岐阜数学教育研究
2014，vol.13，101-127

ゲーム理論を用いた高等学校の授業開発と実践

小森 啓司[1]，柘植 直樹[2]， 河崎 哲嗣[2]

ゲーム理論の中の非協力ゲームと呼ばれる「２人ゼロ和ゲーム」「２人非ゼロ和ゲーム」を題材にそれぞれの最適反応戦略や均衡点を求める高校生向けの授業の開発を行った．授業開発の目的は，社会の中にある問題を数学を用いて解決することで数学のよさを実感できること，問題を考える中で論理的に考える力と自ら問題を作成する思考力の育成である．本稿では，授業実践の内容と結果の報告・分析を行う．

＜キーワード＞ゲーム理論， ２人ゼロ和ゲーム， ２人非ゼロ和ゲーム，均衡点

1.はじめに

平成23年に改訂された高等学校学習指導要領数学編[1]において「数学活用」が設けられた．数学活用は生徒の数学的活動を一層重視し，具体的な事象の考察を通して数学への興味や関心を高め，数学的な見方や考え方のよさなどの数学のよさを認識できるようにすることや数学をいろいろな場面で積極的に活用できるようにすることをねらいとしている．そこで，数学的な見方や考え方のよさなどの数学の良さを認識できるような授業開発を行うことにした．

2. 授業の概要

2.1.ゲーム理論について

ゲーム理論は，経済社会におけるさまざまな意思決定の相互的かつ依存的かつ関係ゲーム的な状況と捉え，数理的で厳密な方法論を用いて分析する学問である．意思決定の主体としては，個人・企業のような組織・政府・国家など多種多様である．このような意思を決定し行動する主体をプレイヤーと呼ぶ．ゲームにおいて，プレイヤーはそれぞれに明確な目的を持ち，可能な限り自分の目的を達成するように行動を選択することが前提とされる．ゲームモデルの代表的なものに，戦略型ゲーム・展開型ゲーム・提携型ゲームがある．今回の授業では戦略型ゲームを題材とした． 戦略型ゲームは，プレイヤーの戦略と利得の関係を関数を用いて記述する最も基本的なモデルである．さらにその中で，プレイヤーの目的が完全に相反するゲームである「定和ゲーム」とそうでない「非定和ゲーム」の２つのゲームを取り上げた．

2.2.授業のねらい

この授業を通して社会の中に存在したり自分にとって身近な問題やゲームを高校数学を用いて解決できるということを学生たちに知ってもらいたいと考えた．数学が実際にどのようなところで使われているかという事例を示すことによって，数学の良さを認識できることを目標とする．

また，「最適反応戦略や均衡点を理解する能力」，「それをゲームに適用した時にどのような結果になるのか論理的に考えることができる能力」，「定和ゲームや非定和ゲームを理解し，実際の社会の状況やゲームとして自然な問題を考える思考力」を育成す

1 岐阜大学大学院教育学部研究科
2 岐阜大学教育学部

ることを目標とする.

以上を踏まえ，今回の授業のねらいを次の3点にした.

1. 社会の中にある問題や自分の身近な問題を高校数学で解決できることを知り，数学の有用性を実感する.

2. 最適反応戦略や均衡点を理解し，それをゲームに適用した時にどのような結果になるかを考えて体得する論理的な思考力の育成をする.

3. 定和ゲームや非定和ゲームを理解し，実際の社会の状況やゲームとして自然な問題を考える思考力の育成をする.

2.3.問題の考え方

トランプゲームとしてのルール

(a)①と②それぞれに2枚ずつトランプが配られる．互いのトランプは知っているとする.

(b) 2人同時に2枚の中から1枚を選んで出す.

(c)同じ色だった場合，大きい数字を出した方が数字の差の分，相手から得点をもらう.

(d)違う色だった場合，小さい数字を出した方が数字の差の分，相手から得点をもらう.

(e) 5回勝負を行い総合得点の多い方を勝ちとする.

表1　①:♠5，♠6　②:♦3，♦8 の場合

① \ ②	♦3	♦8
♠5	−2，+2	+3，−3
♠6	−3，+3	+2，−2

得点のことを利得という．表1のようにそれぞれの選択に対して，利得を表す表を利得表といい，左に①の利得，右に②の利得を表す．最適反応戦略とは「相手のある選択のもとで自分の利得を最大にする選択」である.

まず①の立場に立って考える.

