

マッチング理論を用いた授業開発と実践

村井 独歩¹, 柘植 直樹²

本研究の目標は、身近な問題を数理的に考察し、解決する教材を提案することである。同時に、数学の楽しさや有用性も実感できる教材にしたい。対象は高校生とし、マッチング理論を用いて授業案を作成し、実践した。授業では、男女交際の場面を問題として設定し、マッチング理論を用いてどのような組み合わせが望ましいのかということを経験的に定式化した。その後アンケートを行い、その結果を分析し、考察した。本稿ではその実践内容について報告する。

<キーワード> マッチング、個人合理的、ブロック、安定的

1. はじめに

2008年に改訂された高等学校学習指導要領数学編の【改訂の趣旨 イ 改善の具体的事項】に、「高等学校においては、目標について、高等学校における数学学習の意義や有用性を一層重視し改善する。」とある。さらに、【1】の目標に、「事象を数理的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」とある。よって、数学のよさや意義、有意性を生徒が認識でき、そのうえで活用できるような授業開発が重要視されていると考えられる。しかし残念ながら、授業をした生徒は、数学に対して「役に立つ」といった感覚をほとんど持っていなかった。この原因の一つが、生徒が、普段の授業において、身の周りの問題を数学的に取り扱い、それを数学的に解決するという経験をほとんどしていないからである。この経験をするために、「数学的に定式化する力」、「定義を理解する力」という2つの力が重要である。「数学的に定式化する力」は、日常の事象を数学的な問題に置き換えるためには必要不可欠である。数学的に定式化された問題は、いくつかの定義によって書かれる。この問題を理解するために、「定義を理解する力」が必要になる。しかしながら、

高校の授業では、与えられた問題の解き方を身に着ける事に時間を取られ、これらの力を養う事が疎かになっている。

以上をふまえて、本研究は身近な問題を数理的に考察し、解決することができる教材を提案する。さらに、その教材が、数学の有用性を実感でき、「数学的に定式化する力」、「定義を理解する力」を養うことができる内容とする。以下にその授業実践の結果を報告する。

2. 授業の概要

2.1. 研究の目的

身近な問題を数理的に考察し、解決することができる教材、さらには数学の楽しさを実感し、「数学的に定式化する力」、「定義を理解する力」を養う教材の開発である。

2.1. 題材について

本稿で提案する授業の題材であるマッチング理論とは、様々な嗜好や希望を持つ対象同士を、どのように組み合わせるかということを経験的に研究する理論である。本研究では、このマッチング理論の中の一対一マッチングとよばれる分野の内容を取り扱う。一対一マッチングとは、一つの対象を他の一つの対象と組み合わせることである。一対一マッチングは結婚マッチングとも呼ばれる。結婚マッチングにおける課題は、複数存在する男性と女

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

性をうまく組み合わせ、望ましい組み合わせを実現することである。今回は場面を合コンとして、そのモデルを考え、望ましい組み合わせを実現する。

また、本研究に「マッチング」を選んだ理由として、マッチングを生徒にとって男女交際の場面に設定することで、生徒が興味を持ちやすいと考えたことがあげられる。また、今後の生活においても学んだことを活かしやすいのではないかと考えた。

2.2 教材について

ねらい(1) 数学の有用性について

社会の中にある問題や自分の身近な問題を学校で学習している数学で解決することができることを知り、数学の有用性を実感できる。

ねらい(2) 数学的に定式化する力について

曖昧な表現を数学的に定式化することができる経験を通して、数学的に定式化する力を養う。

ねらい(3) 定義を理解する力について

「安定的」の定義を知り、定義に基づいて安定的なマッチングを見つけることを通して、定義を理解する力を養う。

ねらい(4) 身の周りにある現象を数学的に扱う能力について

DA アルゴリズムを理解し、DA アルゴリズムが実際の社会のどこで活用することができるのか考えることができる。

内 容

授業で扱った問題は男女交際の場面の1つである合コンである。

ある合コンに村井独歩、向井理、木村拓哉、桐谷美玲、堀北真希、新垣結衣、北川景子が参加している。それぞれ以下のように好きな人の順番が決

まっている。

※左から順番が高い順に並んでいる

※|の右側にいる人は付き合いたくない相手

村井：新垣 堀北 桐谷 | 北川

向井：堀北 北川 新垣 桐谷 |

木村：堀北 桐谷 | 北川 新垣

桐谷：村井 向井 | 木村

堀北：村井 向井 木村 |

新垣：木村 向井 村井 |

北川：木村 | 村井 向井

このとき男性と女性をうまく組み合わせ望ましいカップルをできるだけ多く作れ。

この場面を数学的に定式化していく。その中で、望ましいカップルができるマッチングが安定的なマッチングであることを理解し、DAアルゴリズムを用いて安定的なマッチングを見つける。そして、そのマッチングが安定的なのか確かめることで、問題解決をする。

授業の流れ

<実践前>

実践を行う前日に資料[1]の問題を宿題として与え、何も情報を与えず、考えて来させる。

<1 時間目>

事前問題の交流として、数人に解答と理由を発表させる。その後、授業で実際に数学的に定式化していく。まず、「選好」の定義をする。いくつかの仮定をする。

- ある合コンに男性が M 人、女性が W 人参加している。

- それぞれの男性を $m = 1, 2, 3, \dots, M$ それぞれの女性を $w = M + 1, M + 2, M + 3, \dots, M + W$ と表す。

- 男性は女性に対して、女性は男性に対して必ず選好をもっている。

- 合コン参加者から私たちは選好組

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_M, z_{M+1}, \dots, z_{M+W})$$

