岐阜数学教育研究
2015，Vol. 14，14-30

高校数学における統計学の研究

堤寛司[1]，山田雅博[2]，田中利史[2]

生徒が数学を身につけ，日常生活の事象に活用していくためには，定義や定理の意味を正しく理解して正しく使うことができ，数学の有用性を生徒が感じることが必要である。そこで，本論文では，中学校 2 年生から高校 3 年生を対象に，データを何度も分析する活動を通して，定義や定理を定着させること，また，日常生活に存在するデータを様々な面から分析する態度を育成することを目標とした教材開発と実践を行った。この実践では，根拠をはっきりさせてデータを分析させることで，日常生活に存在するデータを様々な面から分析する態度を育てていくことを重点に置いている。

〈キーワード〉分散，散布図，共分散，相関係数

1.はじめに

中学校 2 年生～高校 3 年生 40 人を対象にした「高校数学セミナー」において，岐阜大学で平成 27 年 8 月 1 日，2 日の 2 日間をつかい実践を行った。

この実践の目的は，生徒たちが日常生活に存在するデータに関して批判的に読もうとする態度を育てることである。現代を生きる生徒たちは，情報社会の中で生活をしている。このことにより，データを読むということを避けて生活していくことは難しいことである。日常生活に存在するデータの中には，データの 1 つの側面だけを見て判断して良いものと，そうではないものが存在している。このようなデータに対応し，少しでも良い情報を選択できる力を身につけさせることが必要であり，その第一歩として，日常生活のデータに興味，関心を持ち，生徒たちがデータに出会ったときに，少しでも出会ったデータに関して考えてみようとする姿勢が大切であると感じる。

今回のセミナーでは，2 つのデータがどのように関係しているかを調べることを目標にして行っていく。そのために必要となる定義や定理の用い方を演習問題を通して定着させる。そして，その定義や定理を使って，実際に日常生活に存在するデータをグループで協力をして分析する活動を行うことにより，数値で関係を表すことの良さや，グラフを描く時の目盛りの間隔や範囲を考えるなどといったデータを分析する上で気をつけることに触れ，日常生活でもデータを様々な面から分析する態度が育つような教材を開発し，実践することにした。

2.授業の概要

2.1 題材について

今回の実践授業の主な題材は散布図と相関係数である。

今回は，以下の 3 点についての活動を行う。

（1）中学校 1 年生の復習である平均，範囲の学習を行い，平均偏差，分散，標準偏差を学ぶ。

（2）2 つのデータの関係を分析するために，散布図，相関関係，共分散，相関係数を学ぶ。

（3）日常生活のデータを使って，データを分析する活動を行う。

定義や定理を学び，演習問題を行うだけではなく，実際に日常生活のデータを分析し，模造紙に結果と考察をまとめる活動を行うことで，データに興味，関心を持ちやすいと考えた。

[1] 岐阜大学大学院教育学研究科
[2] 岐阜大学教育学部

(1) について

平均，範囲の学習は，中学校 1 年生で学習しているため既習事項である。しかし，今回は対象の学年の幅が広いということと，範囲については中学校 1 年生で学習後，生徒が触れる機会が少ない内容であると考え，平均，範囲の復習から行った。

生徒数が異なる2つのクラスの数学のテストの結果からどちらのクラスの成績が良いかを調べよう。また，そのように考える理由も書こう。
(1)1組のほうができる
(2)2組のほうができる
(3)分からない

	1組	2組
1	73	40
2	73	56
3	39	44
4	73	67
5	44	56
6	30	62
7	34	56
8	52	58
9	73	70
10	40	67
11	75	42
12	45	64
13	74	67
14	74	95
15	76	55
16	85	63
17		58

図１　導入の問題

図 1 は，平均，範囲共に等しい表を使った問題である。この問題を用いて，平均と範囲の復習を行っていく。平均と範囲の値を求めた結果，平均と範囲を用いてもどちらのクラスの成績が良いかは判断できないことに気づかせる。範囲は，資料の散らばり具合を表す代表値として中学校では学んでいる。範囲の値と数直線におけるデータの分布の仕方を比較して，データの散らばり具合を知るためには，範囲だけでは不十分であると気づかせる。

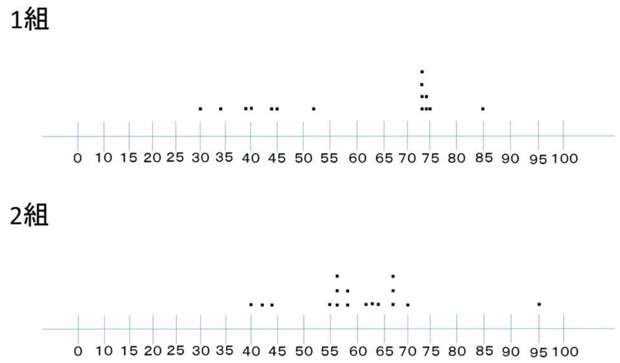


図２　数直線

生徒が，範囲は等しいがデータの散らばり具合は違うことがあるということに気づいてもらうために，範囲の値は等しいが，1 組のデータの散らばり方は 1 こぶ型，2 組のデータの散らばり方は 2 こぶ型となっている数直線を使う。

・データの散らばり具合を考えるには・・・
1，どこを基準として，データの散らばり具合を調べるか。→平均
2，基準とした値から，データのそれぞれの値がどれだけ離れているかを求める。
3，データの数値1つあたりが基準とした値からどれだけ離れているかを求める。

図 3.1　データの散らばり具合を数値化する

データの散らばり具合を数値化するために，図 3.1 の 3 つの手順で説明を行う。

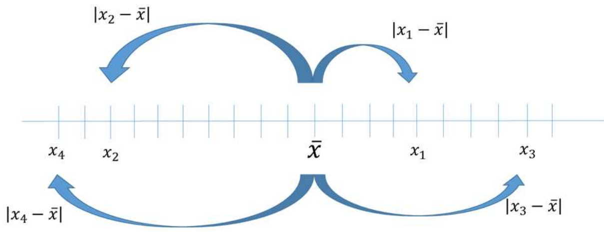


図 3.2　データの散らばり具合を数値化する

図 3.1 と図 3.2 の両方を使い，データの散らばり具合を数値化する方法を説明する。そして，このことを用いて平均偏差を定義する。平均偏差は，高校数学のカリキュラムの中には含まれてはいないが，平均偏差と同じく，データの散らばり具合を表す分散，標準偏差を生徒たちに身につけさせるには，平均偏差を学ぶほうが生徒たちのつまずきが少ないと考え，授業に組み込んだ。また，今回のセミナーでは，対象の生徒の中に和の記号 Σ が既習事項でない生徒が多くいるため，Σ を使用せずに定義，定理をする。