(ⅰ)②が♦3 を選んだ場合

⑴♠5 を選ぶと−2

⑵♠6 を選ぶと−3

よって，(ⅰ)の場合，①は♠5 を選ぶ.

(ⅱ)②が♦8 を選んだ場合

⑴♠5 を選ぶと+3

⑵♠6 を選ぶと+2

よって，(ⅱ)の場合，①は♠5 を選ぶ.

次に，②の立場に立って考える.

(ⅲ)①が♠5 を選んだ場合

⑴♦3 を選ぶと+2

⑵♦8 を選ぶと+3

よって，(ⅲ)の場合，②は♦8 を選ぶ.

(ⅳ)①が♠6 を選んだ場合

⑴♦3 を選ぶと−3

⑵♦8 を選ぶと−2

よって，(ⅳ)の場合，②は♦8 を選ぶ.

それぞれの立場で考えれば，①は♠5，②は♦8 を選ぶことになる．このようにして求めた点(♠5，♦8)のことを均衡点という． 均衡点は「両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組」である.

表2　①:♠7，♦8　②:♦3，♠7 の場合

① \ ②	♦3	♠7
♠7	−4，+4	0，0
♦8	+5，−5	−1，+1

表2の場合，最適反応戦略をそれぞれの立場になって考えると， 両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組が存在しないため，均衡点が存在しないことがわかる.

そのため，確率的に出すトランプを決めて良いとする．その場合の最適反応戦略は,

「相手のトランプを選ぶ確率に対して，自分の確率を変えて，自分の利得の期待値が最大になるようにする」である．
①:♠7 をp，♦8 を$1-p$の確率で出す．
②:♦3 をq，♠7 を$1-q$の確率で出す．
($0 \le p \le 1$，$0 \le q \le 1$)
すると，①の利得の期待値は，

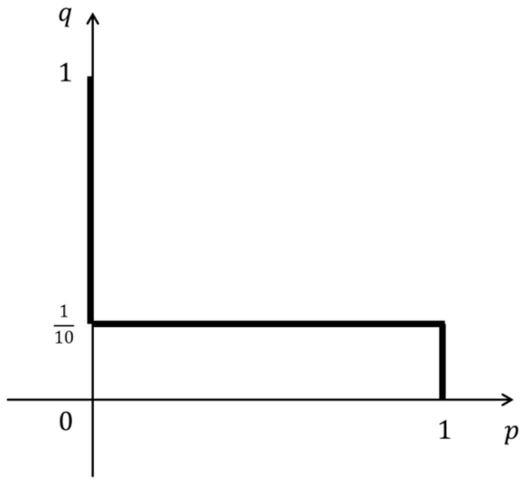
$$E = -4pq + 5(1-p)q - (1-p)(1-q)$$
$$= (-10q+1)p + 6q - 1$$

となる．ここで，①の最適反応戦略を考えると①が出すトランプを選ぶ確率はpであるため，「pを変数と考え，qに対してのEが最大になるようにする」となる．

(ⅰ)$-10q+1<0$のとき，つまり$q>\frac{1}{10}$のとき，
傾きが負になるため，$p=0$のときEは最大になる．

(ⅱ)$-10q+1>0$のとき，つまり$q<\frac{1}{10}$のとき，
傾きが正になるため，$p=1$のときEは最大になる．

(ⅲ)$-10q+1=0$のとき，つまり$q=\frac{1}{10}$のとき，
傾きは0になる．



グラフ１　①の最適反応戦略

よって，(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より$0 \le p \le 1$でEは最大である．

①の最適反応戦略を，q を縦軸，p を横軸にれば，グラフ１のとおりである．

次に②の最適反応戦略を考える．
②が出すトランプを選ぶ確率は，①の最適反応戦略を考えた時と同様に
①:♠7 をp，♦8 を$1-p$の確率で出す．
②:♦3 をq，♠7 を$1-q$の確率で出す．
($0 \le p \le 1$，$0 \le q \le 1$)
②の利得の期待値は，

$$E = 4pq - 5(1-p)q + (1-p)(1-q)$$
$$= (10p-6)q - p + 1$$

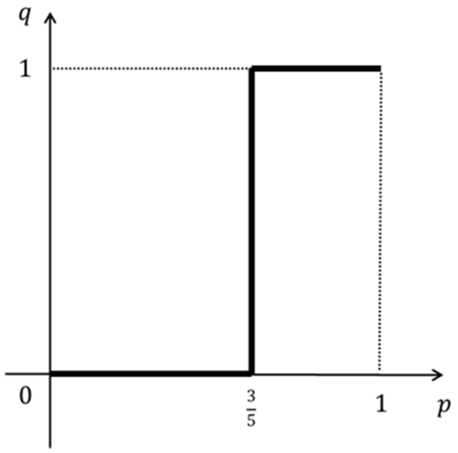
となる．ここで，②の最適反応戦略を考えると②が出すトランプを選ぶ確率はqであるため,「qを変数と考え，pに対してのEが最大になるようにする」となる．

