2 | 3 |
| （２） | 2 | 3 |

## ちなみに・・・



| p=2 | p=3 | p=2 | p=3 |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 3 |

## 不変量について(2)

例：三角形に対して、次のような量を考える。

「三角形の各角について、角の大きさが大きい順に（a,b,c）」


(80, 60, 40) ＝ (80, 60, 40)

## 練習問題（復習２）

①変形しても同じ形にはできない。

②階数は同じ。

同じか違うか分からない！

## 不変量について(2)

しかしながら、不変量は一致するが、図形としては重ならない以下のような場合が考えられる。


(80, 60, 40) ＝ (80, 60, 40)

## 不変量について

結び目を区別するために不変量を扱いましたが、実はこの不変量は完全な物ではないことがあります。

## 不変量について(3)

相似の例のように、不変量が同じでも違う図形は存在します。

復習問題のように、階数が同じになったからといって同じ結び目である、とはいえません。

不変量は、違うことを証明するときに使います。

**ではどうしましょうか？**

階数では区別できない・・・

別の不変量を考えましょう。

## 指数法則(1)

①$a^0 = 1$

②$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

①$a^m \times a^n = a^{m+n}$

②$a^m \div a^n = a^{m-n}$

③$(a^m)^n = a^{mn}$

④$(ab)^n = a^n b^n$

**中学校までは、指数には自然数しか入りませんでしたが、今回は実数の範囲で考えます。**

## 新たな結び目の不変量

新たな結び目の不変量として、ジョーンズ多項式という物を考えます。

ジョーンズ多項式を学ぶ前にも、少し準備をしていきます。

## 練習問題9-1

①$2^2 \times 2^2 = 2^{2+2} = 2^4 = 16$

②$3^{\frac{7}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{9}{3}} = 3^3 = 27$

③$6^{\frac{5}{2}} \div 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{4}{2}} = 6^2 = 36$

④$(5^4)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$

⑤$(3^5 \times 2^5)^{\frac{1}{5}} = 3 \times 2 = 6$

⑥$(2^4 \times 7^8)^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{2}} \div 2 = 2 \times 7^2 \times 7^{\frac{1}{2}} \div 2 = 1 \times 7 = 7$

## 多項式とは

高校までに習ったこと・・・

$2a+6$、$3c-5d$ のように単項式の和の形で表される式

階数では、具体的な数字が出てきたが、
ジョーンズ多項式では、文字を含んだ式が出ます。

## 練習問題9

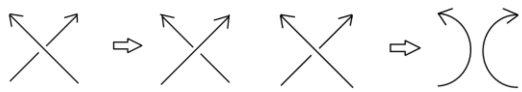
⑦$x^3 \times x^5 = x^{3+5} = x^8$

⑧$y^{\frac{8}{9}} \div y^{\frac{2}{9}} = y^{\frac{6}{9}} = y^{\frac{2}{3}}$

⑨$(t^2 \times 3^8)^{\frac{1}{4}} \times t^4 \div 3^3 = t^{\frac{1}{2}} \times 3^2 \times t^4 \div 3^3 = t^{\frac{9}{2}} \times 3^{-1}$
$= \frac{1}{3} t^{\frac{9}{2}}$

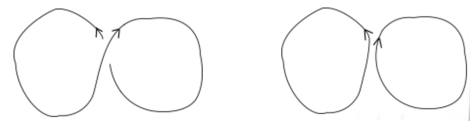
## 交差交換とスプライス

交差交換　　　　　　スプライス



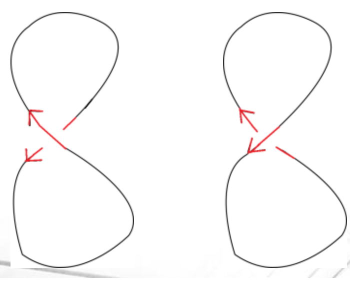
向きは変わらないことに注意

## スプライスの注意点



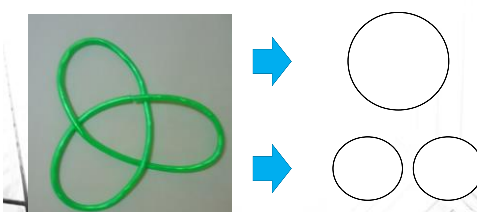
スプライスのやり方によっては結び目が２つに分かれることもある。
このような結び目が組み合わさった形を絡み目という。

