

結び目の図式を題材とした小学生向けの教材開発と実践

古田佳奈¹, 田中利史²

小学生向けの教材として「結び目」を扱う。本論文では、結び目とその投影図をそれぞれ立体図形と平面図形と考え、立体から平面また平面から立体を考える、結び目を題材とした小学生向けの授業案及び授業実践について述べる。

<キーワード> 結び目, 図式, あやとり

1. 序文

平成 21 年度改定の小学校学習指導要領解説算数編 ([4]) において、教科の目標は次のように設定されている。

算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。

また、第 5 学年の「C 図形」において、立体図形を平面上に表現させたり、平面にかかれた図形から立体図形を想像させたりすることにより、空間図形について感覚を豊かにすることができるようにすることをねらいとする内容がある。

そこで、算数的活動を通して、児童にその楽しさを実感してもらうことを目標とし、平面図形と立体図形を比較したり、観察したりすることで児童に空間について考えるきっかけを与えることをねらいとする、結び目を題材とした小学生向けの教材開発を行った。

2. 教材について

本研究で日常生活の中の算数・数学に触れることで、児童が算数・数学への興味・関心を高め、算数が苦手だという児童がその面白さを感じることができるよう、算数教材の開発を行なった。

本研究で教材として扱う「結び目」とは、空間内でひもを絡めてその端同士をつなげることによりできる空間図形である。結び目を用いた小学生向けの教材研究においては、いくつかの先行研究がある。([1], [3], [5], [6]) そのなかで、「結び目を入れたプリンカップ」、
「絡めたホースやモール」などさまざまな道具を用いた授業実践が行われているが、本研究では児童たちの馴染みのある「あやとり」や「モール」を用いて、実際に児童が結び目を作る作業を取り入れた授業実践を行った。

本研究で題材としている「結び目」の投影図の分類の研究は、結び目理論 ([2]) の問題である。結び目理論は国内外で盛んに研究が行われている数学の最先端の研究分野である。

与えられた投影図を持つどのような結び目があるかを考えるとき、「場合の数」の考え方を用いる。また、結び目からその図式 (定義

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

2) を考えるときにひもの上下の状況をとらえる必要があるため、「図形」の内容を発展させた題材として考える。したがって、本題材は小学校算数における「場合の数」や「図形」の内容を活用・発展させたものとして位置づける。

小学生に対して、結び目を教材に応用した先行事例は少ない。本研究では、結び目理論の考え方をういて結び目の投影図を調べる小学生向けの数学教材を開発をし、岐阜県内の小学生に対し授業実践を行なっている。

3. 結び目とその図式について

<定義1>

ひものを絡めて、端同士をつなぎ合わせてできるもの(図1)を結び目という。結び目の投影図において(ひもの影が)交差している点をその交点という。

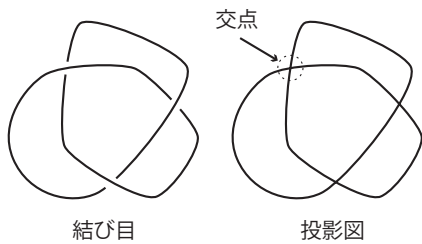


図1

<定義2>

影が重なっている部分が交点のみの結び目の投影図を正則な投影図という。正則な投影図において、各交点に上下の情報を入れたもの(図2)を結び目の図式という。(図1の左図)

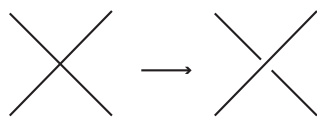


図2

<定理1>

与えられた交点が n 個の正則な結び目の投影図を持つ図式は 2^n 個である。

(証明) 投影図の各交点で2通りの上下の選び方があるため、 2^n 個の図式が構成できる。(図3参照)