(ⅰ)$10p-6<0$のとき，つまり$p<\frac{3}{5}$のとき，
傾きが負になるため，$q=0$のときEは最大になる．

(ⅱ)$10p-6>0$のとき，つまり$p>\frac{3}{5}$のとき，
傾きが正になるため，$q=1$のときEは最大になる．

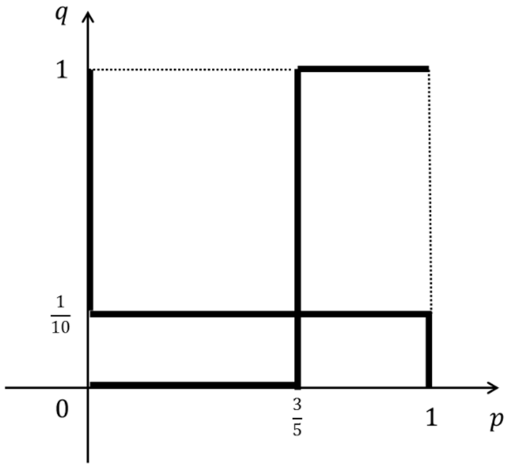
(ⅲ)$10p-6=0$のとき，つまり$p=\frac{3}{5}$のとき，
傾きは 0 になる．
よって，$0 \le q \le 1$でEは最大である．

②の最適反応戦略を，q を縦軸，p を横軸にとれば，グラフ２のとおりである．



グラフ 2　②の最適反応戦略

①と②の最適反応戦略のグラフを 1 つのグラフにまとめるとグラフ 3 のとおりになる．



グラフ 3　①と②の最適反応戦略

2 つのグラフの交点は$(p,\ q) = (\frac{3}{5}, \frac{1}{10})$である．グラフは①と②の最適反応戦略を表しているため，交点$(p,\ q) = (\frac{3}{5}, \frac{1}{10})$は均衡点である．

よって，①の確率は♠7 が$\frac{3}{5}$, ♦8 が$\frac{2}{5}$となり，②の確率は，♦3 が$\frac{1}{10}$，♠7 が$\frac{9}{10}$となるのである．

3. 実践と結果

3. 1. 実践内容

授業の流れは，

(1) トランプゲームの問題提示

トランプゲームのルールを説明し，生徒を 2 人 1 組にして， ♠7，♦8 と♦3，♠7 のトランプの組で実際にゲームを行う．

(2) 課題設定

ゲームを行った後で，トランプゲームはどちらの立場も同じなのか，それとも異なる立場なのかということについて考えさせる．そのため，課題を「①:♠7，♦8，②:♦3，♠7 の場合ではどちらかのプレイヤーのほうが有利，不利はあるだろうか？それとも，どちらも平等なのだろうか？」とする．

(3) 最適反応戦略や均衡点の定義を学習する．

定義:「相手のある戦略のもとで自分の利得を最大にする戦略」を最適反応戦略という．「両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組」を均衡点という．実際に， ①:♠5，♠6，②:♦3，♦8 の場合を用いて最適反応戦略と均衡点の定義を確認する．

(4) ①:♠7，♦8，②:♦3，♠7 の場合の最適反応戦略や均衡点を求める．

今回のトランプの場合では，最適反応戦略を求めることはできるが，均衡点は存在しないことを確認する．

(5) 確率的に出すトランプを決めてよいとする．

確率的にトランプを出す場合，①の利得の期待値がどのように求めることができるか確認する．

(6) 確率的にトランプを選んだ時の最適反応戦略の考え方を確認する．

ここでは，自分のトランプを選ぶ確率を変えることによって，自分の利得の期待値を最大にすることを目標とするため，確率

的にトランプを選ぶ場合「相手のトランプを選ぶ確率に対して，自分の確率を変えて，自分の利得の期待値が最大になるようにする.」という最適反応戦略の考え方を学習する.

(7)①の最適反応戦略を考える.

(6)の最適反応戦略の考え方を用いて，求める.

(8)②の最適反応戦略を考える.

①の最適反応戦略を求めようとする考え方を参考にして，②の最適反応戦略を課題として求める.

