岐阜数学教育研究
2016，Vol. 15，102 - 135

地図の塗り分け問題を題材とした高校生向けの教材開発と実践

島川真彰[1]，田中利史[2]

高校生向けの教材として「地図の四色問題」を扱う。地図は隣同士の領域を異なる色で彩色することができる。その際に用いる色の数の最小数を彩色数という。本論文では，岐阜県の地図の彩色数を考える高校生向けの授業案及び実践授業について述べる。
＜キーワード＞　グラフ，彩色，四色問題

1. 序文

平成 21 年度改定の高等学校学習指導要領数学編（[5]）において，数学科の目標は次のように設定されている。

数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理･法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

また，図形領域において「図形に対する直観力・洞察力を養い, 図形の性質を論理的に考察し表現する能力を育成する」と書かれている。

　そこで，事象を数学的に考察し表現する能力を高めること及び，数学的論拠に基づいて判断する態度を育てることを目標とし，また，具体的な図形を抽象化し，その幾何学的な性質を考察できることをねらいとした，四色問題を題材とした高校生向けの教材開発を行った。本論文では，その教材の概要とそれを用いた授業実践について述べる。

2. 題材について

本研究で題材としている『四色問題』（[3]）とは,『隣接する領域が異なる色になるように地図を塗り分けるとき，最低何色必要か？』という問題である。地図の塗り分けに必要な色の数の最小数を求める際に「場合の数」の考え方を用いたり,「面」や「境界線」の考え方を用いるため「図形領域」の内容を発展させたものとしてとらえることができる。そのため，本題材は高校数学における「場合の数」や「図形領域」の内容を活用・発展させたものとして位置づける。

地図はグラフを用いて表現することができるため，地図の塗り分けはグラフ理論（[1], [2], [4]）の問題としてとらえることができる。グラフ理論は国内外において盛んに研究されている最先端の数学の分野である。教材への応用は，2014 年に [6] で取り上げられているが，地図の塗り分け問題を教材に応用した先行事例は少ない。本研究でも [6] と同様にグラフの考え方や性質を用いて，地図の塗り分けに必要な色の最小数を調べる高校生向けの数学教材を開発をしている。[6] では大学 3, 4 年生を対象として授業実践を行っているが，本研究では岐阜県内の中学生及び高校生に対し授業実践を行った。授業内容に関する [6] との違いの概要については８節で述べる。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

3. グラフについて

＜定義 1＞
いくつかのボールをヒモでつなぎ合わせてできるもの（図 1）を**グラフ**という。また，ボールを**頂点**，ヒモを**辺**という。

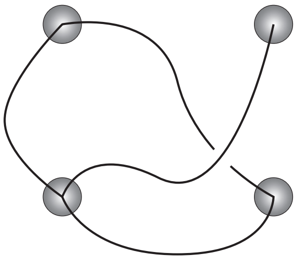


図 1

＜定義 2＞
グラフについて頂点同士のつながり方は変えずに頂点の位置だけを移動させる。このときできたグラフと，もとのグラフは**同型なグラフ**であるという。

＜定義 3＞
平面を何本かの線分の端をつないで，いくつかの部分に区切ったものを**地図**という。また，地図上で区切られた部分を**面**といい，面を区切る線を**境界線**という。

- 任意の線分の両端は，他のいずれかの線分とつながっているものとする。また，任意の線分同士は，端以外の部分を共有しないものとする。
- 線分の両側は，異なる部分とする。

＜定義 4＞
地図の塗り分けに関するルール

- 【ルール 1】どの隣り合う 2 面も同じ色にならないように色を付ける。ただし，いくつかの点のみで接している面は隣り合うとは考えない。
- 【ルール 2】使う色はできる限り少なくなるようにする。
- 【ルール 3】飛び地は無いものとする。
- 【ルール 4】一番外側の面は色をつけない。

地図の塗り分けに関するルールにしたがって地図を塗ったとき，使った色の数を，地図の**彩色数**という。

＜定義 5＞
地図に対して，次のような操作を考える。

- 【STEP 1】地図の各面に 1 つずつ頂点を描く。(ただし，一番外側の面を除く。)
- 【STEP 2】2 つの面が隣り合っているならば，それらの面上に描いた頂点同士を辺でつなぐ。このとき，2 面の境界線と辺が 1 点で交わるようにし辺同士は交わらないようにする。ただし，いくつかの点のみで接している面は隣り合うとは考えない。

このようにしてできたグラフを**路線グラフ**という（図 2）。

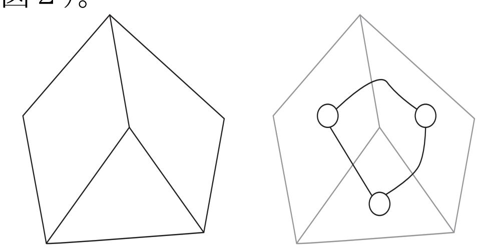


図 2

- 辺でつながっているどの 2 頂点も同じ色にならないように路線グラフの頂点

に色を付けることを，路線グラフを**彩色する**という。

- n 色使えば彩色できるが $(n-1)$ 色では彩色できないとき，路線グラフの**彩色数**は n であるという。

＜定理 1 ＞
与えられた地図の彩色数は，その地図の路線グラフの彩色数と等しい。
（証明）
路線グラフの彩色数を n とする。このとき，n 色で塗り分けられた路線グラフの各頂点の色を，頂点がある面の色として採用すれば地図の彩色数は n 以下である。逆に地図の彩色数が n のとき，n 色で塗られた地図の各面には路線グラフの頂点がただ一つ存在するため，その面の色をその頂点に採用することで，路線グラフの彩色数が n 以下であることがわかる。

＜定理 2 ＞ [2]
地図の彩色数が 2 である $\Leftrightarrow$ 地図の境界線が一筆書き可能である。
ここで，一筆書きとは，（いくつかの点で交差する）曲線上の出発点から曲線上を同じ場所を通らずに進み，出発点に戻ることである。ただし，同じ交差点を何度通ってもよいとする。

4. 授業の概要

(1) 教材について
本論文で紹介する授業の教材は，地図の塗り分け問題である。それらを題材として扱う理由を以下に示す。

1. 生徒にとって身近であり，また分かりやすい概念である。
2. それまで扱ったことのない図形であるグラフと関連があり，生徒の興味関心を得ることができる。
3. 高校で扱う内容と関連づけができる。
4. 歴史的内容が豊富であるため，関連してさまざまな課題を与えることができる。

(2) 授業のねらい
本授業のねらいを以下のようにした。

(a) グラフ理論の考え方をもとに地図から路線グラフを描くことができる。

(b) 地図を塗り分ける活動を通して路線グラフの形に着目し，彩色数について考察することができる。

(c) 任意の地図の彩色数は 4 以下であることを本時の活動や数学史的な話題からとらえることができる。

(3) 授業の構成
ここで授業案の流れを説明する。授業は二日間の構成で行うとする。

授業の構成 (1 日目)
1. 具体的な場面を取り上げ，グラフ理論に関する簡単な導入を行う。

問題 1 A, B, C, D の 4 人が，ある 1 対 1 のゲームを行う。ゲームを行う組み合わせは以下のものとする。
A は，B, C, D とゲームを行う。
B は，A, D とゲームを行う。
C は，A, D とゲームを行う。
D は，A, B, C とゲームを行う。
それぞれの人を「ボール」で表し，ある 2 人が対戦する場合，その 2 人を表すボールを「ヒモ」でつなげることで，ゲームを行う組み合わせを表現しよう。

「ボール」として発泡スチロールのボールを，「ヒモ」としてモールを用意する。また，ボールに A, B, C, D の文字を書き込むことでボールの区別をさせる。ヒモが交差する部分は，その上下関係を無視するように指導を行

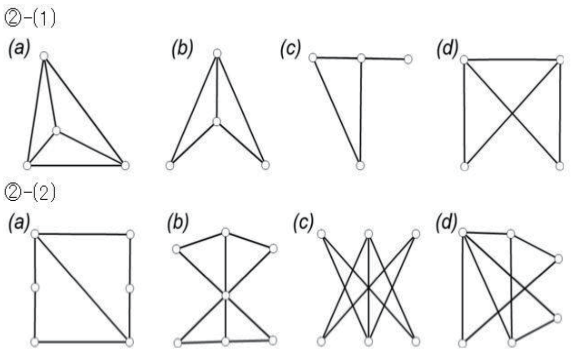
う。このときできたグラフの形を生徒同士で見比べることで生徒によってグラフの形が異なってることがわかる。ここで，各々のグラフについて頂点と辺のつながり方はすべて同じであることを確認し，本授業で扱うグラフは各ボール同士のつながり方に着目することが重要であるため，ボール同士の位置関係や，ひもの長さや形は考慮しないことをおさえる。

2．グラフ理論における諸定義の導入を行う。

まず，定義 1（グラフの定義）を導入する。グラフを紙に描くときの約束として，ボール（頂点）を小円，ヒモ（辺）を線で描くことで，グラフを表現するものとすることと，辺が交差する部分を紙に描く際は，上下関係を無視して，重ねて書くようにすることを指導する。特に，線（辺）同士が途中で交わる部分と頂点を混同しないような指導をする。

次に，定義 2（同型なグラフの定義）を導入する。問題 1 で作ったグラフや，スライドを用いて具体的な例を元に同型なグラフの定義の説明を行い，問題演習を通して理解の定着を図る。

問題 2 同型な *2* つのグラフは，次のうちどれか。



演習を行う際に，同型なグラフの定義を生徒が理解しやすいように，必要に応じてグラフの図をもとにボールとヒモを用いて実際にグラフをつくり，頂点の位置を動かす操作を行うことで，2 つのグラフが同型であるかどうかを調べさせる。また，この操作の際に，ボールについたヒモを一時的に外すことがある。ヒモを外したときは必ず元のボールに付け直すことに注意させる。各頂点にそれぞれ文字をつけ，頂点同士の対応を考えることで，どの頂点を移動させたかを考えさせる。また，頂点と辺の数を比べたり，各頂点ごとにいくつ辺がつながっているかを比べたりすることで，二つのグラフが「同型でない」ことが分かる場合があることを紹介する。

3．本時の課題をもとに，路線グラフとその彩色数の定義を理解する。

ここで岐阜県の白地図を提示し，授業の課題を確認する。地図の塗り分けに関する数学的な背景として，数学 A「ド・モルガンの法則」で既習の数学者がこの問題にかかわっていることを説明する。