を聞き出したものとする。

- ・ 男性 m がカップルになる相手を $\mu(m)$ で表す。
この $\mu(m)$ は女性 w の誰か、もしくは \emptyset である。
 $\mu(m) = \emptyset$ のとき、男性 m は誰ともカップルにならない。
- 同様に女性 w がカップルになる相手を $\mu(w)$ で表す。
- ・ 1 人が複数人とカップルにならないようにする
つまり $\mu(1) = \mu(2) = 4$ ということは起きない。
- ・ $\mu(m) = w$ と $\mu(w) = m$ は同じ事実を意味する。

以上の仮定を全て満たしてカップルができた状態を **マッチング** と定義する。ここまで進んだところで上記の問題を

ある合コンに男性 3 人と女性 4 人が参加している
それぞれの男性は $m = 1, 2, 3$

それぞれの女性は $w = 4, 5, 6, 7$ である

個人の選好が以下のようにになっている

$$\begin{aligned} z_1 : 654\emptyset7 & & z_4 : 12\emptyset3 \\ z_2 : 5764\emptyset & & z_5 : 123\emptyset \\ z_3 : 54\emptyset76 & & z_6 : 321\emptyset \\ & & z_7 : 3\emptyset12 \end{aligned}$$

このとき、望ましいカップルがより多くできるマッチング μ はどのようなものだろうか。

とする。

次に、優れたマッチングを見つけるために、例として 2 通りのマッチングを求める。1 つ目は、男性が名前の順に女性を選ぶという決め方で決まったマッチング μ_1 である。これは

$$\begin{aligned} \mu_1(1) = 6, \mu_1(2) = 5, \mu_1(3) = 4, \mu_1(4) = \\ 3, \mu_1(5) = 2, \mu_1(6) = 1, \mu_1(7) = \emptyset \end{aligned}$$

である。このとき

$$\mu_1(4) = 3 \succ_4 \emptyset$$

であるので、望ましくない。このようなことが起こらないようにするために個人合理的という概念

を以下のように定義する。

マッチング μ が全ての個人 i について $\mu(i) \succeq_i \emptyset$ (i の選好のもとで i のカップルとなる相手 $\mu(i)$ は、独りであるより好きな相手、もしくは i が誰ともカップルにならないこと) が成立する。これを満たすとき、そのマッチング μ は **個人合理的** であるという。

2 つ目は男性 1 が女性 7 とカップルになり、男性 2 が女性 4 とカップルになり、男性 3 は女性 6 とカップルになり、女性 5 は誰ともカップルになれなかったという決め方で決まったマッチング μ_2 である。これは

$$\begin{aligned} \mu_2(1) = 7, \mu_2(2) = 4, \mu_2(3) = 6, \mu_2(4) = \\ 2, \mu_2(5) = \emptyset, \mu_2(6) = 3, \mu_2(7) = 1 \end{aligned}$$

である。このとき

$$4 \succ_1 \mu_2(1) = 7 \text{ かつ } 1 \succ_4 \mu_2(4) = 2$$

である。そのため、男性 1 と女性 4 がカップルとなる方が望ましい。このようなことが起こらないようにするために、ブロックという概念を以下のように定義する。

マッチング μ のもとで (m, w) について

$w \succ_m \mu(m)$ かつ $m \succ_w \mu(w)$ が成り立っているとす

る。

この場合 m と w はマッチング μ に従わず 2 人でカップルになることが考えられる。

このとき (m, w) は μ を **ブロックする** という。

これら 2 つのマッチングの例をもとに安定的という概念を以下のように定義する。

- (1) マッチング μ が個人合理的である。
 - (2) どのような男女のペア (m, w) によっても μ はブロックされない。
- この 2 つの条件を満たすとき、そのマッチング μ は **安定的** であるという。

そして「望ましいマッチング」とは「安定的なマッチング」のことであると理解させる。ここまで進んだところで問題が

ある合コンに男性3人と女性4人が参加している
それぞれの男性は $m = 1, 2, 3$
それぞれの女性は $w = 4, 5, 6, 7$ である
個人の選好が以下のようにになっているとき、望ましいマッチング、すなわち安定的なマッチングはどのようなものだろうか

$\succsim_1 : 654\emptyset7$ $\succsim_4 : 12\emptyset3$
 $\succsim_2 : 5764\emptyset$ $\succsim_5 : 123\emptyset$
 $\succsim_3 : 54\emptyset76$ $\succsim_6 : 321\emptyset$
 $\succsim_7 : 3\emptyset12$

となる。

<1 時間目終了後>

上記の問題を宿題として各自に解いて来させる。

<2 時間目>

解いて来た生徒の解答の交流。理由もつけて発表させる。その後、安定的なマッチングを具体的にみつけることができるDAアルゴリズムの紹介をする。まず、男性側DAアルゴリズムを紹介し、手順に沿いながら使い方を理解する。男性側DAアルゴリズムを適用させて完成したマッチングが安定的なのかを考察する。個人合理的についてと、ブロックできるペアがないことを全員で確認する。その後、女性側DAアルゴリズムを生徒に求めさせ、できたマッチングが安定的なのか個人で演習させる。そして男性側DAアルゴリズムを適用したマッチングと、女性側DAアルゴリズムを適用したマッチングを比較し、考察する。そこで

- ・安定的なマッチングは複数存在することもある。
- ・男性側DAアルゴリズムを用いた方が男性にとっては望ましい結果になる（女性側DAアルゴリズム

についても同様）。

- ・どの安定的なマッチングにおいてもカップルを形成できない男女は同じである。

以上3 点を紹介する。

<実践授業終了数日後>

以下の問題を与え、各自で演習させる。

[問題]