## 交差交換の例

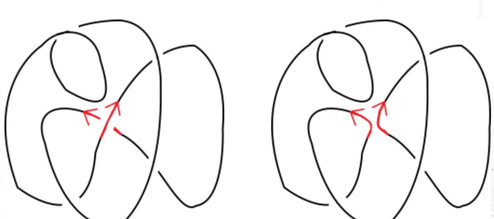


## 練習問題10

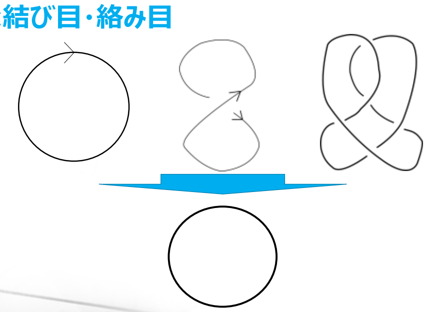
**次の結び目を図式にかきましょう。**
**その図式に交差交換、スプライスをして同じ形にしましょう。**



## スプライスの例



## 自明な結び目・絡み目

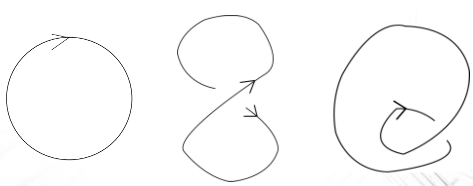


## ジョーンズ多項式

次のようにして定める「$V_L(t)$」を、
結び目$L$のジョーンズ多項式という。

## ジョーンズ多項式(1)

(1)自明な結び目0については、$V_O(t) = 1$である。



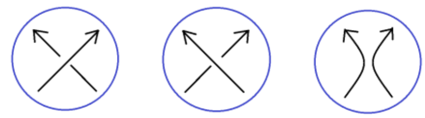
## ジョーンズ多項式(2-1)

(2)3つの結び目$L_+, L_-, L_0$について、それぞれの図式を
$D_{L_+}, D_{L_-}, D_{L_0}$とする。それぞれの図式は、ある１つの交点以外では全く同じであるとする。このとき、以下の式が成り立つ。

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}})V_{L_0}(t)$$

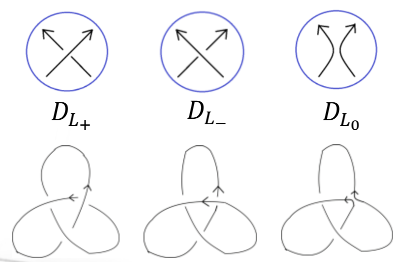
## ジョーンズ多項式(2-2)

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}})V_{L_0}(t)$$



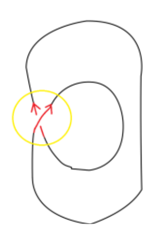
$D_{L_+}$　$D_{L_-}$　$D_{L_0}$

## 例えば・・・

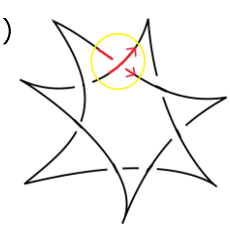



## 練習問題11
## 次の図式の指定された交点について、交差交換、スプライスをして$D_{L_+}, D_{L_-}, D_{L_0}$をつくりましょう。

(1)

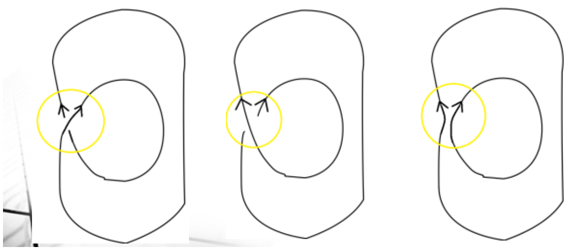


(2)

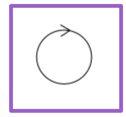


(1)

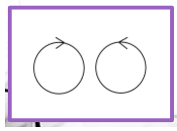
$D_{L_+}$ $D_{L_-}$ $D_{L_0}$



**例えば・・・**



$$V_{O_1}(t) = (-1)^{1-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})^{1-1}$$
$$= 1$$



$$V_{O_2}(t) = (-1)^{2-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})^{2-1}$$
$$= -(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})$$

(1)