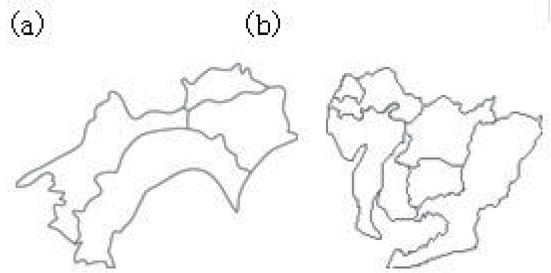
課題　岐阜県の地図は，最低何色で塗り分け可能か。

定義 3（地図の定義）を導入する。生徒にとって文章が複雑で，理解が難しい点が出てくると予想できるため，白地図を用いて，面を国や都道府県や市町村と見ることで，身近なもので地図についての定義をとらえることができるようにする。

次に，定義 4（地図の塗り分けに関するルール）および定義 5（地図の彩色数の定義）を導入する。このとき，地図の塗り分けの問題は実在する地図だけでなく，任意の地図に関して考えるものであることを押さえる。一方で,「地図の塗り分けに関するルール」における「一番外側の面」は，地図における無限領域のことであるが，これを具体的な地図における「海」に見立てて説明することで，生徒

がイメージを得やすいようにする。定義 5 および定義 6 については理解の定着のため，スライドを用いて具体的な例を示した後，問題演習を行う。

問題 3 (1) 次の地図を塗り分けしよう。



(2) (1) より，それぞれの地図の彩色数は，いくつであると予想できるか？
(3) (1) の地図は 2 色で塗り分けできないことを確認しよう。

(1) では，色の代わりに，赤や青といった漢字や，アルファベット等を各面に書き込むことで塗り分けたことにする。また (2) において，彩色数は使った色の数にのみ注目し，色の塗り分け方や使う色の種類については考えないことに注意させる。さらにこの演習を通して，地図によって彩色数が異なる場合があることを確認させる。(3) では予想した彩色数以下で塗り分けできない部分が存在するかを確認させる。

ここで，地図を彩色するには 2 つの面が隣り合っているかどうかにのみ注目すればよいことから，グラフ理論の考え方を使うことで，地図を単純化して考えることができることを説明し，定義 6（路線グラフの定義）を導入する。このとき頂点を「駅」，辺を「路線」に見立てて説明することで，生徒がイメージを得やすいようにする。定義 6 についての説明をスライドで行った後，理解の定着のため問題演習を行う。

次に，定義 7（路線グラフの頂点の彩色に関する定義）の導入を行う。定義 5 で例として用いた路線グラフをもとにした説明をスライドで行った後，生徒の理解の定着のため問題演習を行う。

問題 4 (1)　問題 3 (1) で考えた地図の路線グラフを描こう。
(2)　それぞれの地図の路線グラフの彩色数は，いくつであると予想できるか？

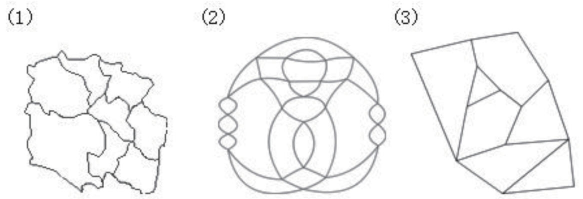
(1) において，頂点の色の塗り分けはカラーシールを用いて行う。また，彩色し直す場合は，新しいカラーシールを上から重ねて貼るように指導を行う。このようにする理由は，実際にカラーペン等を使って彩色するよりもミスをした際の修正等が効率的になると考えられるからである。また，路線グラフを地図に書き込む際に図が煩雑になるのを防ぐため，あらかじめ地図の各面に頂点を書き込んだものを配布する。

次に，問題 3(2) と問題 4(2) から，路線グラフの各頂点の彩色が地図の塗り分けに自然に拡張できることに気づかせ，定理 1 を紹介する。

4．演習に取り組む。

さまざまな地図について，路線グラフをもとに彩色を行うことで，彩色数を調べる。

問題 5 次の地図の彩色数はそれぞれいくつであると予想できるか？路線グラフを用いて考えよう。



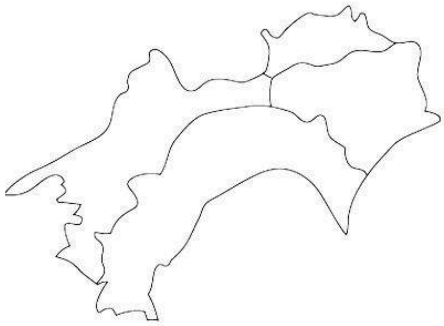
また，(1) の地図の路線グラフの彩色数が，3 でないことを確認しよう。

生徒の実態に応じて，やや発展的な考え方として (3) の地図については，問題 4(1) で地図 (b) より得られた路線グラフと同型な路線グラフが得られることからも，その彩色数が

4 であると予想できることを紹介する。また，彩色数が 3 でないことを場合分けの考え方を用いて説明する。

5．研究課題の内容を把握しやすくするために次の演習を行う。

問題 6 一番外側の面を含めて以下の地図を塗り分けたとき，彩色数はいくつか？



この問題では，[地図の塗り分けに関するルール] のうち【ルール 4】を除外して考えていることを注意する。また，問題 3(1) の結果より，一番外側の面を除外したときの，この地図の彩色数は 3 であり，一番外側の面を含めて地図を塗り分けたときの彩色数は 4 であることから，地図の一番外側の面を彩色するかどうかで，彩色数が異なることがあることを生徒に気付かせる。一方で，スライドを用いて，問題 3 の地図 (b) は一番外側の面を含めて地図を塗り分けても彩色数は変わらないことを説明する。またこのとき，一番外側の面を除いて地図を彩色したものと比べて，同じ部分の色の配置が変わることがあることを生徒に伝える。路線グラフを用いて彩色数を考えるときは，路線グラフを得る操作【STEP 1】の条件「ただし，一番外側の面を除く」を除外して考えることを注意する。

6．課題研究を行う。
これまでに学習したことをもとに，班を 2 つのグループに分けて，それぞれ以下のいずれかの研究題目に取り組ませる。

〈課題研究題目 **1**〉
岐阜県の地図の彩色数はいくつか？また，得られた彩色数よりも少ない色を使って塗り分けできない理由は何か？

〈課題研究題目 **2**〉
一番外側の面を含めて岐阜県の地図を塗り分けたとき，彩色数はいくつか？また，塗り分けの際に工夫した点は何か？

岐阜県の地図に路線グラフを描いた A3 サイズの用紙を配布し，班で相談しながら考えることができるようにする。

7．課題研究によって得られた成果を班ごとにまとめる。

各班に模造紙を配布し，研究の結果をまとめさせる。

授業の構成 (**2** 日目)

1．前時の学習内容についての復習を行い，課題の確認をする。また，これまでに学習した定義等を，スライド等を用いて確認する。

2．発展的な学習として，二色定理について紹介する。

問題 7 次の条件のもとで，紙の上に自由に曲線を描く。（ただし，描いている途中で紙からペンを離さないようにする。）

- (条件 1) 出発点と終点は，一致するものとする。
- (条件 2) 途中で何度交わってもよいが，交わる場合は点で交わるとする．また，交わっている点を交点という。

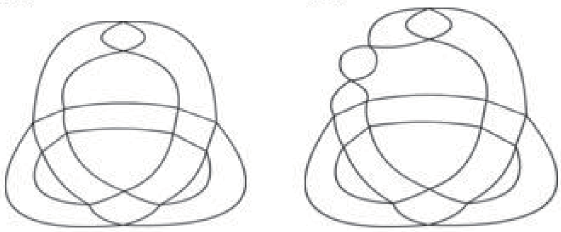
曲線を描くことによって得られた地図の彩色数は，いくつであると予想できるか？
ただし，地図の塗り分けに関するルールのうち,【ルール 4】を除外して考えるものとする。

この問題では，地図の塗り分けに関するルールのうち【ルール 1】の「1 点のみで接している面は，隣り合うとは考えない」ことに特に注意させる。また，曲線の交点が少なすぎると問題がやさしくなりすぎると考えられるため，本授業では交点を 6 個以上持つ曲線について考えさせる。

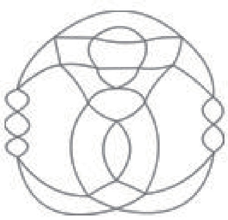
問題演習を通して得られた実感をもとに定理 2（二色定理）を理解できるようにする。次に，二色定理をふまえて問題演習を行う。

問題 8 次の地図の彩色数はそれぞれいくつであるか？

(1) (2)



問題 9 次の地図の境界線は，一筆書き可能かを調べよう。



3. 研究成果の発表を行う。

発表の際に岐阜県の地図を実際に彩色すると，4 色で彩色可能であることと，岐阜県の地図は 3 色で彩色できない部分を含んでいることから，彩色数が 4 であることをおさえる。また，課題研究題目 1, 2 の研究成果より，岐阜県の地図は一番外側の面（海）に色を塗った場合も彩色数は 4 であることに気付かせる。問題 3 の (b) の地図にも,「3 色で彩色できない部分」が含まれているため，彩色数が 4 であることを確認する。

4. 四色定理とその歴史を紹介する。

四色定理の紹介と，この定理はコンピューターによる計算を一部利用することで証明されたことや，現在では一般的になっているコンピューターによる証明が，当初はなかなか認められないものであったことを紹介する。高校生にとってあまり馴染みのないであろう数学史に触れることで，数学に対する興味・関心を持ってもらいたいと考える。

5. 授業のまとめを行なう。

まとめ
岐阜県の地図は，最低 4 色で塗り分け可能である。

四色定理より岐阜県の地図以外でも，任意の地図は 4 色で塗り分けることができるということをおさえる。

5. 実践と結果

(1) 実践内容
講座名：平成 28 年度 高校数学セミナー
『地図は何色あれば塗り分けできる？』
日程：平成 28 年 7 月 30 日 (土)，8 月 4 日 (木)
場所：岐阜大学 (1 日目)，長良高校 (2 日目)
対象：中学 1 年生～高校 3 年生 30 名 (1 日目)，中学 2 年生～高校 3 年生 29 名 (2 日目)
指導補助：岐阜大学・教育学部 4 年生及び教育学研究科大学院生

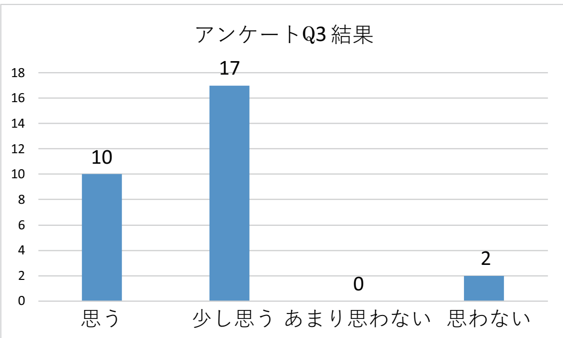
(2) アンケート結果

本研究では１日目の授業開始前と，２日目の授業終了後にアンケートを実施した。（それぞれ事前アンケート・事後アンケートとよぶ。）１日目と２日目の両日の授業に参加した生徒 29 名によるアンケート結果を述べる。