ある合コンに村井独歩、向井理、木村拓哉、桐谷美玲、堀北真希、新垣結衣、北川景子が参加している。それぞれは以下のように好きな人の順番が決まっている。

※左から順番が高い順に並んでいる

※ | の右側にいる人は付き合いたくない相手

村井：桐谷 堀北 北川 | 新垣

向井：堀北 新垣 桐谷 | 北川

木村：桐谷 北川 | 新垣 堀北

桐谷：木村 向井 村井 |

堀北：木村 村井 向井 |

新垣：木村 村井 | 向井

北川：村井 向井 | 木村

このとき男性と女性をうまく組み合わせて望ましいカップルをできるだけ多くつくれ。

展開案については本文の最後に添付する。

3. 実践結果

3.1 授業実践

授業名: マッチング ～合コンを成功させよう～

場所: 岐阜県立関高等学校2-7 教室

日時: 平成27 年11 月11 日(水) 13:50~14:35

平成27 年11 月12 日(木) 11:30~12:15

対象: 岐阜県立関高等学校2 年生 理系_3 コース (24 人)

クラスの状況: このクラスは理系のクラスである。

理系約160人の学力上位80人を除き、残りの80人をランダムで3つに分けたクラスの1つである。そのため生徒の学力が高いわけではなく、中には数学が嫌いな生徒もいる。

3.2 活動の様子

今回授業を進めていくにおいて、スライドと学習プリント[資料1]を使った。

<第一時>

授業開始時に事前問題の解答の交流を行った。ほとんどの生徒が直感やなんとなく組み合わせを作ってきたようだった。この時点では自信をもって自分の考えを主張できる根拠をもった生徒はいなかった。ここから問題を数字に置き換え、定式化していった。生徒は問題がどんどん数学的になっていくことに興味を示していた。選好の定義や、マッチングの定義でも具体例を示しながら進んだため、和やかな雰囲気ですべての授業ができた。個人合理的の定義は分かりやすかったようだが、ブロックの定義が捉えにくかったようだ。実際に4人の生徒に前で実践してもらうことで多くの生徒はなんとなく理解できたようだ。しかし数人の生徒はここからついていけなくなってしまったようだ。個人合理的とブロックをもとに安定的の定義をしたところまでで予定通り授業が終わった。2度目の調査問題として、安定的なマッチングを作ってくるようにした。

<第二時>

宿題の確認から。安定的の概念が分かっても、それを満たすマッチングを見付けられた生徒はほとんどいなかった。ただ、共通の認識として安定的なマッチングを見付けることは難しいということを感じたようだった。そこでDAアルゴリズムを紹介した。男性側DAアルゴリズムの手順を紹介し、得られたマッチングが安定的であることも証明した。手順に関しては生徒も納得しながら聞いていたようだが、証明のときは何故そのようなことをする必要があるのかという顔をしながら聞いている生徒が数人いた。これらの後に女性側DAアルゴ

リズムを用いて生徒にマッチングをつくらせ、そのマッチングが安定的であることを証明させた。この演習では理解度の差によって、早くできる生徒と意味が分からないため進めない生徒とはつきり分かれてしまった。マッチングを作るまでは機械的にできる生徒が多かったが、証明では手が付けられない生徒が増えた。この演習の時間が生徒全体を見ると少なかつたように感じる。残り5分程でも多数の生徒ができていない状況だったが、授業のまとめをした。DAアルゴリズムが他にどのような場面で使われているのかという生徒同士の交流の時間は設けられなかった。

4. 授業に対する考察

第2時間目の授業後に、生徒24人に対しアンケートを実施した。また、実践授業前、第1時間目終了後、実践終了数日後の計3回調査問題を行った。アンケートの回答と調査問題の結果から授業に対する考察を行う。

4.1 生徒の感想

- ・人の好みも数学におきかえることができるのに驚いた。
- ・問題がどんどん数学的になっていって面白かった。
- ・はじめに合コンと聞いてイメージしたより数学的で驚いた。
- ・日常生活でおこることを数学的に考えていくことに面白さを感じた。
- ・ベストなカップルの組み合わせまで数学で導き出せることが面白かった
- ・個人のニーズに応えながらより多くの組み合わせをつくることにマッチングの素晴らしさを感じた。
- ・初めて将来使えそうな数学だった。
- ・数学が日常で使えることに面白さを感じた。
- ・数学とは全く関係ないと思っていたことが数学で解くことができ驚いた。
- ・直感で選んだ方がうまくいきそう。
- ・合コンの幹事くらいしか具体的に思いつかない。

4.2 アンケート結果

(1) 定式化の面白さを感じましたか。

感じた。 13人

やや感じた。 11人

あまり感じなかった。 0人

感じなかった。 0人

(2) 数学のよさを感じましたか。

感じた。 13人

やや感じた。 9人

あまり感じなかった。 2人

感じなかった。 0人

(3) 今回学んだことは日常生活で生かせそうですか。

生かせそう。 8人

やや生かせそう。 11人

あまり生かせなさそう。 6人

生かせなさそう。 0人

(4) どこで生かせそうですか。

実際の合コン、テニスのペア決め、大学受験、就職活動、会社の人事、クラス分け、ドラフト、チーム決め、体育祭の二人三脚、席決め

4.3 調査問題結果

1回目

行った時期：実践授業の前

生徒の状況：何もヒントがない

調査した力：数学的に定式化する力

出題意図：曖昧な「望ましい」を数学的に定式化してることができるか

結果

根拠を持って解答できた 1人

直感でできた 14人

できなかった 7人

その他(欠席者) 4人

2回目

行った時期：1時間目終了後

生徒の状況：安定的の概念の定義を知っている。

調査した力：定義を理解する力

出題意図：安定的の概念を理解して安定なマッチングを求めることができるか。

結果

できた 3人

間違えた 12人

できなかった 7人

その他(欠席者) 4人

3回目

行った時期：2時間目終了から2週間後

生徒の状況：アルゴリズムを知っている

調査した力：解答手順に従って解答を見つける力

出題意図：教えられた解答手順を理解して適用できるか。

結果

できた 18人

できなかった 6人

4.4 ねらいの達成度

数学の有用性について

アンケート結果から、ほとんどの生徒が定式化の面白さ、数学のよさを感じることができたといえる。また、生徒の感想でも「初めて将来使えそうな数学だった。」というもの等、肯定的なものが多くあった。したがって概ね達成できたといえる。