$D_{L_+}$ $D_{L_-}$ $D_{L_0}$

## ジョーンズ多項式の計算法(1)

・下の式を変形して「$V_{L_+} =$ 」,「$V_{L_-} =$」の形に変形しましょう。

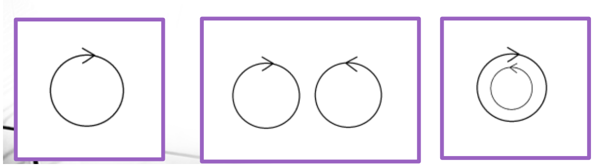
〇ただし、$t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}} = z$ とおいて考えましょう。

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}})V_{L_0}(t)$$

## ジョーンズ多項式の性質

$N$成分の自明な絡み目$O_N$について、以下の式が成り立ちます。

$$V_{O_N}(t) = (-1)^{N-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})^{N-1}$$



## ジョーンズ多項式の計算法(2)

〇$t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}} = z$ とおきます。

(1) $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = zV_{L_0}(t)$

$$t^{-1}V_{L_+}(t) = tV_{L_-}(t) + zV_{L_0}(t)$$

$$V_{L_+}(t) = t^2V_{L_-}(t) + ztV_{L_0}(t)$$

## ジョーンズ多項式の計算法(3)

○$t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}} = z$ とおきます。

(2) $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = zV_{L_0}(t)$

$$-tV_{L_-}(t) = -t^{-1}V_{L_+}(t) + zV_{L_0}(t)$$

$$V_{L_-}(t) = t^{-2}V_{L_+}(t) - zt^{-1}V_{L_0}(t)$$

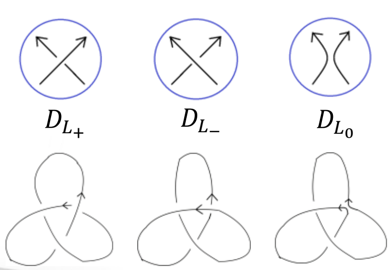
## ジョーンズ多項式の計算法(4)

$$V_{L_+}(t) = t^2V_{L_-}(t) + ztV_{L_0}(t)$$

$$V_{L_-}(t) = t^{-2}V_{L_+}(t) - zt^{-1}V_{L_0}(t)$$

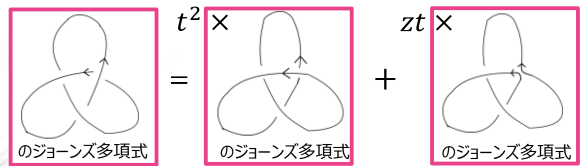
上の式を利用して、次のようにジョーンズ多項式を求められます。

## 例えば・・・



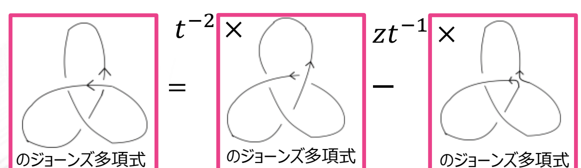

## ジョーンズ多項式の計算法(5-1)

$$V_{L_+}(t) = t^2V_{L_-}(t) + ztV_{L_0}(t)$$



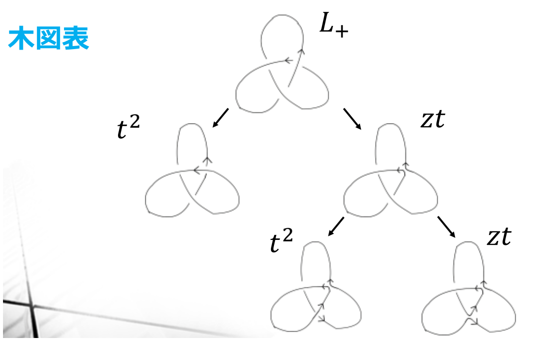

## ジョーンズ多項式の計算法(5-2)

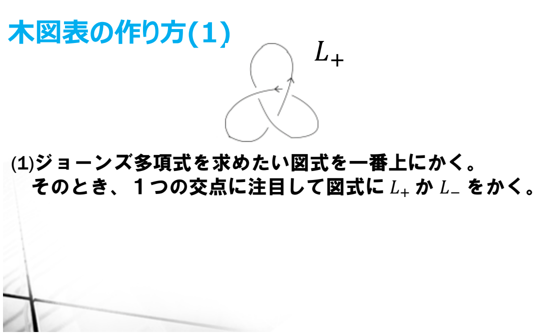
$$V_{L_-}(t) = t^{-2}V_{L_+}(t) - zt^{-1}V_{L_0}(t)$$