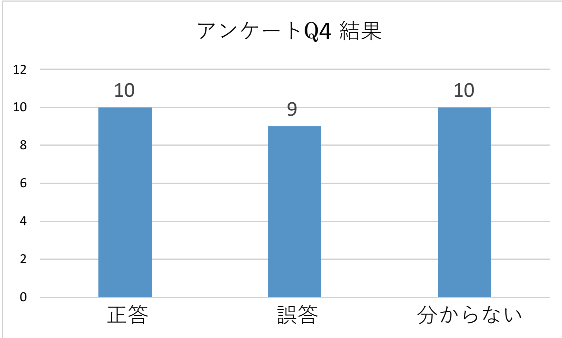
事前アンケートの結果

まず，事前アンケートの結果について述べる。(添付資料参照) グラフ理論という数学の分野について聞いたり学習したりしたことがあるのは，4 名であった。この 4 名のうち 2 名は「学校」で，1 名は「本やインターネット」で，1 名は「友人に」聞いてグラフ理論という数学の分野について聞いたり学習したりしたことがあった。また「地図の塗り分け問題」について聞いたり学習したりしたことがあるのは 9 名であった。そのうち 5 名は「本」で，残りはそれぞれ，「本やテレビ」，「テレビ」，「本やインターネット」，「親に」聞いて「地図の塗り分け問題」について聞いたり学習したりしたことがあった。

Ｑ３．身近な問題について，数学を用いて考えたいと思いますか？



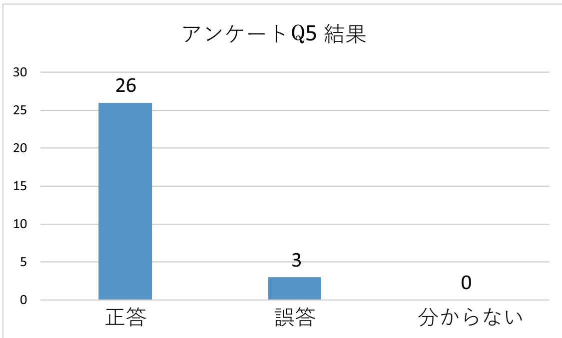
Ｑ４．日本地図の４７都道府県を，隣り合う県は違う色になるように塗り分けしたとき，最低何色あれば塗り分けできると思いますか？（数字で回答してください）分からない場合は,「分からない」に〇を付けてください。



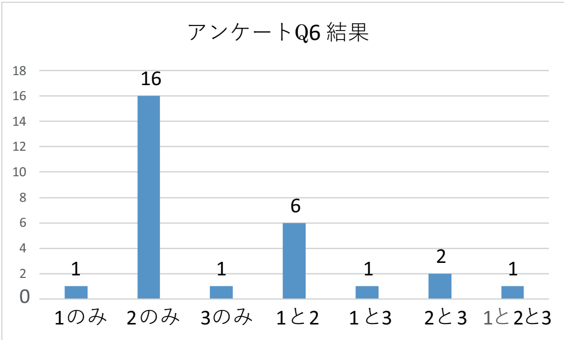
事後アンケートの結果

Ｑ１について，研究題目１を選択したのが 19 名，研究題目２を選択したのが 10 名だった。Ｑ２について，正答 25 名，誤答 4 名，分からないを選択 0 名だった。Ｑ３について，正答 29 名，誤答 0 名，分からないを選択 0 名だった。Ｑ４について，正答 29 名，誤答 0 名だった。（添付資料参照）

Ｑ５．世界地図を，海を含めて塗り分けしたとき，彩色数は何色になると思いますか？(数字で回答してください）分からない場合は,「分からない」に〇を付けてください。

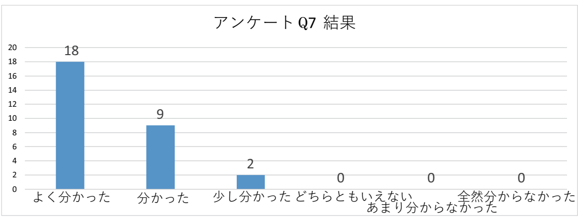


Ｑ６．今回の高校数学セミナーで学んだ内容について，興味を持ったものは何ですか？あてはまる番号すべてに〇をつけてください。その他を選んだ方は，どのような内容に興味を持ったかをカッコ内に記入してください。
1．グラフについて　2．地図の塗り分け問題について　3．その他　4．特にない

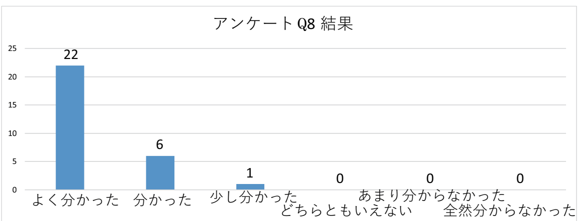


「3．その他」であった回答として，
・歴史の古い問題について，
・一定のルールを自分で決め，それに従って考えること，
・四色問題の証明について（2 名），
・ド・モルガンについて，
・一筆書きができる地図は 2 色で塗り分け可能であるということ，
があった。

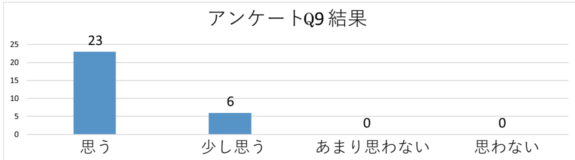
Q 7.　今回の高校数学セミナーで学んだグラフについて，あてはまる答えの番号に○をつけてください。



Q 8.　今回の高校数学セミナーで学んだ地図の塗り分けについて，あてはまる答えの番号に○をつけてください。



Q 9.　身近な問題について，数学を用いて考えたいと思いますか？あてはまる答えの番号に○をつけてください。



◎今回の高校数学セミナーについて，感想や意見，疑問に思ったこと等をできるだけ具体的に自由に記述してください。
・どんなに複雑な地図でも 4 色使えば塗り分けられてしまうのはとても面白いと思った。
・コンピューターを使った証明を 1 度見てみたいと思った。歴史の古い問題やすでに証明されている問題も自分で解けるようになりたい。
・自分たちが住んでいる岐阜県について考えることで，興味を持つことができた。
・地図の塗りわけにグラフを使えば，わかりやすくなってすごいと思った。
・四色定理の詳しい証明方法についての説明が聞きたかった。
・数学で今まで難しかったことが簡単にできるなんてすごいと思った。
・違う高校・学年の人たちと 1 つの問題に対して，いくつもの考え方や意見を交流することができて楽しかった。

6. 考察

(1) ねらいの達成度について

(a) グラフ理論の考え方をもとに地図から路線グラフを描くことができる。
事後アンケートＱ 4 より，全員が正答していた (内 1 名は，路線グラフの頂点に番号を書き込んでいたが，路線グラフ自体は正しかったため正答とした) ため，達成できたと考える。

(b) 地図を塗り分ける活動を通して路線グラフの形に着目し，彩色数について考察することができる。

グループごとにまとめた発表資料および発表内容より，8 グループ中 7 グループ (25 名) が路線グラフの形についての内容を絵または文章で記述し，岐阜県の地図の彩色数が 4 になることに気づくことができていたことから，達成できたと考える。

(c) 任意の地図の彩色数は 4 以下であることを本時の活動や数学史的な話題からとらえることができる。
事後アンケートＱ 5 では，26 名が正答している。事前アンケートＱ 4 で正答した生徒を除いた 19 名についても 18 名が正答していたため達成できたと考える。

(2) アンケート結果の分析・考察

事後アンケートＱ 5 で誤答した生徒のうち，2 名が事前アンケートＱ 4 では正答していた。一方で正答から誤答に変化した原因としては，「海を含めて塗り分ける」等の語句について，生徒の中で学習内容の整理ができなかったためであると考えられる。生徒の混乱を解消するために，四色定理の説明について数学史的な話題だけでなく，より詳しく丁寧な指導が必要だったと考える。また，アンケートの自由記述欄に「四色定理の証明について詳しく知りたかった」というものがあった。本時では，四色定理について数学史的な話題のみを紹介し，実際の証明の内容にはほとんど触れなかったためであると考える。そのため，発展的な内容になるが，四色問題の証明方法について学習できるような教材についても開発していきたいと考える。

7. 本研究のまとめと課題

(1) 本研究のまとめ

本研究ではグラフ理論を用いた教材開発において，四色問題を題材とした高校生向けの数学教材を開発した。内容は，グラフ理論の考え方や性質を活用しながら地図の塗りわけに必要な色の最小数を考えていくものであり，「岐阜県の地図は最低何色で塗りわけ可能か」を調べることを課題として設定した。実践は岐阜県内の中学 1 年生から高校 3 年生までを対象に行った。結果として，本研究で設定した授業のねらいをおおむね達成できたといえる。「数学で今まで難しかったことが簡単にできるなんてすごいと思った」,「どんなに複雑な地図でも 4 色使えば塗り分けられてしまうのはとても面白いと思った」,「コンピューターを使った証明を 1 度見てみたいと思った」,「歴史の古い問題やすでに証明されている問題も自分で解けるようになりたい」という生徒の感想があり，数学のよさをやおもしろさを認識し，現代数学の内容に興味・関心を持ってもらうきっかけを与えることができたのではないかと考える。

(2) 今後の課題

四色問題を用いた教材開発の面では，今回の実践で明らかになった（6 節で述べた）問題を修正することが今後の課題となる。今回の実践では，中学 1 年生から高校 3 年生まで幅広い学年の生徒に対して授業を行ったが，実践を通して小学生向けの教材としても用いられる可能性が十分にあると感じた。今回研究した内容を修正することで，グラフ理論を用いた小学生向けの教材開発にも取り組みたいと考えている。

8. 先行研究との違い

本研究と先行研究 [6] との違いについて列挙する。

･教材としての有効性がより分かるように，事前・事後アンケートを取り入れている。

・二日目において二色問題と一筆書きに関する演習を取り入れている。

・地図の定義を与えた。
・実践の対象集団が中学生及び高校生である。
以上の改良点により，より実用性のある教材を開発することができたと考える。

9. 添付資料

本論文に，授業で使用したテキストおよびアンケートを添付する。

10. 謝辞

本実践では，岐阜県教育委員会の主催の「高校数学セミナー」での２日目の授業を「第９８回全国算数･数学教育研究（岐阜）大会」の高大連携授業の実践発表の一環として行なっている。実践及びその準備でお世話になった岐阜県教育委員会の長澤紀明先生，全国大会の実行委員長である岐阜大学の山田雅博教授，大垣北高校の内田康雄先生，可児高校の高橋和人先生，高校での会場準備でお世話になった長良高校の先生方，指導補助をしていただいた岐阜大学教育学部学部生及び大学院生の方々に感謝する。

10. 参考文献

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty,『グラフ理論への入門』立花俊一ほか訳, 共立出版 (1991).
[2] R. J. ウィルソン,『グラフ理論入門』近代科学社 (2001).
[3] ロビン･ウィルソン (著), 茂木 健一郎（訳），『四色問題』, 新潮社 (2004).
[4] 鈴木 晋一,『数学教材としてのグラフ理論』(早稲田教育叢書)，学文社 (2012).
[5] 文部科学省,『高等学校学習指導要領 数学編 理数編』実教出版株式会社 (2012).
[6] 酒井駿佑, 田中利史,『四色定理を題材とした高校生向けの教材開発と実践』岐阜数学教育研究, 第 13 巻, pp. 21–28 (2014).