数学的に定式化する力について

1回目の調査テストの結果から、「生徒の現状として曖昧な表現を自分なりに定式化することは苦手である」ということが分かった。しかし、この授業を終えてこの力が成長したのかという部分は調べることができなかった。したがって、達成できたとは言えない。

定義を理解する力について

2回目の調査テストの結果から、「「望ましい」を定式化できる定義を知っても、活用することができない生徒が過半数」であることが分かった。この原因として抽象的な定義を理解することが困難な生徒が多いということが分かった。しかし、授業を終えてこの力が成長したのかという部分は調べることができなかった。したがって達成できたとは言えない。

身の周りにある現象を数学的に扱う能力について

アンケート結果から、約8割の生徒は日常生活で活かせそうと感じた。どこで活かせそうかという質問に対しても色々な場面が出た。また、3回目の調査テストでも約7割の生徒はDAアルゴリズムを適用することができた。これらから、活かす場を想像することができる生徒が多く、さらに手順さえ分かれば適用し何かを求める力があるとは言える。しかし、アンケートでは約2割の生徒はあまり活かせないと解答。また、調査テストも事前問題の選択の順序を変えただけのものである。したがって、他の場面で実際に適用できる力が養えたとは言えない。ゆえに達成できたとは言いきれない。

5 今後の課題

今回の実践で挙げられる課題点は2つある。1つ目は、身の周りにある現象を数学的に扱う能力についてである。今回の実践で生徒が解答手順に従って解を求める力があることは分かった。しかし、その力を日常生活に応用するためには、さらに習熟度が必要であることが分かった。今回の実践では、その時間がなく、また、生徒間で日常での場面を考える時間も設けられなかった。したがって、これらを改善するためには、もっと練習量を積ませることと、授業の最後に応用させる時間を設けることが必要である。2つ目は、身の回りの現象を数学的に定式化する力、定義を理解する力を養えた授業とは言えないことである。今回は全3回の調査テストを用いて生徒の現状のこれらの力を調査することはできた。しかし、授業後にこれらの力

の成長度合いを確認する調査を用意できなかった。また、自分自身がこれらの力に対する分析が不十分だった。今回の教材はこれらの力を調査する教材には適していたが、養うことができたのかを調べるためには、さらに別の調査方法が必要であると分かった。したがって、これらを改善するためには、まず自分自身がこれらの力についてさらに分析していかなければならない。また、生徒のこれらの力がどの程度あるのかといったことも事前に調査してから授業に臨まなくてはならない。これらの課題は見つかったが、生徒が数学の有用性に気付けたこと、普段のテストではなかなか測れない身の回りの現象を数学的に定式化する力、定義を理解する力を調査し、生徒の現状を知ることができた。また生徒が手順に従って解答する力があるということも知ることができた。来年から教壇に立つことになる私にとってこれらは大きな収穫となった。

参考文献

- [1] 文部科学省, 高等学校指導要領数学編(2008)
- [2] 坂井豊貴, マーケットデザイン入門, ミネルヴァ書房(2010)

展開案 <1時間目>

展開	主な学習活動	指導上の留意点
導入	<p>○問題の提示</p> <p>ある合コンに村井独歩、向井理、木村拓哉、桐谷美玲、堀北真希、新垣結衣、北川景子が参加している</p> <p>それぞれは以下のように好きな人の順番が決まっている</p> <p>※左から順番が高い順に並んでいる</p> <p>※ の右側にいる人は付き合いたくない相手</p> <p>村井：新垣 堀北 桐谷 北川 桐谷：村井 向井 木村向井： 堀北 北川 新垣 桐谷 堀北：村井 向井 木村 木村：堀北 桐谷 北川 新垣 新垣：木村 向井 村井 北川：木村 村井 向井</p> <p>このとき男性と女性をうまく組み合わせて望ましいカップルをできるだけ多くつくろう！！</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・授業前に個人で問題に取り組んでてもらおう ・授業前には何もヒントを与えず、自分なりの根拠で「望ましい」を定式化できるかをはかる ・自分なりの根拠をもって解答できたかを発表させる
展開 I	<p>○考えの交流</p> <p>「望ましい」という概念が曖昧で困ったことを共有する</p> <p>○問題の定式化</p> <p>いくつかの仮定をしながら問題を少しずつ定式化していく</p> <p>① ・ある合コンに男性がM人、女性がW人参加している</p> <ul style="list-style-type: none"> ・それぞれの男性を$m = 1, 2, \dots, M$ それぞれの女性を$w = M + 1, M + 2, \dots, M + W$と表す 	<ul style="list-style-type: none"> ・個人名は本質的には意味がなく、数字に置き換えても問題がないことを理解させる ・問題の表記が楽になったことを実感させる

展開
I

この時点で問題は以下ようになる

ある合コンに**男性3人と女性4人**が参加している
 それぞれの**男性**は $m = 1, 2, 3$ それぞれの**女性**は $w = 4, 5, 6, 7$
 それぞれは以下のように好きな人の順番が決まっている
 ※左から順番が高い順に並んでいる
 ※ | の右側にいる人は付き合いたくない相手