(9)①と②の最適反応戦略のグラフを 1 つに合わせる.

均衡点は，両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組であるため，グラフの交点がその定義を満たしていることを確認して，均衡点を求める．また，均衡点におけるそれぞれの利得の期待値を求め，どちらが有利・不利なのか，または平等なのかを確認する.

(10)コンビニ問題の問題提示(現実事象の問題)

コンビニの大手Ａ社とＢ社がある．Ｘ高校とＹ高校どちらかの近くへの出店を考えている．Ｘ高校は全校生徒 600 人，Ｙ高校は 400 人いる.

次の 3 つの条件があるとき,「自社のコンビニ利用客をより多くするためには，それぞれの会社はどちらの高校の近くに出店するのがよいか?」を考える.

(ⅰ)条件 1：Ａ社Ｂ社が別々の高校近くに出店する場合，その高校の全生徒を獲得することができる.

(ⅱ)条件 2：両社が同じ高校近くに出店した場合，その高校の生徒数をＡ社は 4 割，Ｂ社は 6 割獲得する.

(ⅲ)条件 3:それぞれの会社は，互いにどちらの高校に出店するかを事前には分からない.

(11)最適反応戦略と均衡点を求める.

トランプゲームのときの最適反応戦略と均衡点の求め方を参考にして，A 社と B 社それぞれの立場の最適反応戦略と均衡点を求める.

(12)課題設定

トランプゲームのときには確率的に出すトランプを選ぶことを考えて均衡点を求めた．今回のコンビニ問題の場合にも，同じように適用したとき，どうなるかを考えるため,「確率的に出店する高校を決めた場合,均衡点が存在するか調べよう.」を課題とする.

(13)確率的に出店する近くの高校を決めた場合の最適反応戦略と均衡点を求める.

今までの学習を参考に個人の課題として考える.

(14)定和ゲームと非定和ゲームの定義を学習する.

定義:「利得の合計が全て等しいようなゲーム」を定和ゲーム,「利得の合計が全て等しくはないゲーム」を非定和ゲームという.

(15) 定和ゲームや非定和ゲームとなる問題を実際に作る.

(ⅰ)問題の状況，数値を自分で決め，利得表を作る.

(ⅱ)社会の状況やゲームとして自然な問題になるようにする.

(ⅲ)定和ゲームや非定和ゲームのどちらを作るか意識して作るようにする.

これらの 3 つの点に注意して， 定和ゲームや非定和ゲームとなる問題を作る.

例として，問題文に数値が出てこない問題を紹介し，自分で利得を決めてもよいことを確認する.

3.2.活動の様子

3.1.で示した授業内容を以下のように実

践した．
場所:岐阜大学教育学部棟 B410
日時:平成 26 年 12 月 4 日(木)
対象:岐阜大学教育学部数学教育講座 3 年生
時間:90 分

(1)トランプゲームの問題提示において，トランプゲームのルールを説明してすぐに最適反応戦略の学習に入らずに，実際にゲームを行い，ルールの理解を深めた上で学習に入れたようである．

課題の「①:♠7，♦8，②:♦3，♠7 ではどちらかのプレイヤーに有利や不利があるだろうか？それとも，どちらも平等なのだろうか？」に対して予想をさせた．しかし，どちらも平等と答えた者が半数，①や②の方が有利であると判断した者がさらに半数ずつであった．その中で，理由があって予想を立てた学生が 2 名おり，②の方が有利な理由として「①と②両方に♠7 があるので，②は♠7 を出し続ける限り，得点を失うことはないと思う．また，①が♦3 を出した時には得点することができるから②は引き分け以上になるから②のほうが有利だと思う．」とした．

(2)②の立場の最適反応戦略では，②の最適反応戦略をグラフに表すときに，①の立場で考えた時と同様に縦軸と横軸のグラフを描くのか戸惑う生徒がいた．そのため，①の立場で考えた場合を振り返りながらグラフを描くなどを机間巡視しながら支援をした．

演習では，隣同士で教え合いや確認をしながら問題を解いている姿が多く見られた以下に生徒が作った定和ゲームや非定和ゲームの問題を挙げる．

3.1.1. 素数ゲーム(定和ゲーム)

(a)①，②それぞれに 3 枚ずつ 2～9 の数字が書かれたカードが配られる．
(b)2 人同時に 3 枚の中から 1 枚を選んで出す．
(c)両方とも素数だった場合，大きい数字を出した方が数字の差の分，得点をもらう．
(d)両方とも素数でなかった場合，小さい数字を出した方が数字の差の分，得点をもらう．
(e)5 回勝負を行い，総合得点の高い方の勝ちとする．