平成28年度
高校数学セミナー

地図は何色あれば塗り分けできる？

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１日目

【オーガスタス･ド･モルガン】
Augustus De Morgan, 1806年 – 1871年

【1日目の予定】

・午前の部　　9：30～12：00

・お昼休憩　　12：00～13：00

・午後の部　　13：00～15：00

〇問題①

A,B,C,Dの4人が，ある1対1のゲームを行う．ゲームを行う組み合わせは，以下のものとする．

Aは，B,C,D　とゲームを行う．
Bは，A,D　とゲームを行う．
Cは，A,D　とゲームを行う．
Dは，A,B,C　とゲームを行う．

それぞれの人を「ボール」で表し，ある2人が対戦する場合，その2人を表すボールを「ヒモ」でつなげることで，ゲームを行う組み合わせを表現しよう．

※各ボールにA,B,C,Dの文字を書き込むことで，ボールの区別をしましょう．

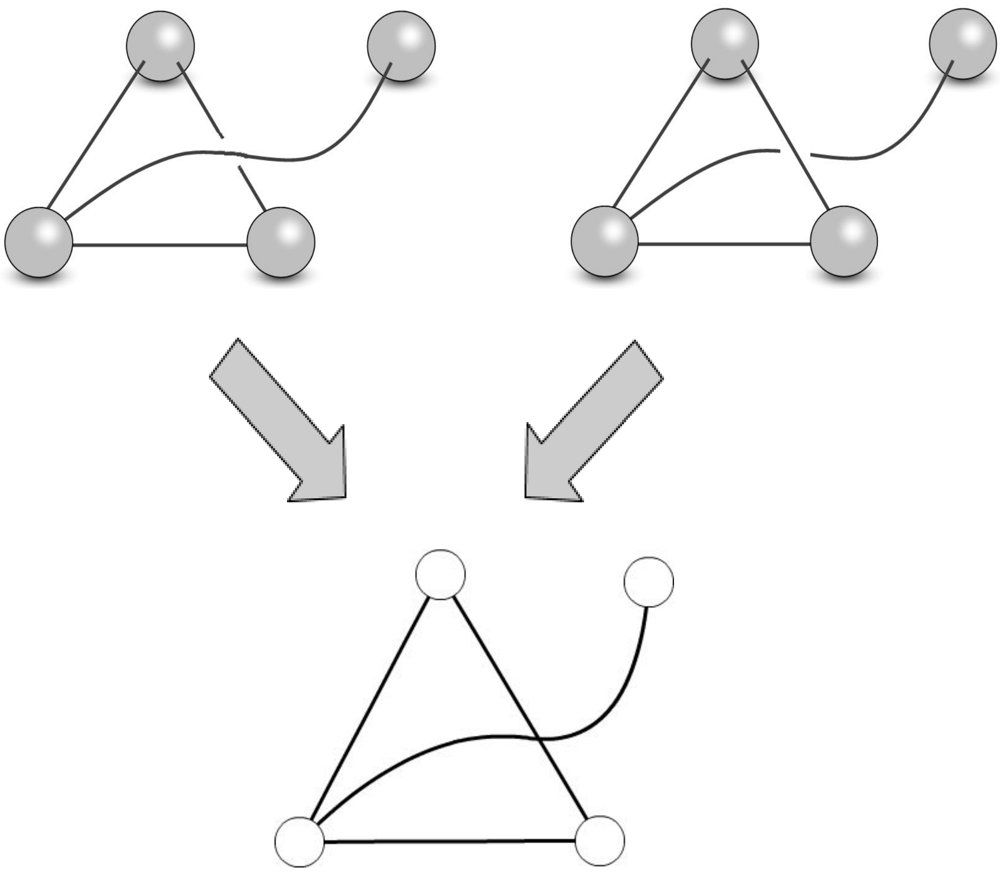
グラフの定義

いくつかのボールと，それらをヒモでつなぎ合わせてできたものを，**グラフ**という． また，ボールを**頂点**，ヒモを**辺**という．

※これから考えるグラフは，関数における「グラフ」とは違うものです．

【グラフを紙に描くときの約束】

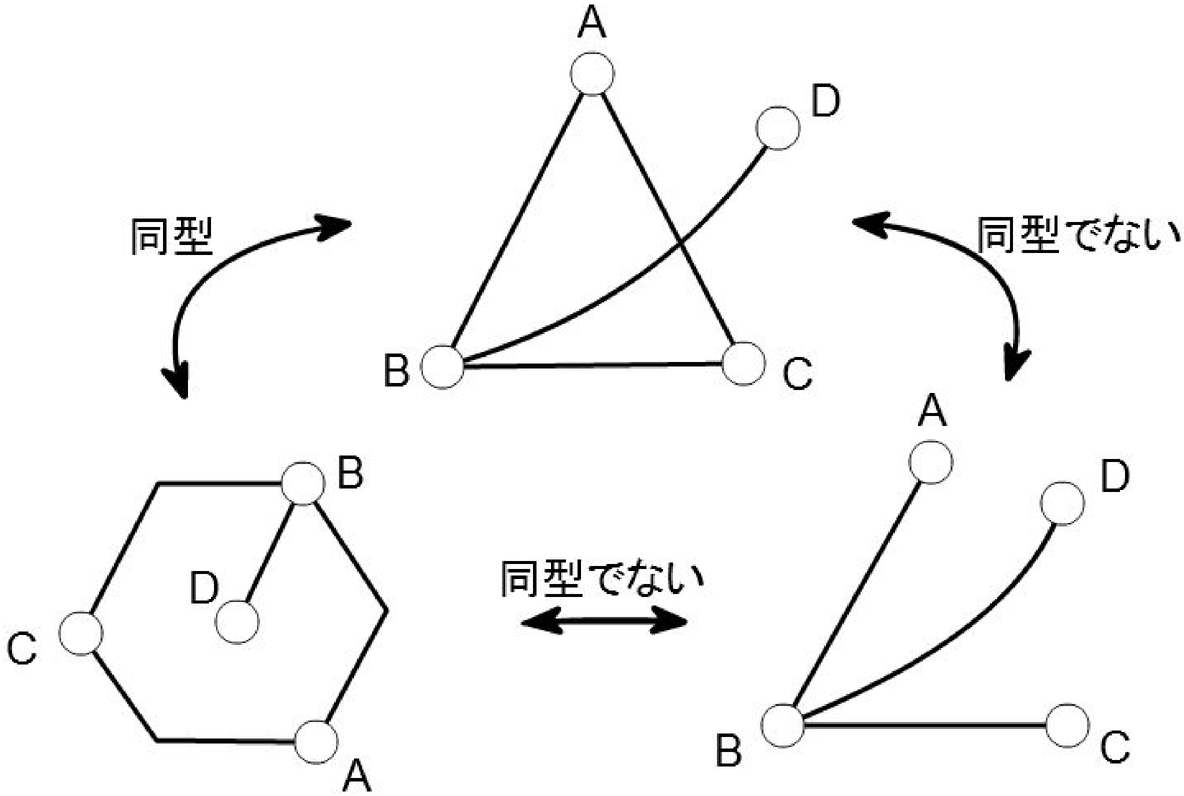
① ボール(頂点)を小円，ヒモ(辺)を線で描くことで，グラフを表現するものとする．
② 辺が交差する部分を紙に描く際は，上下関係を無視して，重ねて書くようにする．



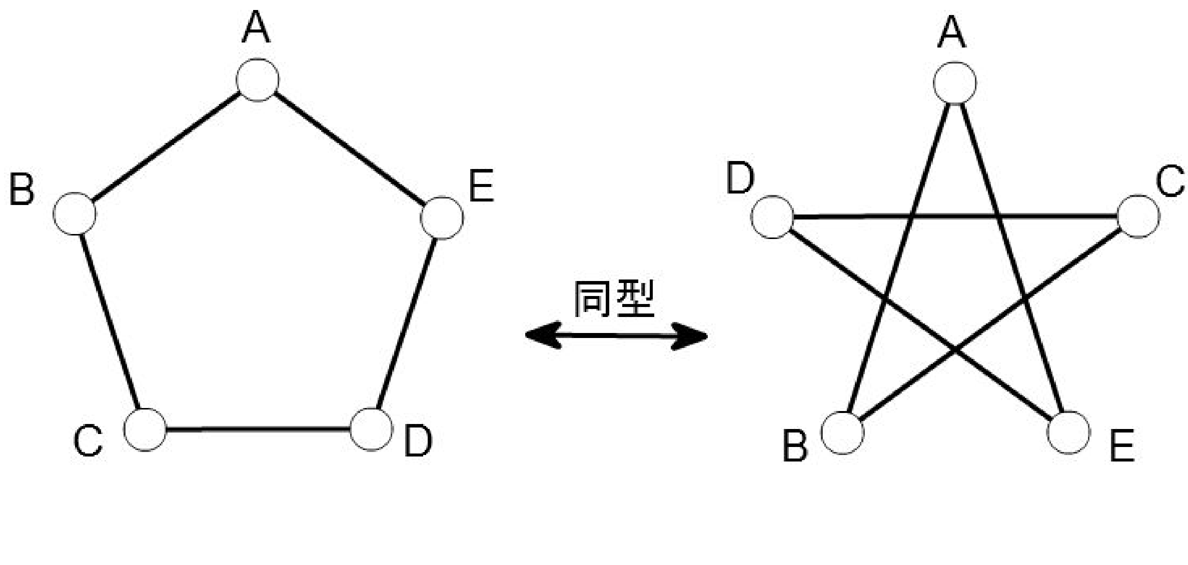
同型なグラフの定義

グラフの頂点同士のつながり方は変えずに，頂点の位置だけを移動させる．このときできたグラフと，もとのグラフは**同型なグラフである**という．

例１



例２

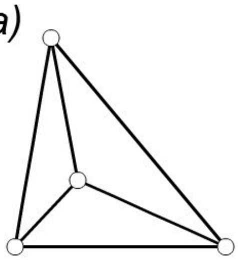


○問題②

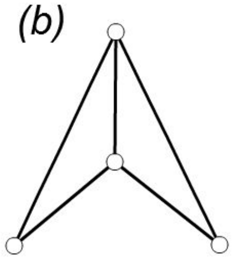
同型な2つのグラフは，次のうちどれか．

②-(1)