1 : 6 5 4 7	4 : 1 2 3
2 : 5 7 6 4	5 : 1 2 3
3 : 5 4 7 6	6 : 3 2 1
	7 : 3 1 2

このとき男性と女性をうまく組み合わせて望ましいカップルをできるだけ多くつくろう！！

② ・男性は女性に対して、女性は男性に対して必ず「好きな人の順位」をもっている

好きな人の順位を選好といい、その定義をする

・個人 i に対して \succsim_i : とは i の選好の順序を表したものである

・ \emptyset は独りでいたいということを意味する

例を用いて選好とその記号について慣れる

この時点で問題は以下ようになる

ある合コンに**男性3人と女性4人**が参加している
 それぞれの**男性**は $m = 1, 2, 3$
 それぞれの**女性**は $w = 4, 5, 6, 7$ である
 個人の選好が以下のようにになっている

\succsim_1 : 6 5 4 \emptyset 7	\succsim_4 : 1 2 \emptyset 3
\succsim_2 : 5 7 6 4 \emptyset	\succsim_5 : 1 2 3 \emptyset
\succsim_3 : 5 4 \emptyset 7 6	\succsim_6 : 3 2 1 \emptyset
	\succsim_7 : 3 \emptyset 1 2

このとき男性と女性をうまく組み合わせて望ましいカップルをできるだけ多くつくろう！！

・生徒にとっては初めての記号であるため、時間をかけて定義を理解させる

・記号を用いると簡単に表現できることを実感させる

・問題が徐々に数学の世界に変わってきたことを実感させる

<p>展開 I</p>	<p>③ 私たちの役割を確認する</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 合コン参加者から私たちは全員分の選好 $z = (z_1, z_2, \dots, z_M, z_{M+1}, \dots, z_{M+W})$ を聞き出したものとする ・ ある決め方で男性 m がカップルになった相手を $\mu(m)$ で表す この $\mu(m)$ は女性 w の誰か、もしくは \emptyset である $\mu(m) = \emptyset$ のとき、男性 m は誰ともカップルにならない 同様に女性 w がカップルになる相手を $\mu(w)$ で表す <ul style="list-style-type: none"> ・ 1人が複数人とカップルにならないようにする つまり $\mu(1) = \mu(2) = 4$ ということは起きない ・ $\mu(m) = w$ と $\mu(w) = m$ は同じ事実を意味する <p>④ マッチングの定義をする</p> <p>今までの条件を全て満たしてカップルができた状態</p> $\mu = (\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(M), \mu(M+1), \dots, \mu(M+W))$ <p>のことをマッチングという！！</p> <p>この時点で問題が以下ようになる</p> <div style="border: 2px solid black; background-color: yellow; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>ある合コンに男性3人と女性4人が参加している それぞれの男性は $m = 1, 2, 3$ それぞれの女性は $w = 4, 5, 6, 7$ である 個人の選好が以下のようにになっている</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">$z_1: 6\ 5\ 4\ \emptyset\ 7$</td> <td style="padding: 2px;">$z_4: 1\ 2\ \emptyset\ 3$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$z_2: 5\ 7\ 6\ 4\ \emptyset$</td> <td style="padding: 2px;">$z_5: 1\ 2\ 3\ \emptyset$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$z_3: 5\ 4\ \emptyset\ 7\ 6$</td> <td style="padding: 2px;">$z_6: 3\ 2\ 1\ \emptyset$</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">$z_7: 3\ \emptyset\ 1\ 2$</td> </tr> </table> <p>このとき、望ましいカップルがより多くできるマッチング μ はどのようなものだろう</p> </div>	$z_1: 6\ 5\ 4\ \emptyset\ 7$	$z_4: 1\ 2\ \emptyset\ 3$	$z_2: 5\ 7\ 6\ 4\ \emptyset$	$z_5: 1\ 2\ 3\ \emptyset$	$z_3: 5\ 4\ \emptyset\ 7\ 6$	$z_6: 3\ 2\ 1\ \emptyset$		$z_7: 3\ \emptyset\ 1\ 2$	<ul style="list-style-type: none"> ・ 幹事として選好を全員分知っていることが前提でなければならないことを理解させる ・ 文字が急に出てくるため、丁寧に時間をかけて進める ・ マッチングとは決め方ではなく、ある決め方によって決まった状態のことを指すということを理解させる
$z_1: 6\ 5\ 4\ \emptyset\ 7$	$z_4: 1\ 2\ \emptyset\ 3$									
$z_2: 5\ 7\ 6\ 4\ \emptyset$	$z_5: 1\ 2\ 3\ \emptyset$									
$z_3: 5\ 4\ \emptyset\ 7\ 6$	$z_6: 3\ 2\ 1\ \emptyset$									
	$z_7: 3\ \emptyset\ 1\ 2$									
<p>展開 II</p>	<p>○ 何らかの意味で優れたマッチングを見つける</p> <p>① 例 1 として</p> <p>名前の番号順に男性が女性を選ぶマッチング μ_1 を求めていく</p> <p>$\mu_1(1) = 6, \quad \mu_1(2) = 5, \quad \mu_1(3) = 4, \mu_1(4) = 3, \mu_1(5) = 2$ $\mu_1(6) = 1, \mu_1(7) = \emptyset$ となる</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ ここでマッチングの表記の仕方を理解できるようにする 								