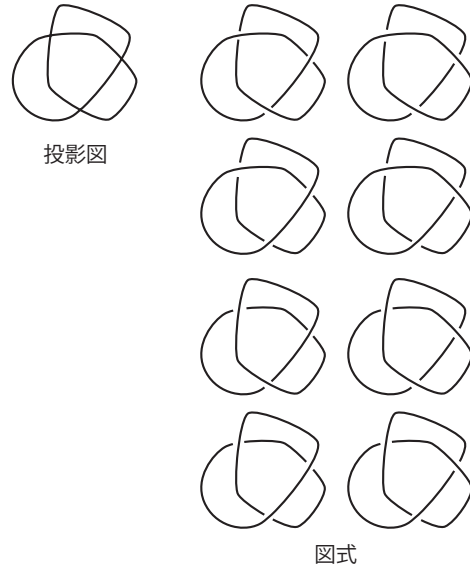


図3

注意. 図3の結び目の中で左上と右下以外は変形することで(平面上の)「輪」となることが分かる。

4. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業の教材は、結び目である。それらを題材として扱う理由を以下に示す。

1. 生徒にとって身近であり、また分かりやすい概念である。
2. それまで扱ったことのない図形であり、生徒の興味関心を得ることができる。
3. 研究されている内容が豊富にあり、関連してさまざまな課題を与えることができる。

(2) 授業のねらい

本授業のねらいを以下のようにした。

- (a) ひもを使ってできる結び目を紙面（平面）に正しく描くことができる。
- (b) 紙面（平面）上にある結び目の投影図をモール（立体）で表し、作った図形を動かしたり変形したりすることで、輪になるものとならないものがあることに気付く。

(3) 授業の構成

ここで授業案の流れを説明する。始めに次の課題を提示する。

課題 ひもで表された図形について調べよう。

導入としてスライドを用いてあやとりを見せ、本授業ではあやとりで作った図形を紙面に図で描き表すという活動をすることを説明をする。

図を描くときに重なっている所では上のひもはそのまま描き、下のひもは切り離して隠れて見えるように描くと約束する。(図4) 例として授業者が2つの交点を持つあやとりとその図を提示し、描き方の約束を説明する。(図5)

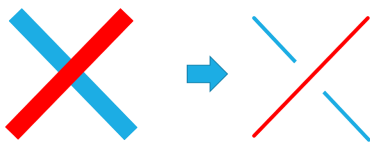


図4

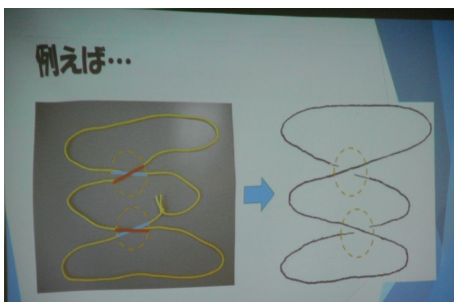


図5

まず練習として、児童が3つの交点を持つあやとりを描く活動をする。

問題1 あやとりで作った図形(図6)を紙にかいてみよう!

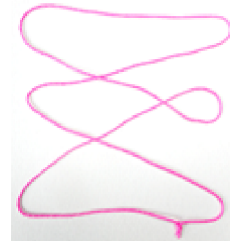


図6

児童たちにあやとりのひもを1人1つずつ配り、スライドで作り方を説明しながら図形を作らせる。作った図形を見ながら児童は紙に描く。このときに、授業者が図の描き方は1つではないということを注意し、早く描けた児童がいた場合、他にどのような描き方があるのかを考えさせる。

次に、交点数を増やした次の7つの交点を持つあやとりを描く活動をする。

問題2 あやとりで作った図形を紙にかいてみよう!(東京タワー, 図7)