定理①

$$s_x^2 = \frac{1}{n}({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2) - \bar{x}^2$$

(xの分散)＝(x^2の平均値)－(xの平均値)^2

図４　分散の定理

今回のセミナーでは，計算は全て電卓を使って行う。そのため，少しでも計算を簡易にするほうが計算ミスが少なくなり，セミナー終盤のデータを分析する活動がより有意義なものとなると考え図 4 の分散の定理を提示し，生徒たちに証明をさせる。

〇電卓活用法
（1）2乗の計算の仕方

（数字）×＝

（2）メモリー機能の活用
M＋:表示されている数値をメモリーに加算する。
M－:表示されている数値をメモリーから減算する。
MR :メモリーからデータを呼び出す。
MC :メモリーのデータを消去する。
MRC :1回押すとメモリーからデータを呼び出す。2回押すと，メモリーのデータを消去する。

図 5　電卓活用法

また，図 5 のような電卓の機能の説明を行う。機能の使い方に慣れてもらうために，演習問題を行う。この演習問題では，今回生徒たちが計算することになる分散，共分散，相関係数を求める式と同じ式の問題に取り組ませる。こうすることで後に分散，共分散，相関係数を求めるときのつまずきを少なくすると共に，分散，共分散，相関係数を求めるときに電卓の使い方の復習として見直せるようにした。

図 4 の分散の定理と図 5 の電卓活用法を用いて，1 組と 2 組の分散を求めてもらう。ここでは分散を求めても，まだどちらのクラスの方が成績が良いかを判断できないことに気づかせる。ここでは，自分なりの根拠をはっきりさせて，1 組と 2 組のどちらのクラスの成績がいいかを考えてもらう。そのようにすることで，日常生活のデータを見た際にも，受身にならず，データを批判的に読む態度を育てるきっかけとする。全体交流では数値または，数直線を見て成績を比較する生徒がいると考えられるので，図 6 のようにまとめる。

〇まとめ
・数値で判断することは，大小関係を比較できるという良い点がある反面，データ全体を見ることができないという悪い点もある。
・数直線やグラフで判断することは，データの全体を見ることができるという良い点がある反面，データを客観的に見ることが難しいという悪い点がある。
データを分析するときは，数値だけ，数直線やグラフだけで判断するのではなく，両方を使い，根拠をはっきりさせて判断していく必要がある。

図 6　まとめ 1

（2）について

散布図，相関関係，共分散，相関係数は，高校 1 年生で学ぶ範囲である。今回のセミナーの対象は，中学校 2 年生～高校 3 年生ということもあり初めての内容を学ぶ生徒と，履修を終えている生徒がいる。本授業では，初めて学ぶ生徒にも分かりやすいようにすることはもちろんのこと，散布図と共分散のつながりを詳しく説明したり，共分散の性質であるデータの単位に依存することなどの，学校で教わる内容よりも一歩踏み込んだ内容を扱うことにより，履修を終えている生徒も内容を深められるようにする。

あるクラス20人の5教科のテストの結果が以下のようになった。
①国語と社会，②数学と理科，③国語と英語，④数学と英語がそれぞれどのような関係があるか調べよう。

①

	国語	社会
1	90	85
2	30	75
3	60	80
4	90	40
5	20	30
6	50	90
7	35	30
8	85	20
9	55	45
10	60	65
11	25	20
12	80	35
13	25	60
14	55	45
15	45	80
16	60	20
17	75	25
18	15	70
19	75	50
20	30	95

②

	数学	理科
1	25	20
2	60	35
3	35	60
4	65	55
5	80	50
6	95	15
7	65	40
8	90	75
9	35	55
10	25	50
11	30	35
12	60	40
13	80	85
14	75	55
15	50	55
16	20	90
17	40	35
18	45	70
19	40	60
20	75	70

③

	国語	英語
1	90	80
2	30	20
3	60	55
4	90	50
5	20	40
6	50	30
7	35	30
8	85	40
9	55	50
10	60	70
11	25	50
12	80	70
13	25	30
14	55	60
15	45	55
16	60	70
17	75	80
18	15	30
19	75	60
20	30	20

④

	数学	英語
1	25	80
2	60	20
3	35	55
4	65	50
5	80	40
6	95	30
7	65	30
8	90	40
9	35	50
10	25	70
11	30	50
12	60	70
13	80	30
14	75	60
15	50	55
16	20	70
17	40	80
18	45	30
19	40	60
20	75	20

図 7　問題

初めに，新しい問題として図 7 を提示する。この問題を調べていく過程で，散布図，相関関係，共分散，相関係数を学んでいく。

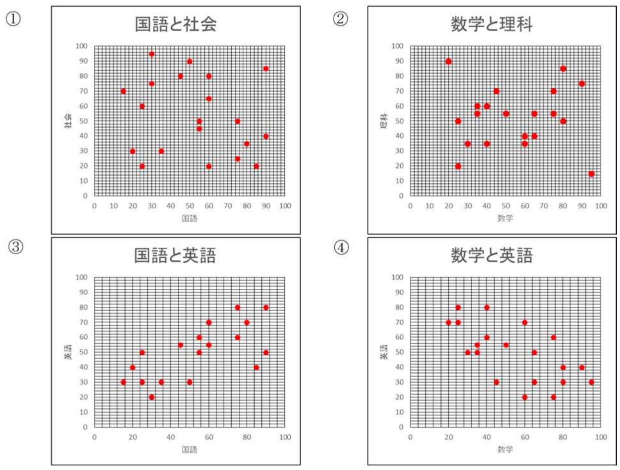


図 8　散布図

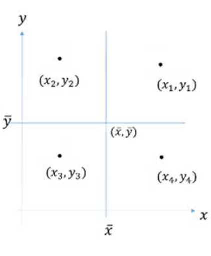
図 9 の相関関係を定義し，図 8 の①～④の散布図は，図 9 の相関関係のどれに当てはまるのかを考えさせる。

定義⑦
相関関係
2つの変量のデータにおいて，
・一方が増えると他方も増える傾向が認められるとき，2つの変量の間に正の相関関係があるという。
・一方が増えると他方が減る傾向が認められるとき，2つの変量の間に負の相関関係があるという。
・どちらの傾向も認められないときは，相関関係がないという。