<p>展開Ⅱ</p>	<p>ここで「$\mu_1(4) = 3 <_4 \emptyset$ つまり このマッチングμ_1によって女性4は独りであるより嫌な相手である男性3とカップルにされてしまった」という事実を確認する</p> <p>この事実から個人合理的の概念の必要性を訴え、定義する マッチングμが全ての個人iについて</p> $\mu(i) \succeq_i \emptyset$ <p>(iの選好のもとでiのカップルとなる相手$\mu(i)$は、独りであるより好きな相手、もしくはiが誰ともカップルにならないこと)が成立する</p> <p>これを満たすとき、そのマッチングμは個人合理的であるという</p> <p>②例2として</p> $\mu_2(1) = 7, \quad \mu_2(2) = 4, \quad \mu_2(3) = 6, \mu_2(4) = 2, \mu_2(5) = \emptyset$ $\mu_2(6) = 3, \mu_2(7) = 1$ <p>を満たすマッチングμ_2を与える</p> <p>ここで「$4 >_1 \mu_2(1) = 7$ かつ $1 >_4 \mu_1(4) = 2$であるため男性1と女性4がカップルになった方がいい」という事実を確認する</p> <p>この事実からブロックの概念を定義し、導入する マッチングμのもとで(m, w)について</p> $w \succ_m \mu(m) \text{ かつ } m \succ_w \mu(w)$ <p>が成り立っているとする</p> <p>この場合mとwはマッチングμに従わず2人でカップルになることが考えられる</p> <p>このとき(m, w)はμをブロックするという</p> <p>③これら二つの概念をもとに安定的という概念を定義し、これを満たすマッチングが優れたマッチングであることを確認する</p> <p>(1) マッチングμが個人合理的である</p> <p>(2) どのような男女のペア(m, w)によってもμはブロックされない</p> <p>この2つの条件を満たすとき、そのマッチングμは安定的であるという</p> <p>○個人で安定的なマッチングを見つけることを宿題として1時間目を終了する</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ここまでは生徒は聞くだけになってしまっているため、ここは生徒からの気づきで進めるように発問する ・記号で表現する分理解度が下がると思われるため、言葉でも説明し理解させる ・この部分は分かりづらく、生徒が発見するのは困難だと考えられる 生徒から意見が出なければこちらから提示し、納得させる ・ブロックの概念が最も理解し難いため、ダブル浮気という表現でイメージを持たせる 実際に数人の生徒で実践する ・安定的なマッチングを求めていくことを理解させる
------------	--	---

展開案<2 時間目>

展 開	主な学習活動	指導上の留意点
<p>展開 III</p> <p>展開 IV</p>	<p>○宿題の交流 各々が考えてきたマッチングを全体の場で発表する 安定的なマッチングを見つけることの難しさを共有する</p> <p>○男性側 DA アルゴリズムの紹介 アルゴリズムの手順を紹介しながら生徒に理解させる (ステップ 1) ・男性が同時に「独りである」よりマシかつ自分の一番好きな順位の女性に告白する ・女性は告白された男性の中で「独りである」よりマシでかつ一番順位の高い男性とキープ関係になる (ステップ 2)以降 ・キープされていない男性は振られた相手以外でかつ「独りである」よりマシな女性の中で一番順位が高い女性に告白する ・女性は告白された男性の中で「独りである」よりマシでかつ一番順位の高い男性とキープ関係になる ・キープ関係がある男性は告白しない (プロセスの終了) ・告白のできる男性がいなくなった時点でアルゴリズムは終了し、その時点でのキープ関係がカップルとして決定する 男性側 DA アルゴリズムで決まったマッチングをμとすると $\mu(1) = 6, \mu(2) = 5, \mu(3) = \emptyset, \mu(4) = \emptyset, \mu(5) = 2$$\mu(6) = 1, \mu(7) = \emptyset$</p> <p>○この$\mu$は本当に安定的なのか確かめる ①個人合理性について $\mu(1)$から 1 つずつ調べていくことによって示せる</p>	<p>・安定的であることをどのように確かめたのかという部分に注目する</p> <p>・それぞれのステップで実際にキープ関係がどのようにできていくか生徒に確かめながら進める 生徒が「自分たちでカップルを決めている」という実感が持てるようにする</p> <p>・こちらから当たり前のように与えたものに対して疑問を持てるように指導する ・個人合理的の概念について確認し直してから進める</p>

<p>展開 IV</p>	<p>②ブロックについて 全部で 12 種類ある男女のペアについて 1 つずつ確認していく これによって示せる</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ブロックの概念を確認し直してから進める ・いくつかは実際にこちらが確かめて、そのあとは生徒に演習させる
<p>展開 V</p>	<p>① ②よりマッチングμが安定的であることを示せた そして男性側 DA アルゴリズムを用いることで安定的なマッチングを見つけることが可能であることを理解する ○女性側 DA アルゴリズムでも安定的なマッチングが見つけられるのか検証する まずは女性側 DA アルゴリズムによってできるマッチングμ'を求めさせる 次に男性側 DA アルゴリズムの時と同様に安定的であるか検証する</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・男性側 DA アルゴリズムをもとに生徒に演習させる ・ここも生徒の演習の時間とし、机間指導にあたる
<p>発展</p>	<p>○2 つのマッチングを比較する 2 つのマッチングが異なっていることから、安定的なマッチングが複数存在することもあるという事実を知る 「男性側にとってはマッチングμの方が、女性側にとってはマッチングμ'の方がそれぞれ好ましい結果となっている」 「どちらのマッチングでもカップルになれない男女は同じ人」という事実に気付く</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ここは生徒に考えさせ、気付かせる 生徒に発見したという感覚を持たせる ・生徒同士が活用できる場面を交流できるようにする
<p>まとめ</p>	<p>○授業のまとめ これらの事実は今回の場合だけでなく、一般に成り立つ事実であることを知り、DA アルゴリズムを適用することで安定的なマッチングを導くことができ、安定的なマッチングが望ましいマッチングであることを確認する 他の場面で DA アルゴリズムが使われている例を紹介する (早稲田大学の例等) 授業後数日経った後にまた問題をさせる</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ここは生徒に考えさせ、気付かせる 生徒に発見したという感覚を持たせる ・生徒同士が活用できる場面を交流できるようにする