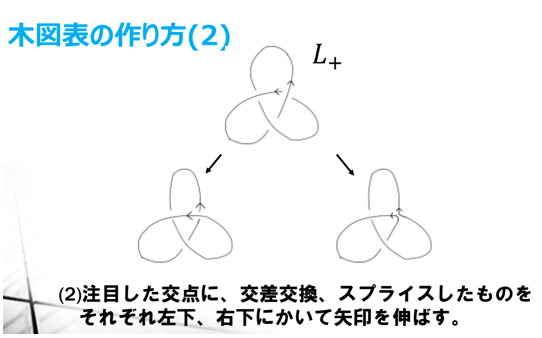


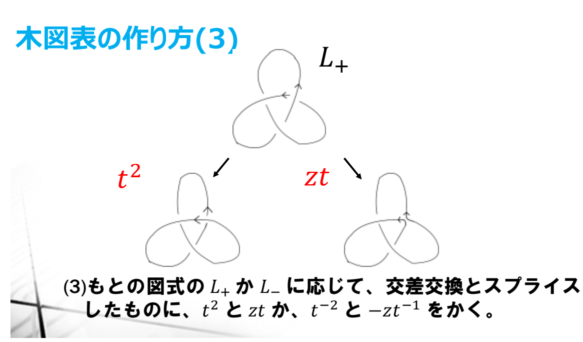

## 三葉結び目のジョーンズ多項式

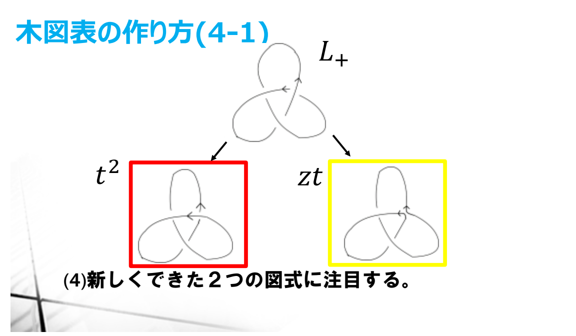
これから、指示に従って一緒に三葉結び目のジョーンズ多項式を求めてみましょう。とても難しいのでゆっくりと進めていきます。

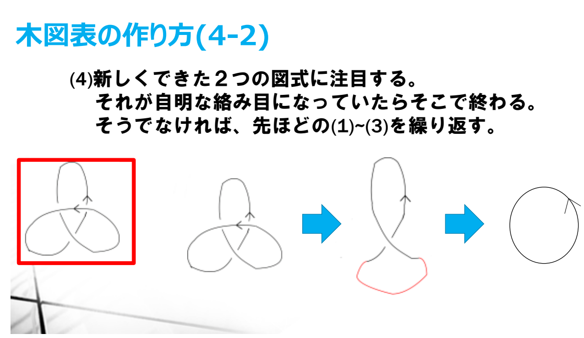

木図表
$L_+$
$t^2$
$zt$
$t^2$
$zt$

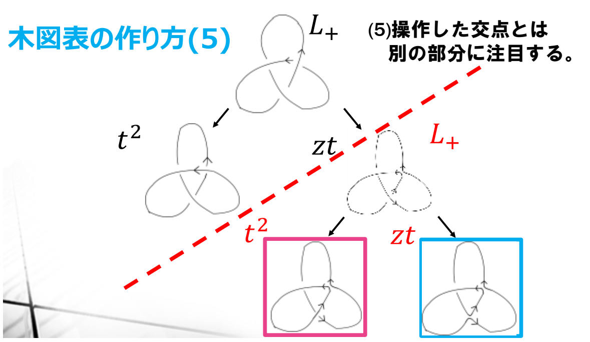

木図表の作り方(1)
$L_+$
(1)ジョーンズ多項式を求めたい図式を一番上にかく。
そのとき、１つの交点に注目して図式に $L_+$ か $L_-$ をかく。