図 9　相関関係の定義

散布図は，①を相関関係がない，③を正の相関関係がある，④を負の相関関係があると生徒が判断するように作り，②は，正の相関関係があるという生徒と，相関関係がないと考える生徒がいるように準備をした。このようにした理由は 2 つある。1 つ目は，散布図だけでは，人によって判断が異なってしまうため，2 つのデータの関係を数値化していく必要があると生徒が感じやすくするためである。2 つ目は，はずれ値の説明をし，データを分析するということは，データ全体の特徴をとらえることを目標にしているため，はずれ値を取り除いて考えたほうがいいのか，いれたまま考えたほうがいいのかも判断していく必要があることを伝えるために，②の散布図を用意した。ここで，はずれ値について触れておくことで，相関係数を求めるときに注意をして考えてもらうように促す。

〇散布図と共分散のつながりについて考える。



$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+\cdots+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})\}$
$(x_k-\bar{x})$と$(y_k-\bar{y})$は，xとyの値がそれぞれの平均からどれだけ離れているかを表している式である。
そして，$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$は，その積を表している。
（例）
(x_1,y_1)の場合
$x_1>\bar{x}$より$(x_1-\bar{x})>0$
$y_1>\bar{y}$より$(y_1-\bar{y})>0$
よって
$(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})>0$

(x_3,y_3)の場合
$x_3<\bar{x}$より$(x_3-\bar{x})<0$
$y_3<\bar{y}$より$(y_3-\bar{y})<0$
よって
$(x_3-\bar{x})(y_3-\bar{y})>0$

(x_2,y_2)の場合
$x_2<\bar{x}$より$(x_2-\bar{x})<0$
$y_2>\bar{y}$より$(y_2-\bar{y})>0$
よって
$(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})<0$

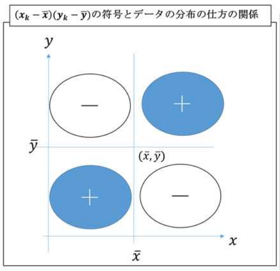
(x_4,y_4)の場合
$x_4>\bar{x}$より$(x_4-\bar{x})>0$
$y_4<\bar{y}$より$(y_4-\bar{y})<0$
よって
$(x_4-\bar{x})(y_4-\bar{y})<0$

図 10.1　共分散と散布図のつながり 1

図 10.1 を用いて，$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$の符号の変化について説明をする。$xy$平面を直線$x=\bar{x}, y=\bar{y}$によって 4 分割し，それぞれの範囲において$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$の符号を見ていく。それをまとめたものが，図 10.2 となる。

まず，図 10.2 を用いて，共分散の値が正になったときについて説明をし，生徒に共分散の値と散布図におけるデータの分布の仕方のつながりを確認させる。

〇$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$の符号とデータの分布の仕方の関係をまとめると下のようになる。



$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+\cdots+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})\}>0$
の場合を考える。
共分散の値が正ということは，
$$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})>0$$
となるデータの割合が
$$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})<0$$
と比べて大きいということを表している。
すなわち，共分散が正のときは，$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$の符号が＋となるところにデータが多く分布しているといえる。これは，$(x_k-\bar{x})$と$(y_k-\bar{y})$の符号が等しいところにデータが多く分布していることである。
したがって，共分散が正のとき，xとyの間には正の相関関係があると考えられる。

同様にして考えると，共分散の値が負のとき，xとyの間には負の相関関係があると考えられる。

図 10.2　共分散と散布図のつながり 2

次に，図 10.1 と図 10.2 を使って，様々な共分散の値と散布図におけるデータの分布の仕方の関係について説明することで，生徒が散布図におけるデータの分布の仕方と共分散の関係が分かり，数値とグラフを行きききして考えられるようにする。

定理②
$$s_{xy}=\frac{1}{n}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)-\bar{x}\bar{y}$$

図 11　共分散の定理

そして，分散の時と同様に，共分散でも計算を少しでも簡単にするために図 11 の定理を提示し生徒たちに証明させる。

〇共分散の弱点は，同じデータでも単位が変化することによって異なった値がでてしまうことである！！

（例）
あるクラスの身体測定の結果が以下のようになったとする。

	身長（cm）	体重（kg）
1	170	60
2	165	50
3	175	70
4	160	55
5	165	60
平均	167	59

	身長（m）	体重（kg）
1	1.7	60
2	1.65	50
3	1.75	70
4	1.6	55
5	1.65	60
平均	1.67	59

（身長と体重の共分散）
$=\frac{1}{5}(170\times60+165\times50+175\times70+160\times55+165\times60)-167\times59$
$=27$

（身長と体重の共分散）
$=\frac{1}{5}(1.7\times60+1.65\times50+1.75\times70+1.6\times55+1.65\times60)-1.67\times59$
$=0.27$

図 12　共分散の性質

共分散の性質の 1 つとして，データの単位に依存してしまうことを図 12 を使って説明をする。データの単位に依存してしまうことで，日常生活のデータを比較しようとしたときに不都合が生じてしまうことを伝える。図 12 の性質を補い，共分散と同じように数値で 2 つのデータの関係を表せるものとして相関係数を定義する。今回は，計

算を簡単にするために図 4 で分散の定理，図 11 で共分散の定理を証明した。これらを用いて，相関係数を図 13 のように定義をした。

定義⑨　相関係数

$$(x\text{と}y\text{の相関係数}) = \frac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})(y\text{の標準偏差})}$$

$r = (x\text{と}y\text{の相関係数})$とする。

$$r = \frac{\frac{1}{n}(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2) - \bar{x}^2}\sqrt{\frac{1}{n}({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + \cdots + {y_n}^2) - \bar{y}^2}}$$

相関係数rについては，一般的に次のことが成り立つ。

$$-1 \leqq \mathrm{r} \leqq 1$$

また，相関係数rには，次のような性質がある。
(1) rの値が1に近いとき，強い正の相関関係がある。このとき，散布図の点は右上がりの直線に沿って分布する傾向が強くなる。
(2) rの値が-1に近いとき，強い負の相関関係がある。このとき，散布図の点は右下がりの直線に沿って分布する傾向が強くなる。
(3) rの値が0に近いとき，相関関係はない。

図 13　相関係数の定義

また，図 13 の定義の補足として，生徒たちが同じように相関係数から相関関係を判断できるように，$-1 \leqq \mathrm{r} \leqq 1$を約 3 等分して，
$-1 \leqq \mathrm{r} \leqq -0.3$を負の相関関係がある，
$-0.3 \leqq \mathrm{r} \leqq 0.3$を相関関係がない，
$0.3 \leqq \mathrm{r} \leqq 1$を正の相関関係がある，と判断してデータを分類していくこととした。しかし，3 等分した境界である－0.3，0.3 や，－1，1 においては，はずれ値の影響も考え，数値だけを見て判断をせずに，散布図も活用して分類する必要が特にあることも伝える必要がある。