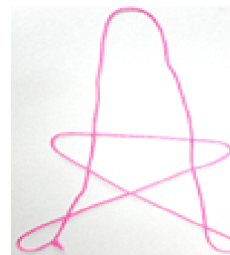


図7

「東京タワー」という名前がついているあやとりであることを言い、実際にあやとりの技を用いて、スライドで実物の操作を提示しながら作り方を説明する。作成したときにひ

もがぶつかり合うため、ひも同士の重なり方がわかりづらい。そこで、重なっている部分の間隔を空けて余裕のある形にし、ひもの重なり方が見やすくなるよう指導する。

問題3 次の図（図8）の※に、ひもの重なりをつけてモールで表してみよう。

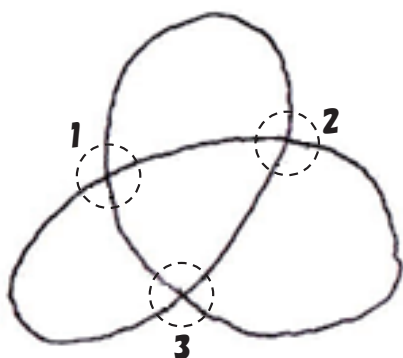


図8

問題1と問題2ではあやとりで作られた図形を紙に描く活動を行う。一方で問題3では、平面に描かれた結び目の投影図をもとに、結び目を作る活動をする。はじめにひもの重なり方が描かれていない交点が3個の投影図を児童に見せ、児童が各自でひもの交点に上下を与えプリントに描いた後、モールを用いて実際にそれぞれの結び目を作る。その後、モールで作った図形を動かしたり変形したりし、自分が考えた図と他の人が考えた図を比較したりして、気付いたこと・わかったこと・考えたことをプリントに書き出す。ここで、モールで結び目を作成する際は、モールの端同士をあらかじめ配布したシールでつなぐとする。

授業の最後に今回扱ったものは「結び目」という図形であることを紹介する。あやとり以外に靴ひもやマフラー、ヘアアレンジなど日常生活の中にも結び目がたくさん存在することを説明し、算数・数学が身近なものであると実感させる。以上が授業の概要である。

5. 実践と結果

実践内容

講座名：わくわく算数アドベンチャー

日程：平成28年7月9日(土)

場所：大垣市スイトピアセンター7階 会議室

対象：大垣市内の小学生5・6年生 60名

指導補助：岐阜大学・教育学部3年生及び教育学研究科大学院生

実践の流れ

(1) スライドを使いながら授業の概要を説明した。

(2) 結び目の図を描くときに上のひもはそのまま描き、下のひもは切り離して隠れて見えるように描くという約束をした。

(3) 本時の課題を提示した。

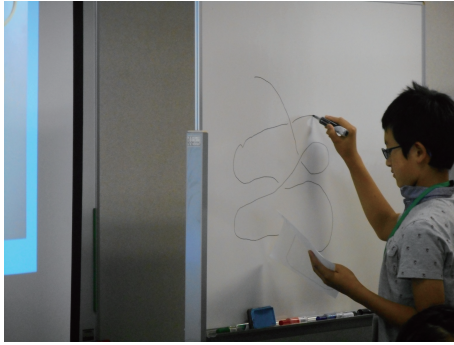
ひもで表された図形について調べよう

(4) 各問題に入る前にあやとりのひもと問題用のプリントを配布した。

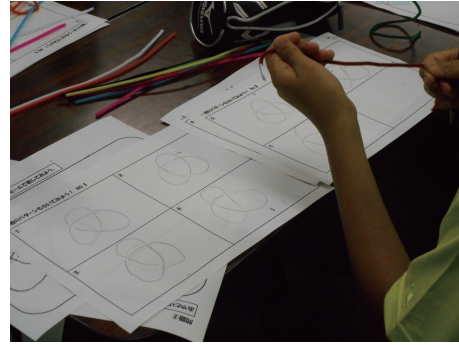
(5) 問題1と問題2に関してスライドでひものどの部分をとるのか見せながら全員一斉にあやとりをし、完成した図形を紙面に描いた。



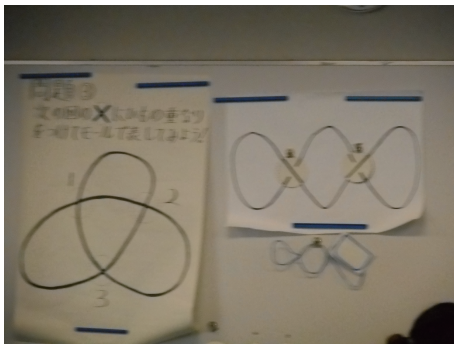
発表した児童は、ある1点からスタートし、ひもをたどりながら交点の上下の情報を描きスタートした点に戻るといった描き方をしていた。



- ・ 問題3に入る前にどのようなことをするのかを例を挙げて説明をした。
- ・ 説明が終わった後にモールと、モールの端をつなげるためのシールを配布した。



- ・ 作った図形を動かしたり、自分が考えた図と他の人が考えた図と比較したりしながら考察を行っていた。
- ・ 図形を動かして輪になる図がある、輪にならない図にはどのような特徴があるのかという意見が出た。