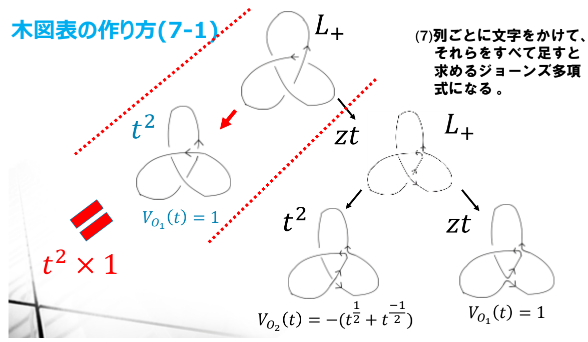

木図表の作り方(2)
$L_+$
(2)注目した交点に、交差交換、スプライスしたものを
それぞれ左下、右下にかいて矢印を伸ばす。

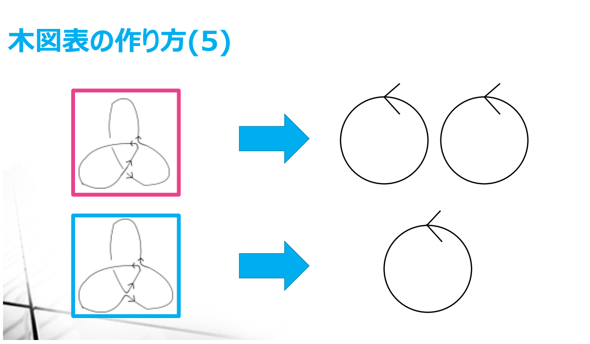

木図表の作り方(3)
$L_+$
$t^2$
$zt$
(3)もとの図式の $L_+$ か $L_-$ に応じて、交差交換とスプライス
したものに、$t^2$ と $zt$ か、$t^{-2}$ と $-zt^{-1}$ をかく。

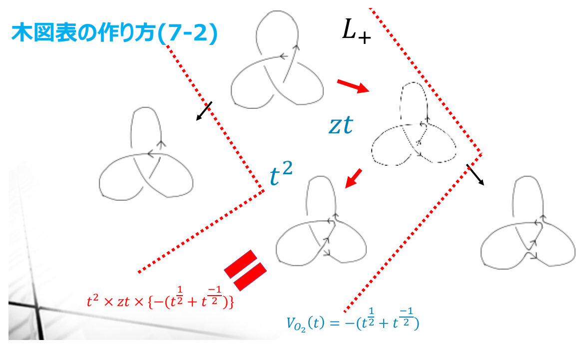

木図表の作り方(4-1)
$L_+$
$t^2$
$zt$
(4)新しくできた２つの図式に注目する。

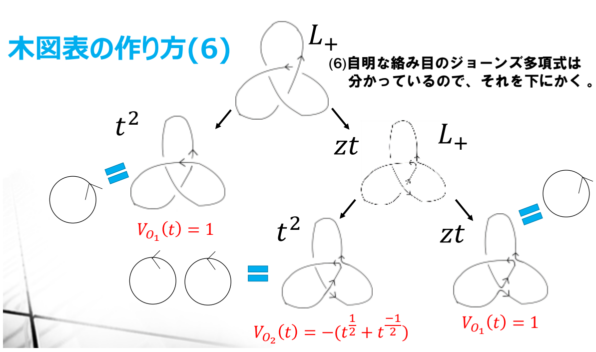

木図表の作り方(4-2)
(4)新しくできた２つの図式に注目する。
それが自明な絡み目になっていたらそこで終わる。
そうでなければ、先ほどの(1)~(3)を繰り返す。

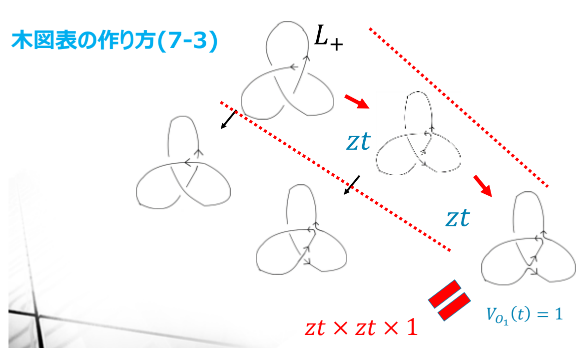

木図表の作り方(5)
$L_+$
(5)操作した交点とは
別の部分に注目する。
$t^2$
$zt$
$L_+$
$t^2$
$zt$


木図表の作り方(7-1)
$L_+$
(7)列ごとに文字をかけて、
それらをすべて足すと
求めるジョーンズ多項
式になる。
$t^2$
$zt$
$L_+$
$V_{O_1}(t) = 1$
$t^2 \times 1$
$t^2$
$zt$
$V_{O_2}(t) = -(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})$
$V_{O_1}(t) = 1$