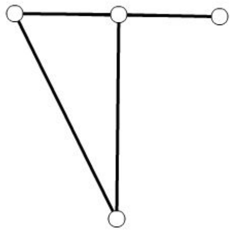
(a)



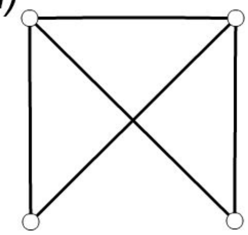
(b)



(c)



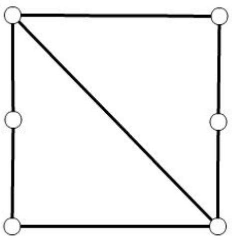
(d)



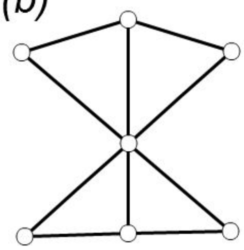
同型なグラフは　　　と

②-(2)

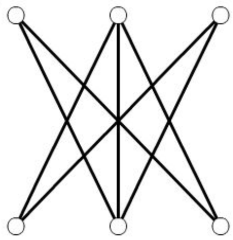
(a)



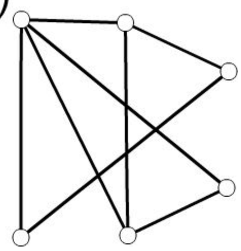
(b)



(c)



(d)



同型なグラフは　　　と

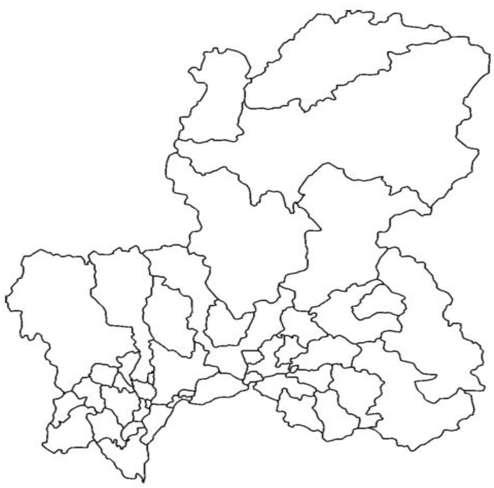
課題

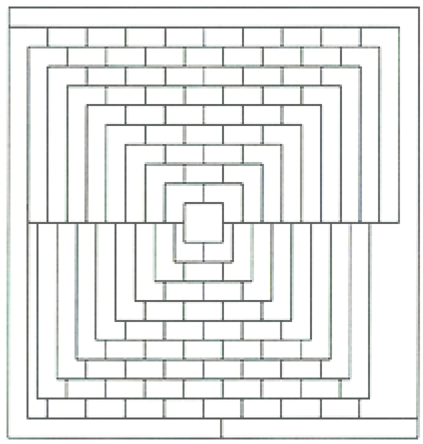
岐阜県の地図は，最低何色で塗り分け可能か．

地図の定義

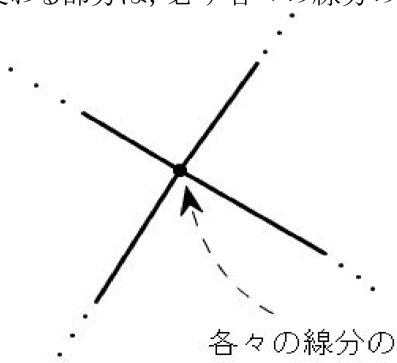
平面を，何本かの線分の端をつないで，いくつかの部分に区切ったものを**地図**という．
また，地図上で区切られた部分を**面**といい，面を区切る線を**境界線**という．

例



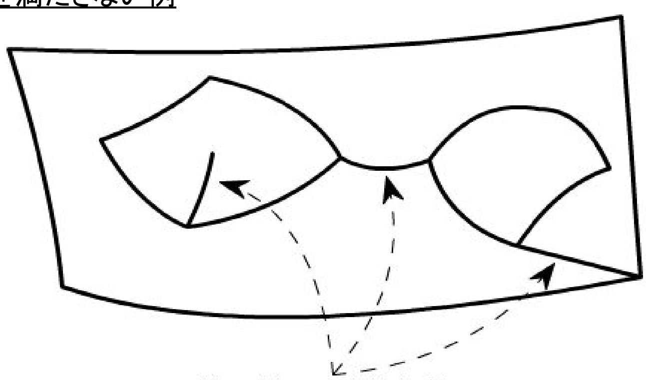


※1　曲線に見える境界線は，何本かの線分がつながってできたものとします．
※2　線分が交わる部分は，必ず各々の線分の「端」になっているとします．



※3 境界線の両側は，必ず「異なる面」とします．

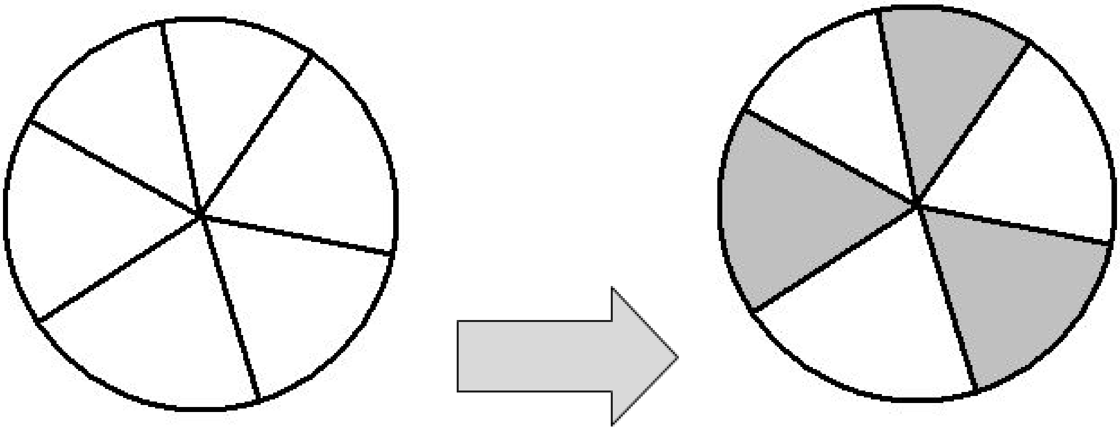
条件を満たさない例



地図の塗り分けに関するルール

【ルール1】
どの隣り合う2面も同じ色にならないように色を付ける．ただし，いくつかの点のみで接している面は，隣り合うとは考えない．
【ルール2】
使う色はできる限り少なくなるようにする．
【ルール3】
飛び地は無いものとする．
【ルール4】
一番外側の面は色をつけない．

※【ルール1】について．
「いくつかの点のみで接している面は，隣り合うとは考えない．」ので，下のように地図の塗り分けができます．



※【ルール4】について．
「一番外側の面」とは，平面上にある地図の「限りなく広い」面のことです．
たとえば日本地図をみたときの「海」にあたる部分であると考えてください．

地図の彩色数の定義

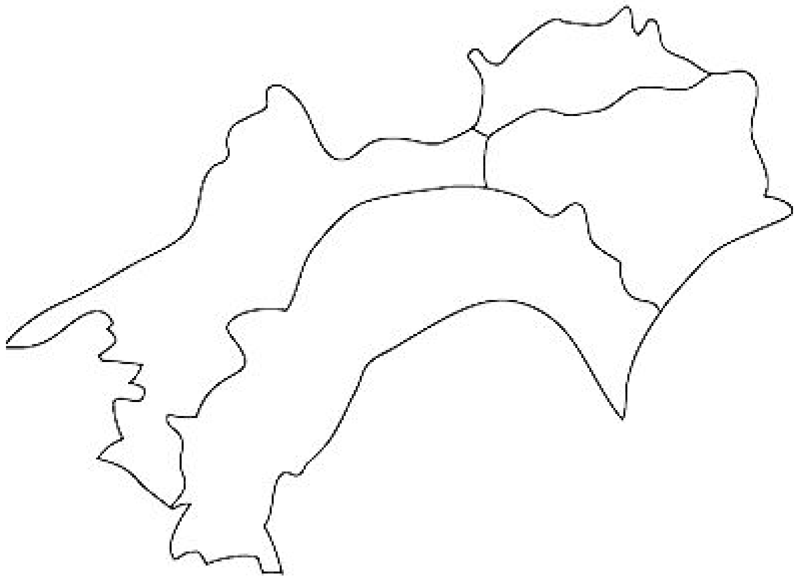
地図の塗り分けに関するルールにしたがって地図を塗ったとき，使った色の数を，**地図の彩色数**という．