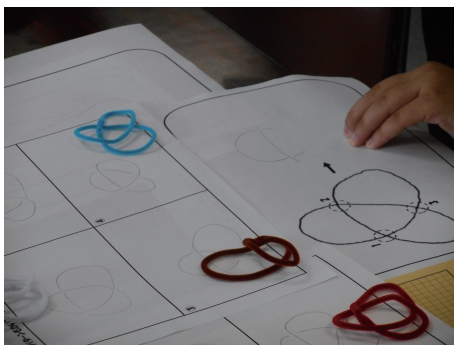
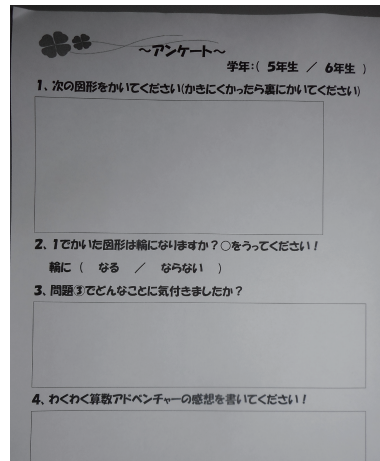
(6) 今回扱ったものが「結び目」と呼ばれるものであることを言い、日常生活の中に結び目があることを紹介した。

(7) 最後にアンケートを実施した。

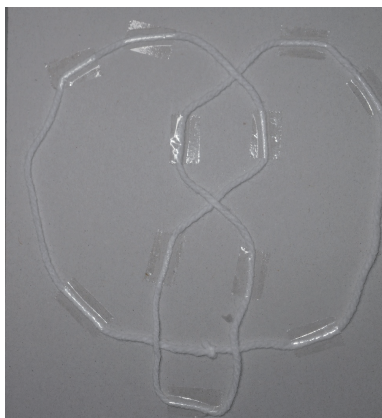
アンケート結果

授業後に実施したアンケートは以下の通りである。(添付資料参照)

- ・ 問題3の図ではひもの上下の付け方は全部で8通りであるが、8通り以上あるとした児童がいた。全部で8通りになることを全体で言い、それより多かった場合はグループで確認してもらうようにした。
- ・ ひもの上下の付け方は全部で8通りであることを説明できていた児童がいた。



- ・ 質問1に関して、次の写真のような毛糸で作った図形を各テーブルに3つずつ配布し、実際に図を描いてもらった。
- ・ この図形は、ずれないようにセロハンテープで固定した。



アンケートの結果は以下の通りである。質問1と質問2の「学年不明」はアンケートの一番上にある学年の欄に記入がなかったものを指している。

質問1

次の図をかいてください。

	5年生	6年生	学年不明
正しく描けた	27人	23人	3人
1か所間違い	1人	1人	1人

質問2

1でかいた図は輪になりますか？

1が正しい	5年生	6年生	学年不明
輪になる	21人	23人	3人
輪にならない	6人	0人	0人

質問3

問題3でどんなことに気が付きましたか？

(5年生)

- ・輪になるものとならないものがある。
- ・上下上, 下上下とモールが重なっている図形は輪にならない。
- ・回すと同じ図形になるものがある。
- ・裏返すと同じものが見つかる。
- ・ひもの重なり方が1と2で4種類, 3で2種類だから $4 \times 2 = 8$ 種類できる。
- ・裏返してみるとモールの重なりも反対にな

る。

- ・xが3つのときは8個作ることができる。
- (6年生)
- ・ほどくと輪になる。
 - ・輪になるものとならないものがある。
 - ・上下上, 下上下になっていると輪にならない。
 - ・ひっくり返したり向きを変えたりと見方を変えると同じ形になるものがある。
 - ・交互じゃなければ輪になる。
 - ・回転させても輪になる。
 - ・交わり方で輪になるかならないかがわかる。

質問4

感想を書いてください。

(5年生)