このことを使い，図 7 の①～④の相関係数を求める。全体交流で①～④の相関係数を正しく求められたか。また，相関係数の結果とデータの分布の仕方は関係しているかを確認する。このときに，図 7 の②については，はずれ値がない場合の相関係数を，早く①～④の相関係数を求められた子に求めてもらい，はずれ値がない場合の相関係数とデータの分布の仕方の関係についても確認する。このことを行うことで，この後に行うデータを分析する活動でより深くデータを分析できるように促す。

○まとめ
・2つの変量からなるデータの関係を調べるには，相関係数を使えば良い。
・相関係数の値だけでデータの関係を決めてしまうのではなく，散布図も同時に用いて，何度も繰り返し資料を分析することで2つの変量からなるデータの関係を吟味していく必要がある。

図 14　まとめ 2

最後に図 14 のようにまとめを行い，この後に行う活動でも，数値とグラフの両方の側面からデータを確認していくように促す。

（3）について

今回のセミナーでは，何度もデータを繰り返し分析する活動を行うことで，日常生活に存在するデータやグラフを批判的に読もうとする態度を育てることを目標としている。この目標を達成するために，生徒が自分で日常生活のデータを選び，データを分析する活動を行った。

2つのデータにはどのような関係があるのかを調べて発表しよう。

・各グループで下の都道府県別のデータから3つ自由に選んでもらいます。

1，山地面積	2，面積	3，1人当たりの県民所得
4，企業の本所の所在地別企業数	5，生しいたけの生産量	
6，稲の作付面積	7，乗用車保有台数	
8，商業地の価格	9，住宅地の価格	10，大学生の数
11，ごみの排出量	12，建物火災出火件数	13，道路交通事故の数
14，人口		

図 15　日常生活のデータ

図 15 のデータから自由に 3 つ選んでもらい，この 3 つのデータからペアを 2 つ作り，その 2 つのペアについて分析をする活動を行う。そして，分析をした結果と考察を模造紙にまとめて発表してもらう。模造紙に書くべきことを特に決めず，模造紙に使うペンの色なども自由とする。このような活動を行うことで，生徒たちは，自然と散布図の目盛りの間隔や目盛りの範囲を考えたり，人に伝えるためにはどうしたら良いかなどを考え活動していくと考える。また，自分で実際に一からデータを分析し，発表するというデータを伝える側を体験することにより，データを受け取る側であった場合でも，データに興味・関心を持って見られる態度を育てることができると考え，このような活動をセミナーに組み込んだ。

○相関関係と因果関係

因果関係：いくつかの事柄の関係において，一方が原因で他方が結果であるというつながりのあること。

（例）
陸上選手の例で考える。
多くの陸上選手の場合，足の速い人ほど，跳躍系の競技においても良い成績を残す傾向があるということが認められている。

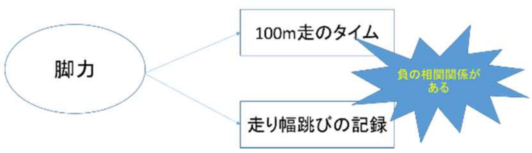


図 16　相関関係と因果関係

セミナーの最後として相関関係と因果関係について説明をする。相関関係があると聞くと，あたかも因果関係があるかのように聞こえるが，「相関関係＝因果関係」ではなく，「相関関係は，因果関係であるための必要条件の１つである」というのが正しい。よって，ここでは，数値の偶然の一致から相関関係が現れることがあるということ。また，図 16 の例を使って，現象 A と B の他に現象 C が存在する場合があることを説明することによって，生徒が「相関関係＝因果関係」といった勘違いをして帰らないように注意する。

2.2 授業のねらい

授業のねらいを以下のようにした。

(a) 2 つのデータがどのように関係しあっているかを相関係数と散布図を用いて調べることができる。

(b) 何度もデータを繰り返し分析する活動を行うことで，日常生活に存在するデータやグラフを批判的に読もうとする態度を育てる。

(a) について

散布図は，データの分布の仕方を見ることができ，2 つのデータがどのように関係しあっているか感覚的に感じることができる。しかし，散布図は，それ以上のことを知ることができない。一方，相関係数は，2 つのデータの関係を数値で見ることができるため，誰が見ても同じように判断することができる。その反面，データの分布の仕方を知ることができないため，はずれ値の存在などのデータの特徴に気づくことが難しい。このように，散布図，相関係数どちらにも良い点，悪い点が存在するが，両方を使うことで，より精度の良いデータの分析を行うことができる。このことを，生徒たちに伝え，身につかせるために，数値とグラフを行き来する場面を多く設定し，数値とグラフのつながりを意識させることを大切にする。

(b) について

日常生活には多くのデータが存在している。日常生活に存在しているデータは，鵜呑みにしていいものとそうではないものが存在する。そのため，生徒たちには，日常生活でデータに出会ったときに，少しでも足を止め考える姿勢をもってほしいと考える。少し考えることにより，より生徒たちは，自分にとって有益な情報を選別できる。

日常生活のデータを批判的に読む態度を育てるために，まずデータに興味・関心を持つことが必要である。そのため，今回のセミナーでは，生徒たちだけで日常生活のデータを分析する活動の場面を設定し，自分たちでデータを分析し，まとめ，発表するという情報を発信する側を体験させる。この体験をすることで，情報を受け取る側になった場合でも，データに興味・関心を持ち，データを読むことができるように促していく。

2.3 授業の展開について

次ページのような展開案を考案し，実践を行うこととした。セミナーでは，19 枚の学習プリントを随時配布しながら行った。

19 枚の学習プリントは割愛する。

授業の展開（1 日目）

<table>
<tr><th>過程</th><th>ねらい</th><th>学習活動</th><th>指導援助</th></tr>
<tr>
<td>導入</td>
<td>・既習事項である平均と範囲について復習する。
・平均の式の意味を復習する。