○問題③-1

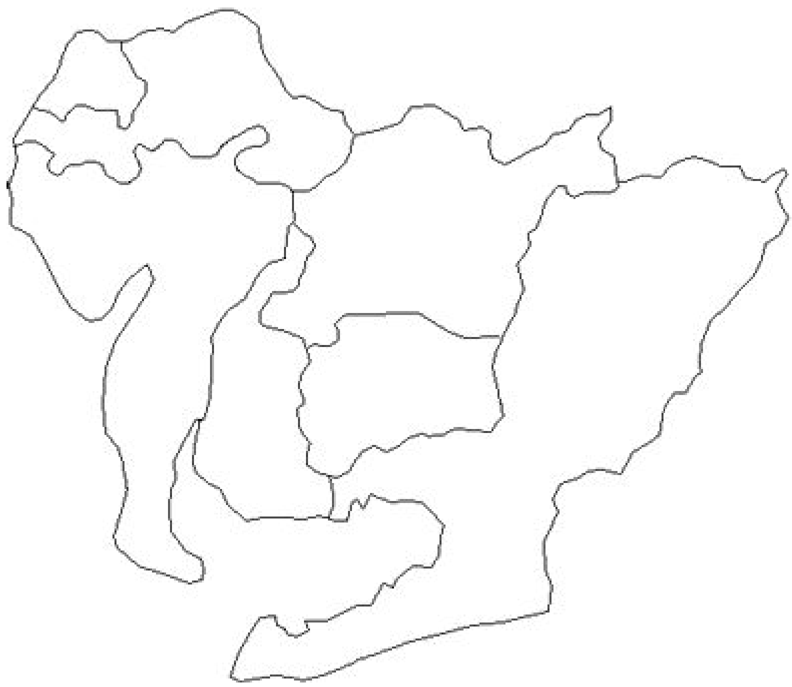
次の地図を塗り分けしよう．

（※色の代わりに，番号を各面に書き込むことで塗り分けたことにします．）

（1）



（2）



○問題③-2

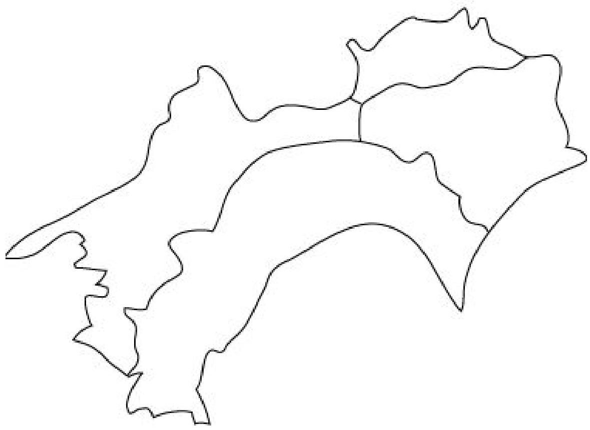
問題③-1より，それぞれの地図の彩色数は，いくつであると予想できるか？

(1)の地図の彩色数は＿＿＿＿

(2)の地図の彩色数は＿＿＿＿

○問題③-3

(1)の地図は2色で塗り分けできないことを確認しよう．



路線グラフの定義

地図に対して，次のような操作を考える．
【STEP1】地図の各面に1ずつ頂点を描く．(ただし，一番外側の面を除く)
【STEP2】2つの面が隣り合っているならば，それらの面上に描いた頂点同士を辺でつなぐ．
このとき，2面の境界線と辺が1点で交わるようにし，辺同士は交わらないようにする．
ただし，いくつかの点のみで接している面は，隣り合うとは考えない．

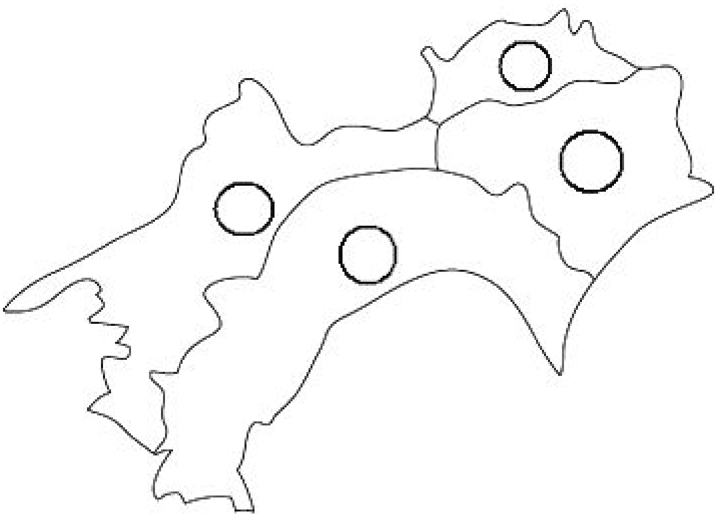
このようにしてできたグラフを**路線グラフ**という．

※頂点を「駅」，辺を「路線」に見立てると，それぞれの面を結ぶ路線網図ができると考えられます．

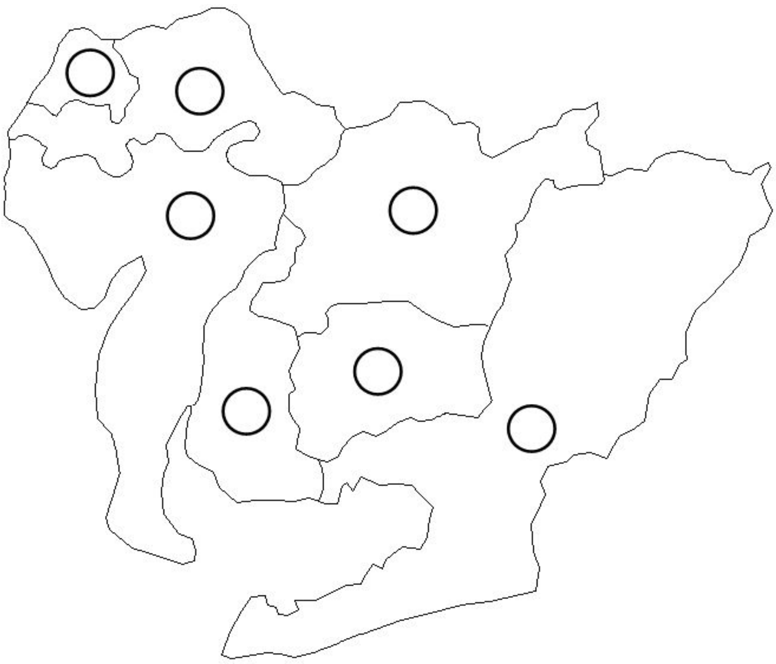
○問題④-1

問題③-1で考えた地図の路線グラフを描こう．

(1)



(2)



<u>路線グラフの頂点の彩色数に関する定義</u>

・どのつながっている2頂点も同じ色にならないように，路線グラフの頂点に色を付けることを，路線グラフを**彩色する**という．

・n色使えば彩色できるが，(n−1)色では彩色できないとき，　路線グラフの**彩色数はnである**という．

〇問題④−2

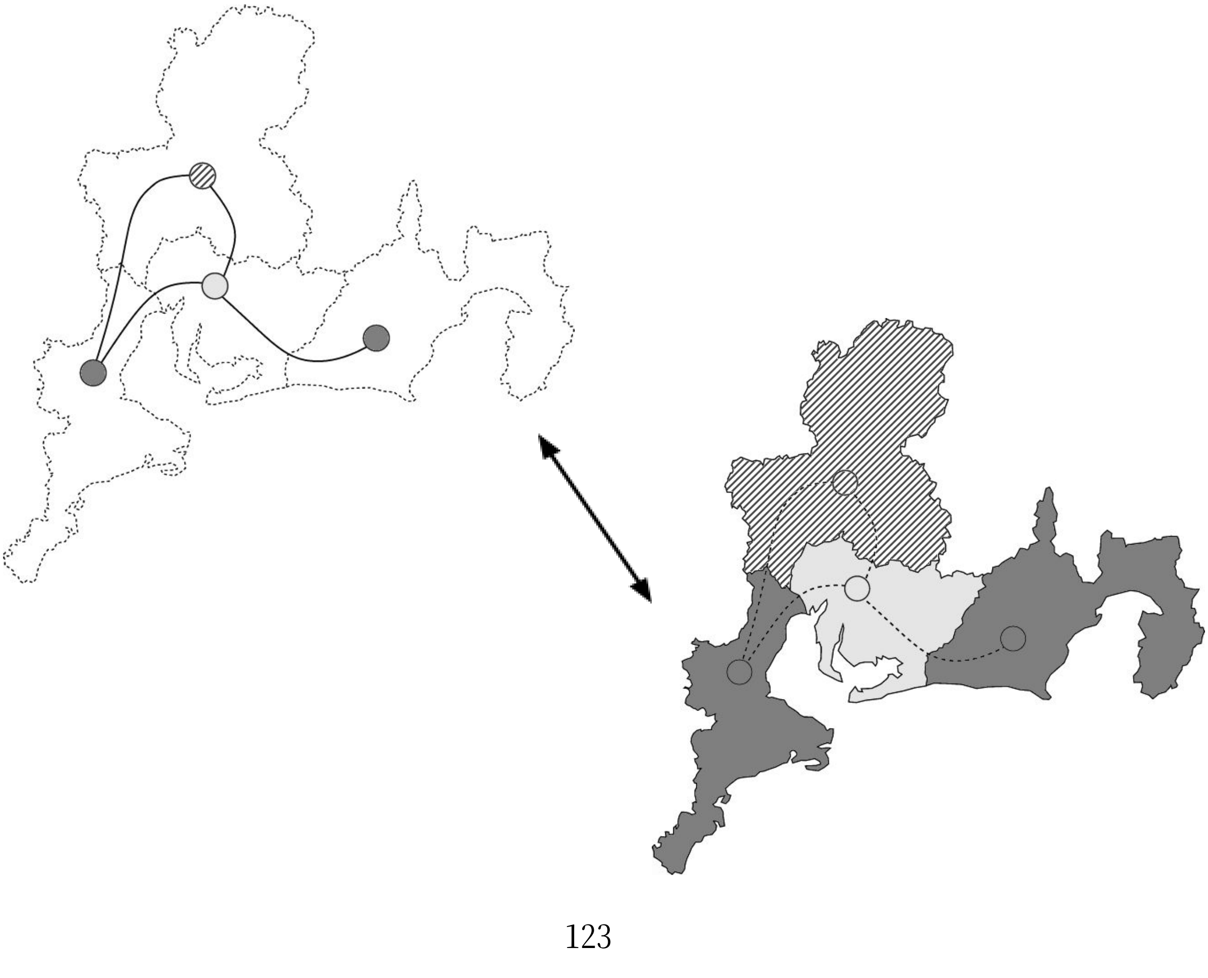
問題④−1より，それぞれの地図の路線グラフの彩色数は，いくつであると予想できるか？