- ・来年(次回)も参加したい。またやりたい。
- ・モールやあやとりを使って算数の興味を深められた。
- ・図形の特徴がわかった。
- ・初めて知ったことがいろいろあった。
- ・いろんな意見を出し合って楽しかった。
- ・結び目を知って生活でも結び目を見つけてみたい。
- ・見た目では輪にならないと思っても、実際には輪にならないものがあった面白かった。

(6年生)

- ・楽しかった。
- ・次回も参加したい。
- ・とても楽しく算数を学べた。
- ・普段, 学校でやらない課題で面白かった。
- ・難しいけど面白い。
- ・日常でよく見かけるものが数学と関わっていることに驚いた。
- ・日常の数学を調べてみたい。
- ・算数は式や図形をかいたりするだけであまり好きではなかったけど楽しかった。

6. 考察

(1) ねらいの達成度について

ねらい (a) について

アンケートの質問 1 より約 95 % の児童が与えられた図形を正しく描くことができていた。間違えてしまっている場合も 1 か所のみ児童が 3 人であった。授業の様子を見た限りではほとんどの児童が正しく描くことができていた。また、問題 2 でひもの重なりが増えてもスムーズに描けていた児童がほとんどであった。よって、ねらい (a) は達成できたと考えられる。

ねらい (b) について

アンケートの質問 (3) について白紙で提出したり見間違いなことをかいていたりしていた児童はおらず、ひもの上下の付け方によって輪になるものとならないものがあるということに約 86 % の児童が気付いていた。また、どのような図が輪にならないのかということまで気付いている児童が約 45 % もいた。よって、ねらい (b) は達成できたと考えられる。しかし、質問 (2) を見てみると 6 年生は全員輪になると判断できていたが、5 年生は輪にならないと判断した児童がいた。輪にならないと答えた児童の中で問題 3 での考察で上下上、下上下となっている図は輪にならないということに気付いた児童は 2 人しかいなかった。5 年生にとっては難しいことであり、しっかりと時間をとって説明をする必要があると考えられる。

(2) アンケート結果の分析・考察

授業では児童たちが楽しそうに取り組んでいる姿が印象的だった。実際に、アンケートの質問 4 では楽しかった、面白かった、次回も参加したいという感想が多かった。また、算数はあまり好きではないけど楽しかったと答えた児童がいた。日常生活の中にも数学があるということを知って、算数・数学に興味を持つきっかけを与えることができたのではな

いかと考える。

一方、授業における時間配分について課題が挙げられる。児童が考えたことを全体で交流する時間が少なかった。原因としてあやとりの説明の仕方に手間取ったことがあげられる。今回の授業では、ひものどの部分をとればいいのかをスライドで写真を見せながら行ったが、想定していたよりも時間がかかってしまった。児童にとってよりわかりやすく見やすい方法を考える必要があると考えられる。また、問題 3 でモールで図形を作る際に、児童はモール同士がぶつかった状態の結び目を作っていた。結び目はひも同士は重なっていない空間図形である。モール同士がぶつからないように作ることを指導・助言する必要があると考えられる。

7. 本研究のまとめと課題

(1) 本研究のまとめ

本研究では結び目の投影図を用いた教材開発及び、小学校 5・6 年生を対象としてあやとりやモールを用いた授業実践をしている。結び目理論を用いた授業実践はいくつかされているが、特にあやとりを教材として取り入れた授業実践はほとんどされていない。あやとりは子どもの遊びであり、興味を持って取り組んでもらえるのではないかと考え、教材として用いた。実際、授業の様子を見てみると楽しそうに取り組んでいた。児童はいくつかの班に分かれて活動を行なった。最初は補助に入った大学生としか話をしていなかった児童も、徐々に班の中で児童同士で相談をするようになっていた。アンケートの感想を見ても楽しかった・面白かったという意見が多く、算数・数学が身近にあることを知ってもらい興味・関心を持ってもらえたのではないかと考える。

(2) 今後の課題

教材開発では、今回の実践で明らかになった（6節で述べた）課題を解決していく必要がある。また今後も小学生を対象とし、結び目を用いて空間認識の力をより高めるような教材を研究していきたいと考える。

8. 添付資料

本論文に、授業で使用したワークシートおよびアンケートを添付する。

9. 謝辞

本実践は、大垣市教育委員会の主催の「わくわく算数アドベンチャー」の一環として行なっている。実践及びその準備でお世話になった実行委員会の関係者の方々、岐阜大学の山田雅博教授、指導補助をしていただいた岐阜大学教育学部学部生及び大学院生の方々に感謝する。