・範囲だけで，データの散らばり具合を判断することは不十分であることに気づかせる。</td>
<td>中学校の復習

生徒数が異なる 2 つのクラスの数学のテストの結果からどちらのクラスの成績が良いかを調べよう。また，そのように考える理由も書こう。
（1）1 組のほうができる
（2）2 組のほうができる
（3）分からない
<table>
<tr><th></th><th>1組</th><th>2組</th></tr>
<tr><td>1</td><td>73</td><td>40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>73</td><td>56</td></tr>
<tr><td>3</td><td>39</td><td>44</td></tr>
<tr><td>4</td><td>73</td><td>67</td></tr>
<tr><td>5</td><td>44</td><td>56</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30</td><td>62</td></tr>
<tr><td>7</td><td>34</td><td>56</td></tr>
<tr><td>8</td><td>52</td><td>58</td></tr>
<tr><td>9</td><td>73</td><td>70</td></tr>
<tr><td>10</td><td>40</td><td>67</td></tr>
<tr><td>11</td><td>75</td><td>42</td></tr>
<tr><td>12</td><td>45</td><td>64</td></tr>
<tr><td>13</td><td>74</td><td>67</td></tr>
<tr><td>14</td><td>74</td><td>95</td></tr>
<tr><td>15</td><td>76</td><td>55</td></tr>
<tr><td>16</td><td>85</td><td>63</td></tr>
<tr><td>17</td><td></td><td>58</td></tr>
</table>
○（1），（2），（3）からひとつ選び，そのように判断した理由を書いてみよう。
・平均点が等しいから，（3）を選んだ。
・最高点が 2 組のほうが高いから，（2）を選んだ。

○平均を求めて，考えてみよう。
定義①
平均
$\bar{x}$＝（平均）とする。
$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$
・平均が等しいけど，どちらのクラスができるかわからない。

○データの散らばりの程度を表す範囲を求めて，考えてみよう。
定義②
範囲
データの散らばりの程度を表す数値。
（範囲）＝（最大の値）－（最小の値）
・平均も，範囲も等しいけど，どちらができるかわからない。
・平均も，範囲も等しいから，同じようにできる。

○データの散らばり具合を数直線で見て，範囲の値が等しいと，散らばりの程度は等しいと言って良いだろうか。</td>
<td>・

平均は 1 人あたりの点数を求めており，だから生徒数が異なっていても比較できることを確認する。

・範囲は，値が大きければ大きいほどデータの散らばりが大きいことを確認する。

・データの散らばり具合を目で見て判断できるように数直線を用意しておく。</td>
</tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">範囲以外で，散らばり具合を表すことのできる数値について考えていこう。</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>展開</td>
<td>・平均偏差は，1 個 1 個のデータの値が平均からどれだけ離れているかを表す数値であることを学ぶ。

・平均偏差，分散，標準偏差どれも式は異なるが，3つとも散らばり具合を表していることを学ぶ。</td>
<td>定義③
平均偏差
$\bar{X}=\frac{1}{n}\{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+|x_3-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|\}$

定義④
分散
$$s_x^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\}$$
定義⑤
標準偏差
$$s_x=\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\}}$$

定理①
$$s_x^2=\frac{1}{n}({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+\cdots+{x_n}^2)-\bar{x}^2$$
（xのデータの分散）
＝（x^2のデータの平均値）−(xのデータの平均値)^2

分散の定義から定理（n=3）を示してみよう。
・電卓活用法
M：メモリー　R：リターン　C：クリア
M+:表示されている数値をメモリーに加算する
M−：表示されている数値をメモリーから減算する
MR：メモリーからデータを呼び出す
MC：メモリーのデータを消去する
MRC：1 回押すとメモリーしたデータを呼び出し，2 回押すとメモリーのデータを消去する
（例）
（１）5^2+3^2　（２）$(8-5)^2+(12-3)^2$
（問題）
（１）$(15-7)^2+(25-16)^2+(12-6)^2$
（２）$\frac{1}{3}\{5^2+4^2+6^2\}-5^2$
（３）$\frac{54}{24\times 15}=$
○電卓を活用して，1 組と 2 組の分散の値を求めてみよう。</td>
<td>・データの散らばり具合を数値化するためには，「1，どこを基準として，調べるのか 。2，基準とした値から，データのそれぞれの値がどれだけ離れているのかを求める。3，データの数値１つあたりが基準とした値からどれだけ離れているかを求める。」という３つの段階を踏むことにより行われることを説明してから，平均偏差の定義に移る。
・平均偏差，分散，標準偏差は，どれも散らばり具合を表す値であり，どれも値が大きくなれば，散らばり具合も大きくなることをおさえる。
・分散と標準偏差では，計算をするときに$\sqrt{\ }$をとって使う場合と$\sqrt{\ }$をとらずに使う場合があり，場面によって使い分けるようにすることを説明する。
・分散の計算ができるように,２乗の計算の仕方を中心に教える。</td>
</tr>
</table>

		○1 組の分散の値のほうが，2 組の分散の値より大きいということは，どのようなことを表していますか。 ・1 組のほうが，2 組より平均から 1 つ 1 つのデータが散らばっていることを表している。 ○1 組と 2 組の平均と範囲，分散を求めてみて，どちらのクラスの成績が良いと考えられるだろうか。 ・分からない。 ○根拠をはっきりして，1 組と 2 組のどちらのクラスの成績がいいか判断してみよう。 まとめ ・数値で判断することは，大小関係を比較できるという良い点がある反面，データ全体を見ることができないという悪い点もある。 ・数直線やグラフで判断することは，データの全体を見ることができるという良い点がある反面，データを客観的に見ることが難しいという悪い点がある。 　データを分析するときは，数値だけ，数直線やグラフだけで判断するのではなく，両方を使って判断していく必要がある。	・どちらのクラスの成績が良いかは，まだまだ判断する材料が少なくて決められない。しかし，生徒それぞれが判断基準を明確にして，判断していくことが大切であることを伝える。
		2 つのデータの関係を調べるにはどのようにしたらいいのかを考えよう。	
		主問題 あるクラス 20 人の 5 教科のテストの結果が以下のようになった。 ①　国語と社会，②数学と理科，③国語と英語，④数学と英語がそれぞれどのような関係があるか調べよう。 ･2 つのデータの関係を調べるための方法として散布図を紹介する。 ・①の散布図を全体で作成する。 定義⑥ 散布図 　2 つの変量x, yの関係を見やすくするために，変量x, yの値の組（x, y）を座標とする点を座標平面上にとったもの。 ・グループで手分けして，②～④の散布図を作成。	・これからは 2 つのデータの関係を 1 つの数値を求めることによってに調べていくということを伝える。 ・全体で座標平面上に 3 つ点をうってから，個人で散布図を作成させる。(グループで手分けして，取り組ませる。)