木図表の作り方(5)

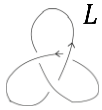

木図表の作り方(7-2)
$L_+$
$zt$
$t^2$
$t^2 \times zt \times \{-(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})\}$
$V_{O_2}(t) = -(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})$


木図表の作り方(6)
$L_+$
(6)自明な絡み目のジョーンズ多項式は
分かっているので、それを下にかく。
$t^2$
$zt$
$L_+$
$V_{O_1}(t) = 1$
$t^2$
$zt$
$V_{O_2}(t) = -(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})$
$V_{O_1}(t) = 1$


木図表の作り方(7-3)
$L_+$
$zt$
$zt$
$zt \times zt \times 1$
$V_{O_1}(t) = 1$

## 木図表の作り方(8)

$L$

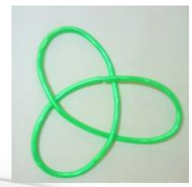


**この図式の結び目のジョーンズ多項式は･･･**

$$V_L(t) = t^2 \times 1 + t^2 \times zt \times \{-(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})\} + zt \times zt \times 1$$

## 問題(まとめ３-1)

**木図表の作り方を参考にして、下の結び目のジョーンズ多項式を求めましょう。**



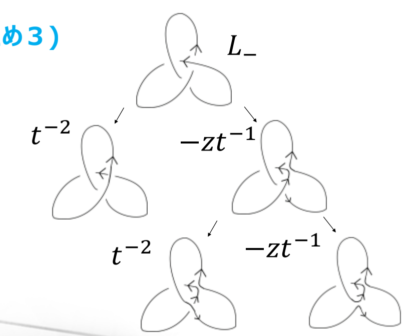
## 問題

**この式を計算して、文字にtだけが出てくるように簡単にしましょう。**

$$V_L(t) = t^2 \times 1 + t^2 \times zt \times \{-(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})\} + zt \times zt \times 1$$

○$t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}} = z$ とおいたことを忘れずに。

## 問題(まとめ３)




## 答え

$$V_L(t) = t^2 \times 1 + t^2 \times zt \times \{-(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}})\} + zt \times zt \times 1$$

$$= t^2 - zt^3(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}) + z^2t^2$$

$$= t^2 - t^3(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}})(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}})^2 t^2$$

$$= t^2 - t^3(t - t^{-1}) + t^2(t - 2 + t^{-1})$$

$$= t^2 - t^4 + t^2 + t^3 - 2t^2 + t$$

$$= -t^4 + t^3 + t$$

## 問題 (まとめ3)

$L$

**この図式の結び目のジョーンズ多項式は･･･**

$$V_L(t) = t^{-2} \times 1 + (-zt^{-1}) \times t^{-2} \times \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right) + (-zt^{-1}) \times (-zt^{-1}) \times 1$$

## 問題 (まとめ3)

$V_L(t)$

$= t^{-2} \times 1 + (-zt^{-1}) \times t^{-2} \times \{-\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right)\} + (-zt^{-1}) \times (-zt^{-1}) \times$

$= t^{-2} + zt^{-3}\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right) + z^2 t^{-2}$

$= t^{-2} + t^{-3}\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}}\right)\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right) + \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}}\right)^2 t^{-2}$

$= t^{-2} + t^{-3}(t - t^{-1}) + t^{-2}(t - 2 + t^{-1})$

$= t^{-2} + t^{-2} - t^{-4} + t^{-1} - 2t^{-2} + t^{-3}$

$= t^{-1} + t^{-3} + t^{-4}$

## 2日間のまとめ

今回のテーマは空間図形として結び目を扱いました。

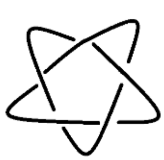
①図形の分類には様々な考え方がある。
②空間図形を平面におとして考えることで、わかりやすくできる。
③形を変形するだけでなく、不変量を利用して分類することも
　できる。

## 問題(まとめ３-2)

**これまでの結果から、三葉結び目と三葉結び目の鏡像が同じではないことを示しましょう。**

**ただし、「ジョーンズ多項式」という言葉を必ず使いましょう。**

**ちなみに・・・**



$t^2 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7$

$t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6$