10. 参考文献

- [1] 柳本朋子他2名, 「結び目の数学」の教育について—小学生を対象として—, 大阪教育大学紀要第V部門第54巻第1号, 81-96, 2005年.
- [2] 河内明夫著, レクチャー結び目理論, 共立出版株式会社, 2007年.
- [3] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」への導入—小学生・中学生・高校生を対象として—, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動 研究報告書第2号, 2007年.
- [4] 文部科学省, 『小学校学習指導要領解説算数編』, 株式会社東洋館出版社, 2008年.
- [5] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」への導入—小学生・中学生・高校生を対象として—, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動 研究報告書第3号, 2009年.
- [6] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」への導入—小学生・中学生・高校生を対象として—, 研究報告書第4号, 2014年.

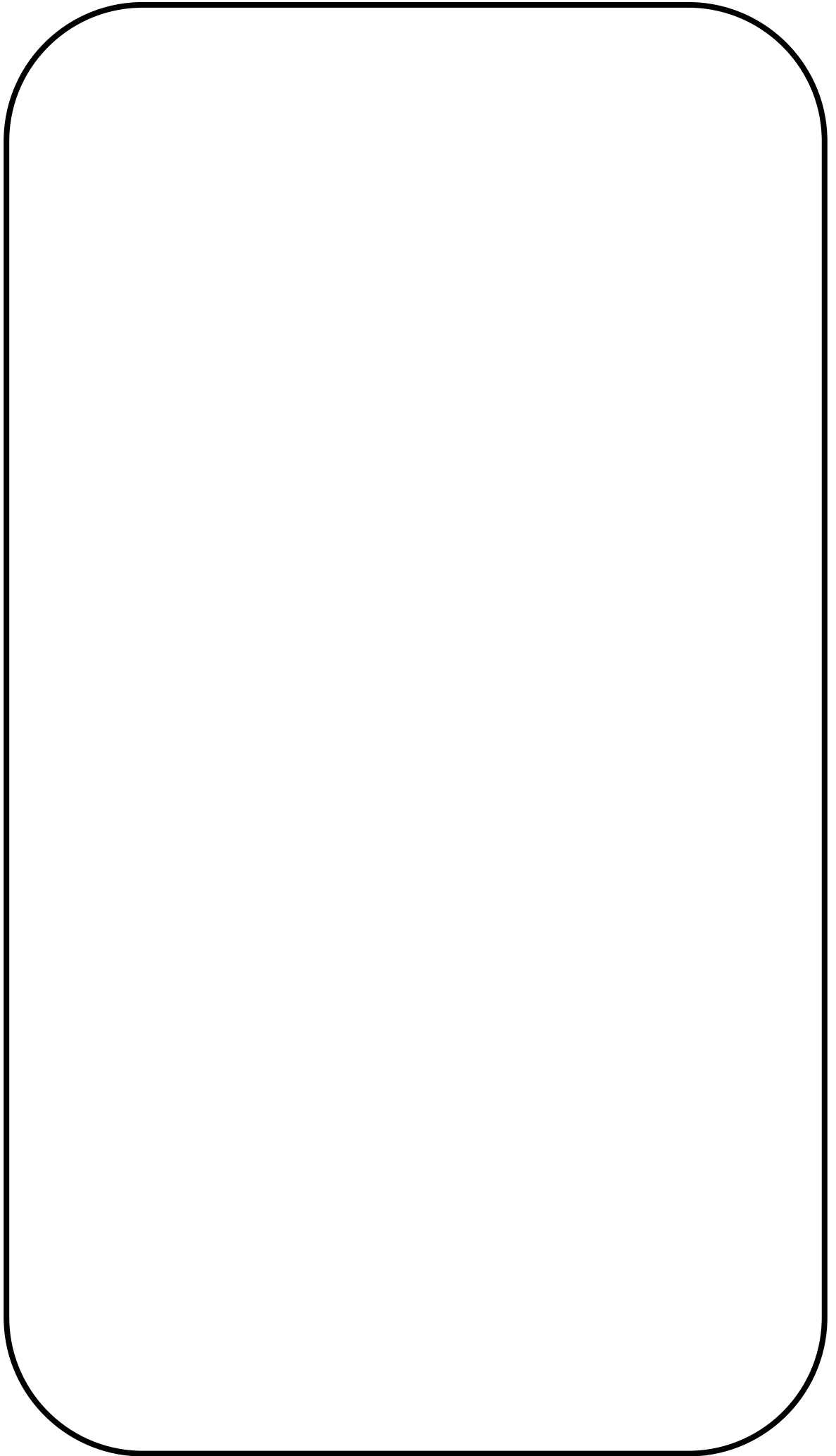
問題①

あやといで作った図形を紙にかいてみよう。