	・2 つのデータの関係を散布図と相関係数を用いて調べることができる。	定義⑦ 相関関係 2 つの変量のデータにおいて， ・一方が増えると他方も増える傾向が認められるとき，2 つの変量の間に正の相関関係があるという。 ・一方が増えると他方が減る傾向が認められるとき，2 つの変量の間に負の相関関係があるという。 ・どちらの傾向も認められないときは，相関関係がないという。 ・①～④の散布図にどのような相関関係があるかを個人追究する。 ・グループ交流 ・全体交流 ○散布図を見て，①～④にはそれぞれどのような関係がありそうですか。 ①と②に関しては，２つの意見が出てくると考えられる。 ・①は，相関関係がないと考えられる。 ・①のはずれ値を考慮すると，国語の点数が高い生徒は，社会の点数が低い傾向にあるから，２つの変量の間には負の相関関係があると考えられる。 ・②から数学の点数が高い生徒は，理科の点数も高い傾向にあるから，2 つの変量の間には，正の相関関係があると考えられる。 ・②のはずれ値を考慮すると，数学ができる生徒が理科もできるとは言い切れない。 ・③から，国語の点数が高い生徒は，社会の点数も高い傾向にあるから，2 つの変量の間には正の相関関係があると考えられる。 ・④から，数学の点数が高い生徒は，英語の点数が低い傾向にあるから，2 つの変量の間には負の相関関係があると考えられる。	・全体交流から，散布図だけでは，2 つのデータがどのような相関関係があるのか決めるには不十分であることに気づかせる。 ・統計学では，集団の特徴をつかむことが目標であることを説明し，はずれ値があるかどうかでデータの見え方が変わるかどうかも聞く。 ・散布図だけでは，判断基準が散布図を見る人の感覚によるものが大きいということに気づくことによって，数値化する必要性があると感じさせる。

定義⑧
共分散
2 つの変量x, yがn個の値の組として，次のように与えられているとする。

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

また，$x_1, x_2, \dots, x_n$と$y_1, y_2, \dots, y_n$の平均値をそれぞれ$\bar{x}, \bar{y}$とする。
ここで，$(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$の平均値

$$\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}$$

をxとyの共分散といいs_{xy}で表す。

定理②

$$s_{xy} = \frac{1}{n}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) - \bar{x}\bar{y}$$

（xとyの共分散）
＝（xyの平均値）－（xの平均値）×（yの平均値）

共分散の定義から定理（n=3）を示してみよう。

・共分散を求めることによってxとyの相関関係を調べることができる。しかし，共分散は，データの単位に依存してしまうという弱点があることを説明する。

定義⑨
相関係数

$$（x\text{と}y\text{の相関係数}）= \frac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})(y\text{の標準偏差})}$$

r ＝（xとyの相関係数）

$$r = \frac{\frac{1}{n}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots + x_n{}^2) - \bar{x}^2}\sqrt{\frac{1}{n}(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + \cdots + y_n{}^2) - \bar{y}^2}}$$

相関係数rについては，一般的に次のことが成り立つ。

$$-1 \leqq r \leqq 1$$

また，相関係数rには，次のような性質がある。
（１） rの値が１に近いとき，強い正の相関関係がある。このとき，散布図の点は右上がりの直線に沿って分布する傾向が強くなる。
（２） rの値が−１に近いとき，強い負の相関関係がある。このとき，散布図の点は右下がりの直線に沿って分布する傾向が強くなる。
（３） rの値が０に近いとき，相関関係はない。

		・今回のセミナーでは，$-1 \leq r \leq 1$を 3 等分して $-1 \leq r \leq -0.3$を負の相関関係がある。 $-0.3 \leq r \leq 0.3$を相関関係がない。 $0.3 \leq r \leq 1$を正の相関関係がある。と判断するものとする。 （数値として，3 等分したが，各相関関係の境界付近の数値が求まったときは，数値だけで判断しないように注意する。）	・全員が同じように相関関係を考えられるように，それぞれの相関係数の範囲を提示する。
		相関係数を用いて，①～④がそれぞれどのような相関関係があるのかを調べてみよう。	
まとめ		・①の相関係数は，全体で求める。 ・個人追究 グループで手分けをして，②～④の相関係数を計算する。 計算し終わったグループから，②～④がそれぞれどのような相関関係があるのか考察をする。 ・全体交流 ・①は相関係数から，相関関係がないことが分かる。 ・②は，はずれ値をいれると相関関係がないが，はずれ値をいれないと正の相関関係があるようになる。 ・②は，はずれ値が全体に強い影響を与えていると考えられるから，正の相関関係があると判断したほうがいいと思う。 ・③は，相関係数から，正の相関係数があることが分かる。 ・④は，相関係数から，負の相関係数があることが分かる。	・個人追究を行う前に，散布図のときと同じようにはずれ値をいれて計算するべきかどうかも考えて計算をするように伝える。
	まとめ ・2 つの変量からなるデータの関係を調べるためには，相関係数を使えば良い。 ・相関係数の値だけで 2 つの変量からなるデータの関係を決めてしまうのではなく，散布図も同時に用いて，何度も繰り返し資料を分析することで 2 つの資料の関係を吟味していく必要がある。		

授業の展開（2 日目）

過程	ねらい	学習活動	指導援助
	・1 日目の復習（電卓活用法，相関関係，散布図，相関係数）をすることにより，2 日目の作業をスムーズにする。 ・自分で資料を選び，相関関係を調べてもらうことで，日常の生活に存在するグラフやデータに興味関心をもつ姿勢を育てる。	・電卓活用法，相関関係の定義，散布図の定義，相関係数の定義をそれぞれ復習する。 主問題 2 つのデータにどのような関係があるのかを調べて発表しよう。 ・生徒に準備してあるデータのうちから相関関係を調べてみたい資料を３つ選んでもらう。（班で３つ） ◎各班にわかれて作業 ・模造紙に，相関係数，散布図，考察などを自由に書く。 ◎全体で交流 ・各班の代表者が，相関係数，散布図をもとにして発表する。 ・相関関係と因果関係について話す。	・1 日目に学んだことを使って，選んだ資料を自由に分析してもらう。

3.実践結果と考察

場所：岐阜大学教育学部棟 B204 教室

日程：平成 27 年 8 月 1 日（土）2 日（日）

対象：岐阜県内の中学 2 年生〜高校 3 年生

3.1 活動の様子と考察

（1 日目）

導入の問題提示後，1 組と 2 組のどちらのクラスの成績が良いかを個人追究し意見を聞いた。予想では，図 1 の（1）〜（3）の中で（3）の分からないに意見が集まると思っていたが，最高得点に着目して考えた子が多く，(2) の 2 組のほうができると思った生徒が多くいた。