(1)の地図の路線グラフの彩色数は＿＿＿＿＿

(2)の地図の路線グラフの彩色数は＿＿＿＿＿

<u>定理1</u>

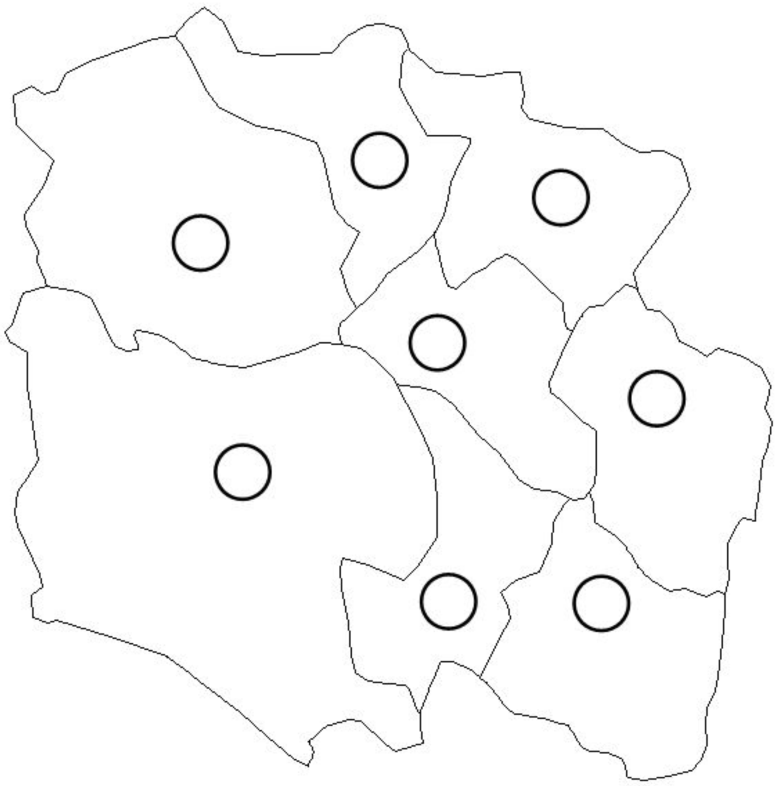
与えられた地図の彩色数は，その地図の路線グラフの彩色数と等しい．



〇問題⑤-1

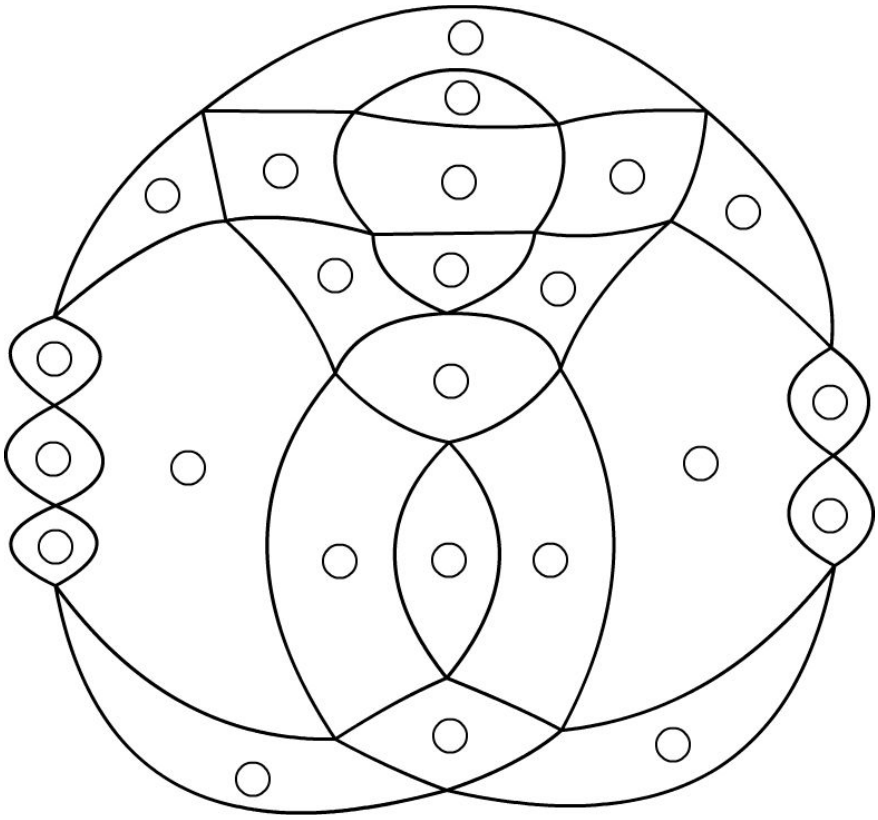
次の地図の彩色数はそれぞれいくつであると予想できるか？路線グラフを用いて考えよう.

(1)



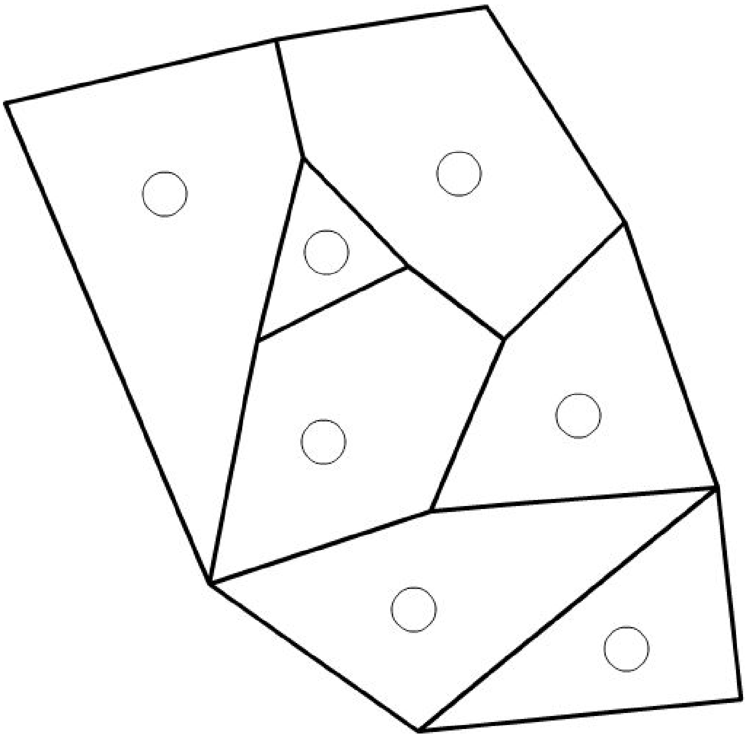
彩色数は＿＿＿＿

(2)※いくつかの点のみで接している面は，隣り合うとは考えないことに注意しましょう.



彩色数は＿＿＿＿

(3)



彩色数は＿＿＿＿＿

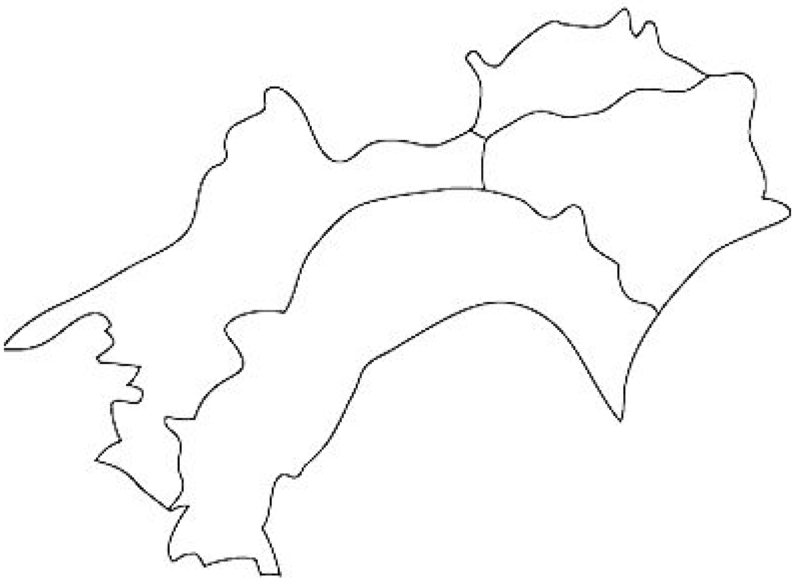
〇問題⑤-2

(1)の地図の路線グラフの彩色数が，「3」でないことを確認しよう．

○問題⑥

一番外側の面を含めて以下の地図を塗り分けたとき，彩色数はいくつか？

※「一番外側の面を含めて地図を塗り分ける」とは，地図の塗り分けに関するルールのうち，【ルール4】を除外して考えるということです．



※問題③より，この地図の彩色数は______であった．

一番外側の面を含めて塗り分けたとき，この地図の彩色数は_______になる．

◎グループごとに，以下の課題研究題目1・2のうちからどちらかを選び，取り組みましょう.

〈課題研究題目1〉

岐阜県の地図の彩色数はいくつか？また，得られた彩色数よりも少ない色を使って塗り分けできない理由は何か？

〈課題研究題目2〉

一番外側の面を含めて岐阜県の地図を塗り分けたとき，彩色数はいくつか？また，塗り分けの際に工夫した点は何か？

※「一番外側の面を含めて岐阜県の地図を塗り分ける」とは，地図の塗り分けに関するルールのうち，【ルール4】を除外して考えるということです.（問題⑥参照）

選んだ課題研究題目は＿＿＿＿

メモ等

2日目

○問題⑦

次の条件のもとで，紙の上に自由に曲線を描く．(ただし，描いている途中で紙からペンを離さないようにする．)

(条件1) 出発点と終点は，一致するものとする．
(条件2) 途中で何度交わってもよいが，交わる場合は点で交わるとする．また，交わっている点を**交点**という．

曲線を描くことによって得られた地図の彩色数は，いくつであると予想できるか？
ただし，地図の塗り分けに関するルールのうち，【ルール4】を除外して考えるものとする．

※追加の条件として，「交点を6個以上持つ曲線」を描くとにします．

【作図スペース】

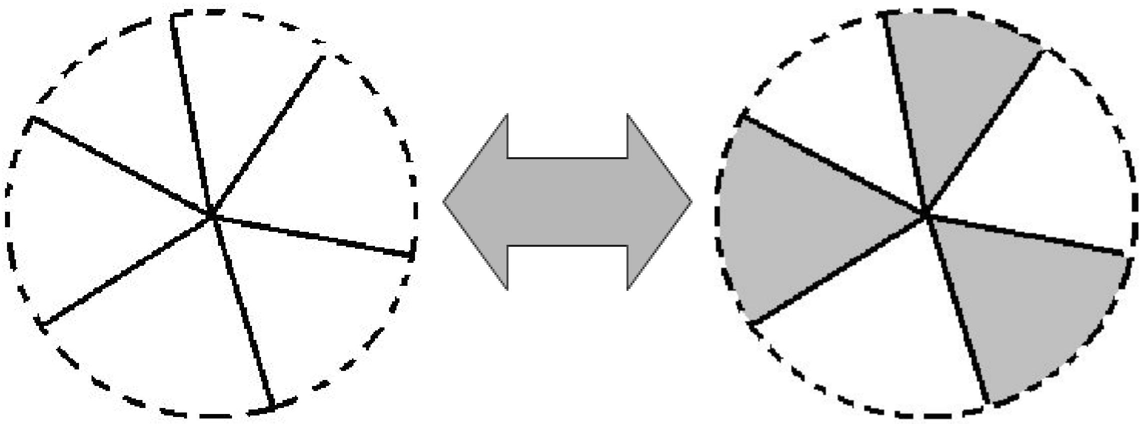
2色定理

地図の彩色数が「2」である.

⇕

地図の境界線が＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿である.