[資料 1]学習プリント

マッチング

～合コンを成功させよう～

問題

ある合コンに村井独歩、向井理、木村拓哉、桐谷美玲、堀北真希、
新垣結衣、北川景子 が参加している

それぞれは以下のように好きな人の順番が決まっている

※左から順番が高い順に並んでいる

※ | の右側にいる人は付き合いたくない相手

村井：新垣 堀北 桐谷 北川	桐谷：村井 向井 木村
向井：堀北 北川 新垣 桐谷	堀北：村井 向井 木村
木村：堀北 桐谷 北川 新垣	新垣：木村 向井 村井
	北川：木村 村井 向井

このとき男性と女性をうまく組み合わせ望ましいカップルをで
きるだけ多くつくろう！！

仮定

- ある合コンに男性が M 人、女性が W 人参加している
 - それぞれの男性を $m = 1, 2, \dots, M$
- それぞれの女性を $w = M + 1, M + 2, \dots, M + W$
- と表す
- 男性は女性に対して、女性は男性に対して必ず「選好」をもっている

選好とは...

その人の好みのこと

個人 i に対して \succsim_i とは i の選好の順序を表したものである

個人 i の選好のもとで

x を x' よりも好むということ $\leftrightarrow x \succ_i x'$

個人 i の選好のもとで

x を x' と同じくらい好むということ $\leftrightarrow x \sim_i x'$

個人 i の選好のもとで

x を x' よりも好むか同じくらい好むということ $\leftrightarrow x \succeq_i x'$

※ここでの好むとはカップルになりたいという気持ちのことである

※ \emptyset は独りでいたいということを意味する

問題

ある合コンに男性3人と女性4人が参加している

それぞれの男性は $m = 1, 2, 3$

それぞれの女性は $w = 4, 5, 6, 7$ である

個人の選好が以下のようにになっている

$\succsim_1 : 6\ 5\ 4\ \emptyset\ 7$

$\succsim_4 : 1\ 2\ \emptyset\ 3$

$\succsim_2 : 5\ 7\ 6\ 4\ \emptyset$

$\succsim_5 : 1\ 2\ 3\ \emptyset$

$\succsim_3 : 5\ 4\ \emptyset\ 7\ 6$

$\succsim_6 : 3\ 2\ 1\ \emptyset$

$\succsim_7 : 3\ \emptyset\ 1\ 2$

このとき男性と女性をうまく組み合わせて望ましいカップルをできるだけ多

仮定

- 合コン参加者から私たちは選好組

$$\succsim = (\succsim_1, \succsim_2, \dots, \succsim_M, \succsim_{M+1}, \dots, \succsim_{M+W})$$

を聞き出したものとする

- 男性 m がカップルになる相手を $\mu(m)$ で表す
この $\mu(m)$ は女性 w の誰か、もしくは \emptyset である
 $\mu(m) = \emptyset$ のとき、男性 m は誰ともカップルにならない
同様に女性 w がカップルになる相手を $\mu(w)$ で表す
- 1人が複数人とカップルにならないようにする
つまり $\mu(1) = \mu(2) = 4$ ということは起きない
- $\mu(m) = w$ と $\mu(w) = m$ は同じ事実を意味する

今までの条件を満たす

$$\mu = (\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(M), \mu(M+1), \dots, \mu(M+W))$$

のことをマッチングという！！

問題

ある合コンに男性3人と女性4人が参加している

それぞれの男性は $m = 1, 2, 3$

それぞれの女性は $w = 4, 5, 6, 7$ である

個人の選好が以下のようにになっている

$\succsim_1 : 654\emptyset7$

$\succsim_4 : 12\emptyset3$

$\succsim_2 : 5764\emptyset$

$\succsim_5 : 123\emptyset$

$\succsim_3 : 54\emptyset76$

$\succsim_6 : 321\emptyset$

$\succsim_7 : 3\emptyset12$

このとき、望ましいカップルがより多くできるマッチング μ はどのようなものだろう

例 1

名前の番号順に男性が女性を選ぶマッチング μ_1

男性1が女性6とカップルになる よって $\mu_1(1) = 6$

男性2が女性5とカップルになる よって $\mu_1(2) = 5$

男性3は女性5とカップルになりたいが、女性5は男性2と
カップルになっているため不成立

次に順位の高い女性4とカップルになる よって、()

女性7は誰ともカップルになれなかった よって、()

以上よりマッチング μ_1 は

()

となる

個人合理的とは...

マッチング μ が全ての個人 i について () が成立すること

これを満たすとき、そのマッチング μ は 個人合理的 であるという

例 2

マッチング μ_2

このようなマッチング μ_2 は

())

ブロックとは...

マッチング μ のもとで (m, w) について

() かつ () が成り立っているとする

() はカップルとなる相手 () よりも

() の方が好き

かつ

() はカップルとなる相手 () よりも

() の方が好き

という意味

この場合 m と w はマッチング μ に従わず 2 人でカップル

になることが考えられる

このとき (m, w) は μ を ブロックする という

安定的とは...