平均，範囲の値から判断する場面では，ほとんどの生徒が，平均，範囲の値からは，どちらのクラスの成績が良いか判断できないという考えを持つことができ，思考の流れを崩すことなく数直線でデータの分布の仕方を確認し，範囲の値とデータの分布の仕方を比較することができた。

電卓活用法を学ぶ場面では，今回初めてメモリーキーを使って計算する生徒が多くおり，演習問題に苦戦している生徒が多くいた。初めは，日ごろから，学校などで電卓を使っている生徒と，そうでない生徒で計算をするスピードに差があったが，セミナーが進むにつれてどの生徒も電卓を使いこなして計算を行うことができていた。

自分なりに根拠を持って，どちらのクラスの成績がいいかを判断する場面では，数値とグラフの両方から考えられる生徒や，数値だけ，数直線だけから考える生徒など様々な生徒がいた。初めは数値だけ，数直線だけで判断していた生徒も，多くの場面で，数値とグラフを行き来する活動を行っていった結果，最後のアンケートの「2 つの変量からなる資料の関係を調べるとき，あなたはどのように調べましたか。」という質問に対して

「相関係数を求め，散布図と比べて調べた」

「散布図と相関係数の 2 つを用いて調べた」

「散布図と，相関係数の両方を使って調べたが，特に，散布図を重視して調べた。」

という，両方で調べることの大切さを理解できた生徒が多くおり，またそれを理解したうえで，片方を重視して考えることができている生徒もいた。

散布図を作成し，散布図から相関関係を考える場面で，初めの発表では図 8 の②の散布図のはずれ値に着目した生徒は 3 人しかいなかった。しかしここで，はずれ値の話をし，その後も意識させていった結果，2 日目の模造紙にまとめる際に，はずれ値を意識し，模造紙にその内容を盛り込めているグループが 10 グループ中 6 グループ存在していた。

予定では，相関係数まで学び，2 日目を迎えるはずだったが，予想以上に計算に時間がかかったため，共分散を学んで 1 日目を終えた。

（2 日目）

相関係数を求める場面では，①の表に関しては，求める手順を全体で確認しながら行い，②〜④はグループで協力をして求めてもらった。データのサイズが 20 あり，共分散を求めるところで多くの生徒が計算ミスをして，何度もやり直していた。この場面では，答えを初めに提示をせずに取り組ませたため，グループで協力して 2 人の答えが一致するまで計算していた。途中で，「また計算あわへん。」や「もう，できへん」という声も多く聞こえたが，どのグループも諦めることなく最後まで相関係数を求めることができていた。

活動の場面では，授業者側が指示することは必要最低限にして，生徒たちに任せたので，何を使って調べるか，どのように模造紙にまとめるかなどは生徒次第であったが，どのグループも模造紙には，相関係数，散布図がかかれており，どれもが人に伝わりやすいように工夫がされていた。