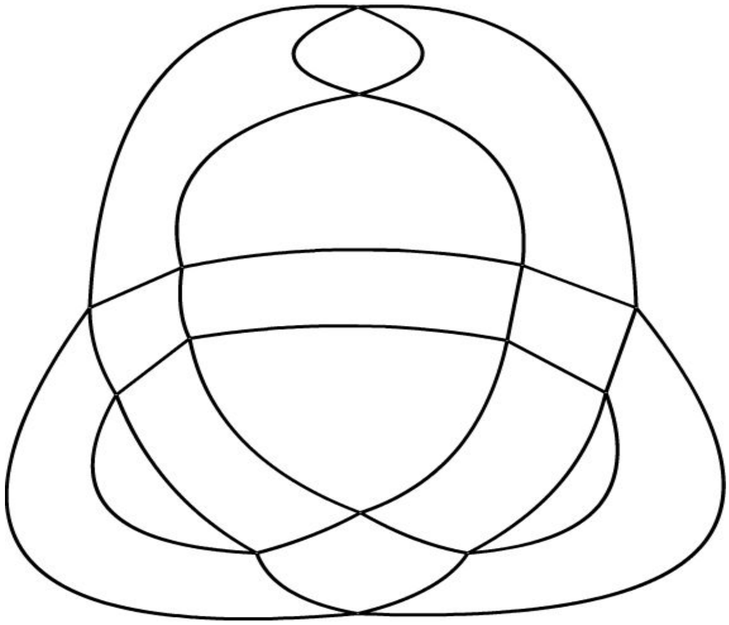
＿＿＿＿＿＿…　曲線上のある点(出発点)から出発し，曲線上を同じ場所を通らずに出発点に戻ること. ただし，同じ交点を何度通ってもよいとする.



○問題⑧

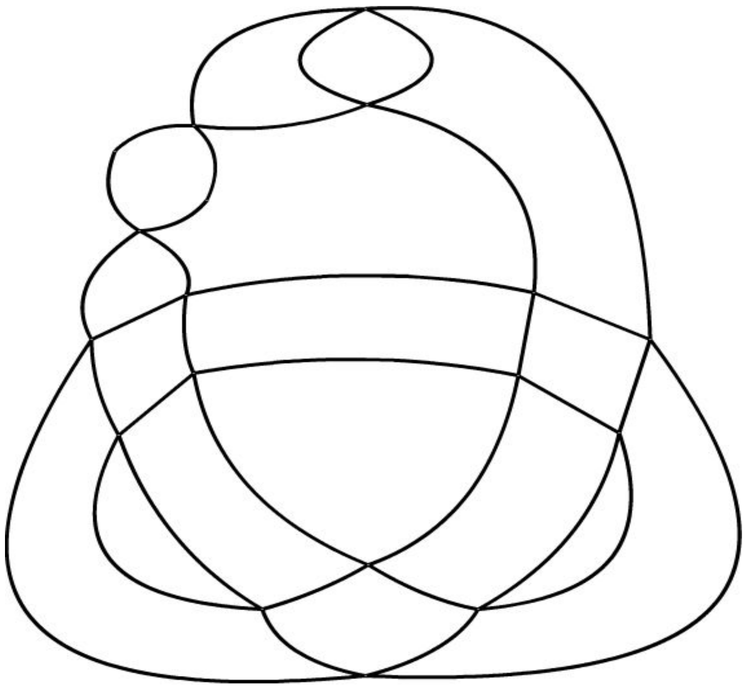
次の地図の彩色数はそれぞれいくつであるか？

(1)



彩色数は＿＿＿＿

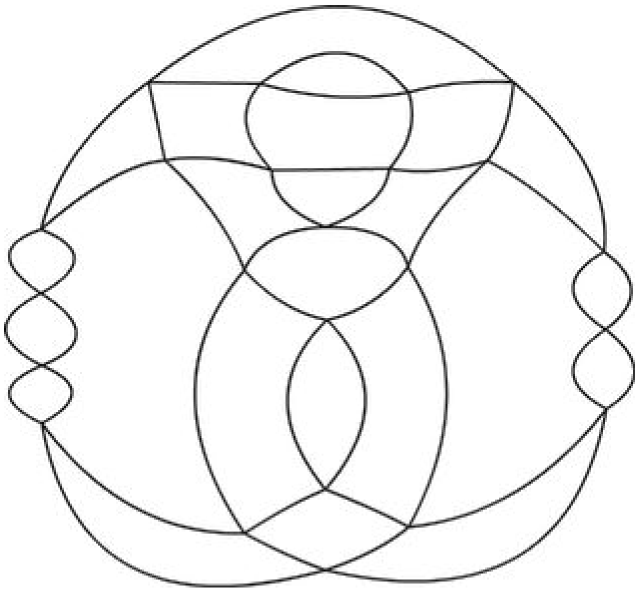
(2)



彩色数は＿＿＿＿

○問題⑨

次の地図の境界線は，一筆書き可能かを調べよう．



◎授業のまとめ

岐阜県の地図は，最低　　色で塗り分け可能である．

**　　色定理**

どのような地図も，　　色あれば隣り合う面が異なる色になるように塗り分けることが可能である．

H28年度 高校数学セミナー 事前アンケート

学年＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※名前は記入しないでください．配布した名札に書いてある番号を上に記入してください

Ｑ１～Ｑ３の質問については，該当する答えの番号に〇をつけてください．

Ｑ１． あなたはこれまでに，「グラフ理論」という数学の分野について聞いたり学習したりしたことがありますか？

１．はい　　　　　　２．いいえ

Ｑ１－２． Ｑ１で「はい」と答えた方に質問です．どのようにして，「グラフ理論」について聞いたり学習したりしましたか？（あてはまる答えすべてに〇を付けてください．その他を選んだ方は，どのようにして学んだかをカッコ内に記入してください．）

１．本を読んで　２．ＴＶを見て　３．学校で　４．インターネットで　５．その他（　　　　　　）

Ｑ２． あなたはこれまでに，「地図の塗り分け問題」について聞いたり学習したりしたことがありますか？

１．はい　　　　　　２．いいえ

Ｑ２－２． Ｑ２で「はい」と答えた方に質問です．どのようにして「地図の彩色問題」について聞いたり学習したりしましたか？（あてはまる答えすべてに〇を付けてください．その他を選んだ方は，どのようにして学んだかをカッコ内に記入してください．）

１．本を読んで　２．ＴＶを見て　３．学校で　４．インターネットで　５．その他（　　　　　　）

Ｑ３． 身近な問題について，数学を用いて考えたいと思いますか？

１．思う　　２．少し思う　　３．あまり思わない　　４．思わない

Ｑ４． 日本地図の４７都道府県を，隣り合う県は違う色になるように塗り分けしたとき，最低何色あれば塗り分けできると思いますか？（数字で回答してください）分からない場合は，「分からない」に〇を付けてください．

＿＿＿＿＿＿＿＿色　　　　分からない

ご協力ありがとうございました．このアンケートは，授業研究および，教材開発に利用します．回答の内容によって回答者の有利・不利になることは一切ありません．

H28年度 高校数学セミナー 事後アンケート

学年＿＿＿＿＿＿＿　　　　番号＿＿＿＿＿＿＿

※名前は記入しないでください．配布した名札に書いてある番号を上に記入してください

以下の質問に答えてください．

Ｑ１． 今回の高校数学セミナーで選んだ研究題目はどちらですか？あてはまる方に〇をつけてください．

研究題目１　　　　　　研究題目２

Ｑ２． ①か②の文章のうち，どちらか正しいほうを選んで，右下の枠に番号で解答してください．分からない場合は③と記入してください．

①頂点と辺の数が同じ２つのグラフは同型である．

②同型な２つのグラフは，頂点と辺の数がそれぞれ等しい．

③分からない．

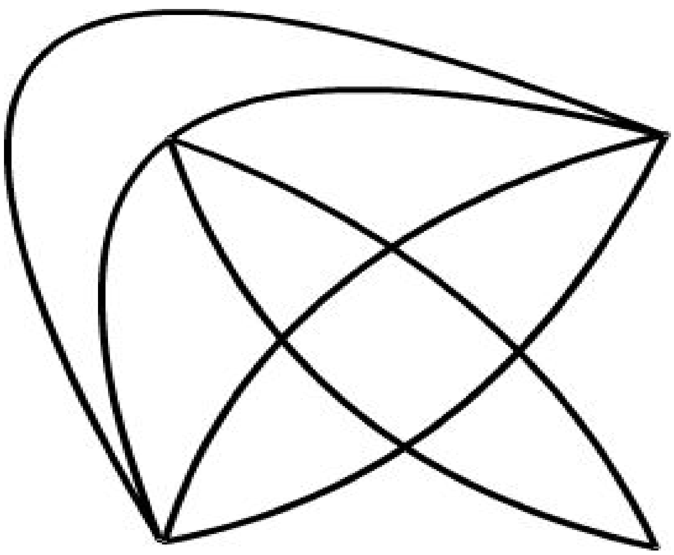
Ｑ３． ①か②の文章のうち，どちらか正しいほうを選んで，右下の枠に番号で解答してください．分からない場合は③と記入してください．

①彩色数が同じ２つの路線グラフは同型である．

②２つの地図の路線グラフが同型なとき，彩色数は同じになる．

③分からない．

Ｑ４． 以下の地図の路線グラフを完成させてください．（１番外側の面には，頂点を描かないことに注意してください．）



Ｑ５． 世界地図を，海を含めて塗り分けしたとき，彩色数は何色になると思いますか？（数字で回答してください）分からない場合は，「分からない」に〇を付けてください．

＿＿＿＿＿＿色　　　　分からない

裏にも質問があります

Ｑ６． 今回の高校数学セミナーで学んだ内容について，興味を持ったものには何ですか？あてはまる番号すべてに〇をつけてください．その他を選んだ方は，どのような内容に興味を持ったかをカッコ内に記入してください．

１．グラフについて

２．地図の塗り分け問題について

３．その他（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

４．特にない

Ｑ７． 今回の高校数学セミナーで学んだグラフについて，あてはまる答えの番号に〇をつけてください．

１．よく分かった　　２．分かった　　３．少し分かった

４．どちらともいえない　　５．あまり分からなかった　　６．全然分からなかった

Ｑ８． 今回の高校数学セミナーで学んだ地図の塗り分けについて，あてはまる答えの番号に〇をつけてください．

１．よく分かった　　２．分かった　　３．少し分かった

４．どちらともいえない　　５．あまり分からなかった　　６．全然分からなかった

Ｑ９． 身近な問題について，数学を用いて考えたいと思いますか？あてはまる答えの番号に〇をつけてください．

１．思う　　２．少し思う　　３．あまり思わない　　４．思わない

◎今回の高校数学セミナーについて，感想や意見，疑問に思ったこと等をできるだけ具体的に自由に記述してください．

ご協力ありがとうございました．このアンケートは，授業研究および，教材開発に利用します．回答の内容によって回答者の有利・不利になることは一切ありません．