- (1) マッチング μ が()である
- (2) どのような男女のペア (m, w) によっても μ は()されない
- この 2 つの条件を満たすとき、そのマッチング μ は安定的であるという

問題

ある合コンに男性 3 人と女性 4 人が参加している

それぞれ、男性は $m = 1, 2, 3$ 、女性は $w = 4, 5, 6, 7$ である

個人の選好が以下のようにになっているとき、

望ましいマッチング、すなわち安定的なマッチング

はどのようなものだろうか

$\succsim_1 : 6 5 4 \emptyset 7$

$\succsim_4 : 1 2 \emptyset 3$

$\succsim_2 : 5 7 6 4 \emptyset$

$\succsim_5 : 1 2 3 \emptyset$

$\succsim_3 : 5 4 \emptyset 7 6$

$\succsim_6 : 3 2 1 \emptyset$

$\succsim_7 : 3 \emptyset 1 2$

男性側 DA アルゴリズム (男性が告白する側) を使って安定的なマッチングを見つけよう！！

(ステップ 1)

- ・男性が同時に「独りである」よりマシかつ自分の一番好きな順位の女性に告白する
- ・女性は告白された男性の中で「独りである」よりマシでかつ一番順位の高い男性をキープしていく

男性1は1番好きな女性6に、男性2,3は1番好きな女性5にそれぞれ告白する

女性6は $1 \succ_6 \emptyset$ なので男性1をキープする

女性5は $2 \succ_5 3 \succ_5 \emptyset$ なので順位の高い男性2をキープして

男性3を振る

※今後その時点でのキープ関係を \heartsuit を用いて表す

$(1 \heartsuit 6), (2 \heartsuit 5)$

(ステップ 2)

- キープされていない男性は振られた相手以外でかつ「独りである」よりマシな女性の中で一番順位が高い女性に告白する
- 女性は告白された男性の中で「独りである」よりマシでかつ一番順位の高い男性をキープしていく
- キープされている男性は告白しない

男性3 はこれまで振られていない女性の中で1番好きな女性()
に告白 ()だから女性()は男性3を
(♡),(♡)

以下 (ステップ 2) を繰り返す

(プロセスの終了)

$\emptyset >_3 7$ だから男性3 はこれ以上告白しない

その他の男性は皆誰か女性にキープされているためもう告白
を行うものはいない

よってこの時点でのキープ関係 $(1 \heartsuit 6), (2 \heartsuit 5)$ がそのまま
カップルとして決定する

以上より、このマッチングを μ とすると()

このマッチング μ は本当に安定的なの
か?? 証明してみよう!!

i)条件(1)について

$\mu(1) = ()$ より

$\mu(2) = ()$ より

$\mu(3) = ()$ より

$\mu(4) = ()$ より

$\mu(5) = ()$ より

$\mu(6) = ()$ より

$\mu(7) = ()$ より

以上より、条件(1)を

ii)条件(2)について

今考えられる男女のペア (m, w) には以下の
12通りがある

$(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)$

$(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7)$

$(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7)$

$(1, 6), (2, 5)$ は μ によってカップルにされて
いるためブロックできない

男性1に注目すると、一番好きな()と
カップルになれたため、()
もブロックできない

同様に男性2に注目すると、()
もブロックできない

残りは

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$

$\mu(4) = \emptyset >_4 3$ より、 $(3, 4)$ もブロックできない

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$

以上より、条件(2)を

i) ii)より、 μ は安定的である！！

女性側 DA アルゴリズム (女性が告白する側)
によってできるマッチングではどのようなカップルが誕生する？

(ステップ 1)

- ・女性が同時に「独りである」よりマシかつ自分の一番好きな順位の男性に告白する
- ・男性は告白された女性の中で「独りである」よりマシでかつ一番順位の高い女性をキープしていく

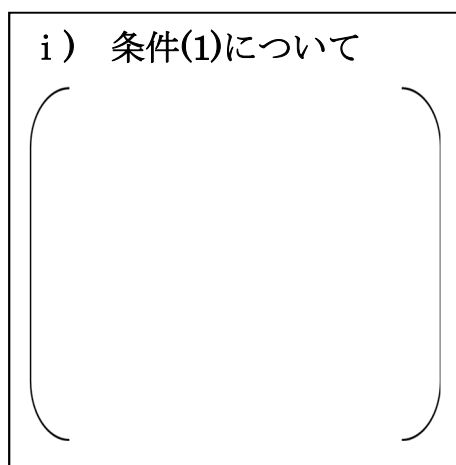
(ステップ 2)

- ・ キープされていない女性は振られた相手以外でかつ「独りである」よりマシな男性の中で一番順位が高い男性に告白する
- ・ 男性は告白された女性の中で「独りである」よりマシでかつ一番順位の高い女性をキープしていく
- ・ キープされている女性は告白しない

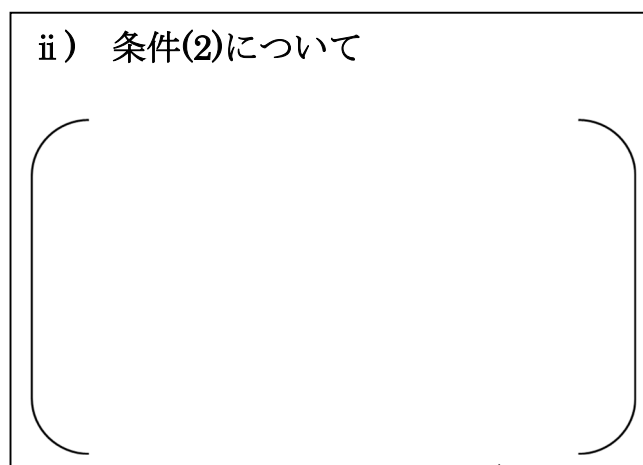
以下 (ステップ 2) を繰り返す
(プロセスの終了)

このマッチング μ' も安定的なのか証明してみよう！！

i) 条件(1)について



ii) 条件(2)について



i) ii)より、 μ は安定的である！