図 17 が生徒たちが作った模造紙の一部である。

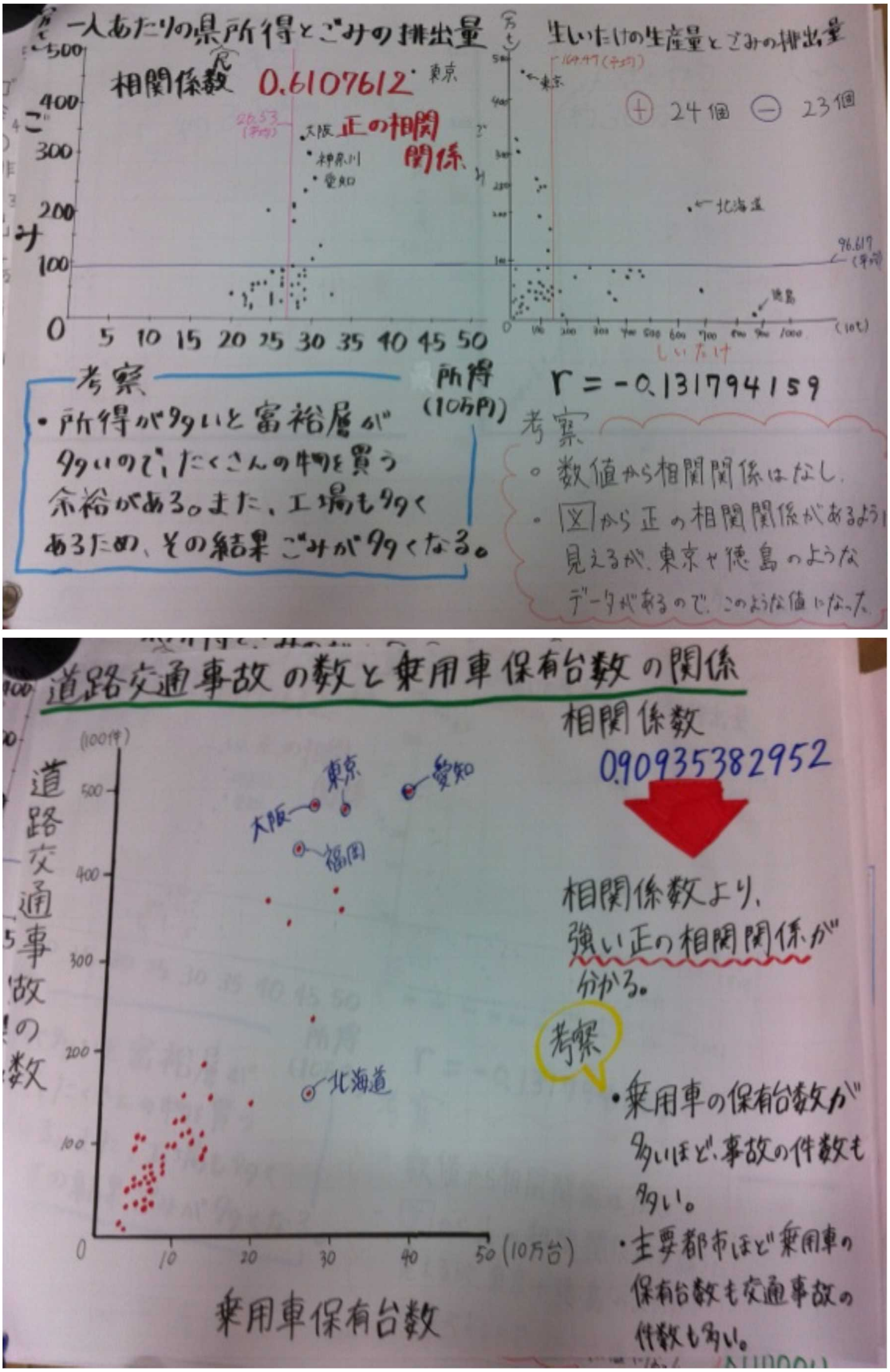


図 17　活動で作成した模造紙

3.2 アンケート結果

セミナーでとった，アンケートの項目内容と，その回答をいくつか述べる。

（1）2 つの変量からなる資料の関係を調べるとき，あなたはどのようにして調べましたか。

「相関係数を使って調べた。また，一般論を用いて考察した。」

「相関係数を求めることで 2 つの資料の相関関係を調べ，その値を比べることで 2 つの関係を調べた。」

「2 つの変量の相関係数や共分散を調べた。」

「１つのことに執着し過ぎず，全体も確認してデータを結びつけたり，ほかの関係を結びつけたりして調べました。」

「最初のほうは，平均や範囲でやろうとしたが，最後のほうは，相関関係などで調べることができた。」

「2 つの変量がお互いにどのような影響を与えているのかを気にして調べました。」

(2) 高校数学セミナーに参加して，日常に存在するデータやグラフをどのように注意深く見ていきたいと思いますか。

「全体的に見たり，細かく見たりして，一部分だけではなく視野を変えたりして見ていきたい。」

「極端に離れたはずれ値に注意してデータを分析しようと思いました。」

「1 つの情報ではなく，いろいろな情報を比較して見ていきたいと思いました。」

「数値を具体的に求め，それだけで判断するのではなくグラフを見て感じた主観的な考えも大切にし，双方を重ねながら見ていきたい。」

「どんな関係があるのかや，原因が何であるのか，また，一見同じでも実は結果などが違っているのではないかということ気をつけて見ていきたい。」

(3) 今日調べた資料以外に調べてみたい資料はありますか。

「勉強時間と得点数」

「西暦と夏の気温」

「運動ができる人は頭がいいのか。」

「社会でとりあつかう資料など」

「生しいたけと相関関係があるものを調べたいと思った。」

「応用問題にかけた時間とテストの点数」

「課題研究で調べる魚の営巣環境と英総個体数の関係に応用したい。」

3. 3 ねらいの達成度

(a) については，ねらいが達成できたと考える。その理由は，以下の 3 つである。

１つ目は，アンケートにおいて 8 割近くの生徒が，2 つのデータを調べる方法を正しく記述できていた。

2 つ目は，セミナー中の相関係数を求める場面において，全ての生徒がグループの仲間と協力をして，相関係数を正しく求められていた。そして，活動の場面で，全てのグループが，相関係数と散布図の両方を用いて，相関関係を調べることができていた。

3 つ目は達成できなかった生徒のアンケート内容を見てみると，調べる方法ではなく，調べる上で注意すべきことを書いている生徒が多くいた。これは，質問者のミスであり，質問の仕方をもっと分かりやすくしていれば，ねらいが達成できたと判断できる生徒がもっと増えると考えられる。

(b) についてはねらいが達成できなかったと判断する。その理由は，

1 つ目は，割合としては，達成できたと考えられる生徒が過半数を超えているが，達成できなかった生徒のアンケート内容を見てみると日常生活のデータに興味を持てていない生徒が多くいた。

2 つ目は，アンケート (2) (3) を共に達成でき

なかった生徒が 5 人おり，達成できた生徒と，できなかった生徒の差が大きく出ていると感じた。また，今回アンケートに答えてくれた生徒は 30 人いた。その中の 5 人がアンケート（2）（3）を共に達成できておらず，これは，6 人に 1 人データに興味・関心を持てなかったということである。このことからねらい(b)は達成できなかったと考えた。

4. 今後の課題

1 つ目は，授業の時間配分である。今回のセミナーでは，計算量がすごく多く，計算ミスの多さによって，早くできてしまう生徒と時間がかかってしまう生徒に差が生まれてしまった。また，今回のセミナーでは，全員ができてから次に進むことを心がけたために，最後のほうに時間が足りなくなり，活動の時間を十分にとることができなかった。今回と同じ授業をもう一度行うのであれば，全体の 8 割程度で一度止め，全体で丁寧に確認することで 2 割のフォローをしていきたい。また，他のやり方としてどうしても計算が重くなってしまう共分散だけエクセルを使って求めさせるなど，電卓とエクセルをうまく組み合わせて授業をしていくべきであろう。

2 つ目は，題材の設定の仕方である。今回のセミナーでは，限られた 2 日間という時間のなかで連続して一度に学習をしたため難しかったが，学校の現場では，散布図や相関係数の学習をした時間の宿題として調べてみたいデータを生徒たちに探してこさせたり，授業として 1 時間データを探す時間を作り，データを自分たちで入手してから，それを分析するというように変えるだけでも生徒の興味・関心を引き出すことができると考えられる。

5. 終わりに

この教材を通して，定義や定理をただ演習問題を用いて確認したりするのではなく，活動のなかで生徒たちに演習をさせたほうが良いということがセミナー中の生徒たちの表情を見て感じとることができた。データのサイズ 20 の共分散を求める演習問題では，生徒たちはつらそうな表情を見せていた。しかし，活動におけるデータのサイズ 47 の共分散を求める作業では，データを分析するという目標のもと活き活きと作業に取り組んでいる姿勢が印象的であった。この 2 つの作業の大きな違いは，生徒たちが興味・関心を持っているかどうかということである。したがって，生徒たちが興味・関心を抱き，自ら学ぶ気持ちを呼び起こさせる授業を考え続けていく必要があると強く感じた。

引用・参考文献

1. 小寺平治，1996，新統計入門，裳華房
2. 前野昌弘，三國彰，2000，図解でわかる統計解析，日本実業出版社
3. 文部科学省，2009，高等学校学習指導要領解説　数学編
4. 豊田秀樹，前田忠彦，柳井晴夫，1992，原因をさぐる統計学，講談社
5. 都道府県別データから 2 変量の関係を見る-比べる変量を自由に選ぶグループ学習を通じて-，http://www.stat.go.jp/info/kenkyu/kyouiku/pdf/2siryo3.pdf
6. 総務省　統計局，なるほど統計学園，http://www.stat.go.jp/naruhodo/
7. 大島利夫　ほか 12 名，2011，高校教科書　数学Ⅰ，数研出版
8. 相馬一彦　ほか 17 名，2012，中学校教科書　数学の世界 1，大日本図書