A large, empty rounded rectangular box with a thick black border, intended for drawing the shape described in the problem.

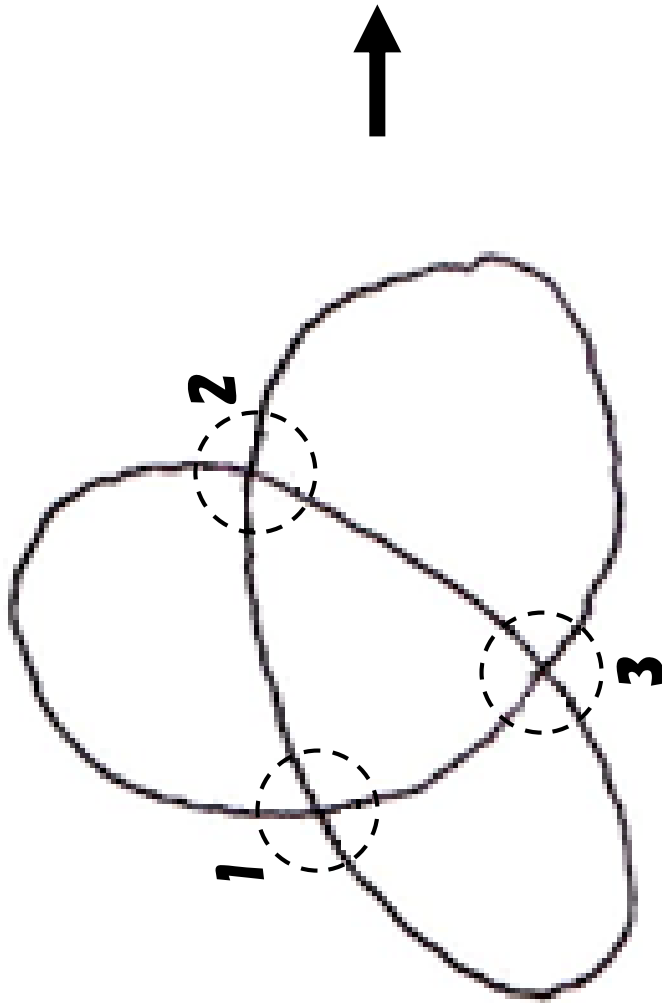
問題 2

あやといで作った図形(東京タワー)を紙にかいてみよう。



問題 3

下の図の (X) にひもの重なりをつけて、モールドで表してみよう。



☆他のパターンもかいてみよう！ NO.1

<p>②</p>	
<p>①</p>	<p>③</p>

④

☆他のパターンもかいてみよう！ No.2

<p>⑤</p>	<p>⑥</p>
<p>⑦</p>	<p>⑧</p>

☆他のパターンもかいてみよう！ No.3

<p>⑩</p>	
<p>⑨</p>	<p>⑪</p>

☆モールドで作った図形を動かしたい、他の人が作った図形と自分が作った図形を比べたいして、
気付いたことや考えたことを書き出してみよう！

A large, empty rounded rectangular box with a black border, intended for students to write their observations and thoughts.



～アンケート～

学年:(5年生 / 6年生)

1、次の図形をかいてください(かきにくかったら裏にかいてください)

2、1でかいた図形は輪にありますか?○をうってください!

輪に (なる / ならない)

3、問題③でどんなことに気付きましたか?

4、わくわく算数アドベンチャーの感想を書いてください!

ご協力ありがとうございました!