表 3　素数ゲームの利得表

② / ①	2	6	9
3	+1，−1	+3，−3	+6，−6
4	−2，+2	+2，−2	+5，−5
5	−3，+3	+1，−1	+4，−4

3.1.2. 鉄道ゲーム(非定和ゲーム)

鉄道会社 A 社と B 社がある．どちらの会社も，ある区間の運賃を 10 円上げるか，そのままにするかを検討する．現在はその 2 つの鉄道会社以外はないものとする．その区間を利用する客数は 1 日 1 万人とする．自社の売り上げをより多くするには，それぞれの会社はどうするのが良いかを考える．
(ⅰ)条件 1:ある区間の現在の運賃は A 社が 550 円，B 社が 470 円とする．
(ⅱ)条件 2 : 両者が値上げ，もしくはそのままの場合は，A 社が 1 万人のうち 4 割，B 社が 6 割の乗客を獲得する．
(ⅲ)条件 3:どちらかが値上げもしくは，どちらかがそのままの場合は値上げした会社が 1 万人のうち 3 割，そのままにした会社が 7 割の乗客を獲得する．

表 4　鉄道ゲームの利得表

①＼②	470 円	480 円
550 円	220000, 2820000	3850000, 1440000
560 円	1680000, 3290000	2240000, 88000

3.2.実践結果と考察

(ア)ねらい 1「社会の中にある問題や自分の身近な問題を学校で学習している数学で解決することができることを知り，数学の有用性を実感することができる」について

授業後のアンケートによれば，

「トランプゲームなど，実際に体験し，その結果が数学的に分かるのは面白いと思いました.」「数学を経済学面で生かすことができることを知りました.」「現実にあることを数学で考えることができ，面白いと感じた.」

という感想があった．実際に，高校生対象に授業を行った時に，学校で学ぶ数学が実際の社会のなかでどのように生かすことができるかを知り，数学の有用性を実感することで，数学に対する考え方を前向きにとらえることができたようである.

(イ)ねらい 2-1「最適反応戦略や均衡点を理解することができる」について

Q1. 最適反応戦略や均衡点の意味がわかりましたか？

1. 分かった　…11 人
2. やや分かった　…4 人
3. どちらともいえない　…4 人
4. あまり分からなかった　…0 人
5. 分からなかった　…0 人

図 1　アンケート Q1 の結果

図 1 より約 8 割の生徒が「分かった」「やや分かった」と回答した．トランプゲームの課題で，最適反応戦略と均衡点の定義を説明したときに，言葉でだけでなく，実際にトランプの例を扱った．そこで定義に沿って「最適反応戦略をどのように求めるのか」「均衡点はどのような選択の組になるのか」を示したことによって，学生の理解が深まったのであろう.

(ウ)ねらい 2-2「最適反応戦略をトランプゲームとコンビニ問題に適用した時にどのような結果になるか論理的に考えることができる」について

Q2. トランプゲームやコンビニ問題で，最適反応戦略をそれぞれの立場になって考えることができましたか？

1. できた　…11 人
2. ややできた　…6 人
3. どちらともいえない　…2 人
4. あまりできなかった　…0 人
5. できなかった　…0 人

図 2　アンケート Q2 の結果

図 2 より 8 割以上の生徒が「できた」「ややできた」と回答した．最適反応戦略の定義を説明するときと同様に，実際にトランプの例を出して示したことによって，演習で求めるときにも考えやすくなったのであろう.

確率的に出すトランプを選ぶ場合，①は自分のトランプを選ぶ確率がpなので，「pを変数と考え，qに対してのEが最大になるようにする」についてじっくりと確認したことによって，②の立場で演習するときには，②のトランプを選ぶ確率がqなので，「qを変数と考え，pに対してのEが最大になるようにする」を多くの学生自身が出来ていた.

また，授業後のアンケートから
「qについてみた時のグラフの描き方で一瞬戸惑いました.」「グラフを考えるのが若干難しかった.」
という感想があった．普段描き慣れたグラフでは，独立変数を横軸にとる．①と②のグラフで横軸と縦軸の対象となる変数が入れ替わると考えたのだろう．しかし，今回は 2 つのグラフを 1 つに合わせて，グラフの交点を求めるため，横軸と縦軸の対象となる変数を入れ替えなかった．その部分が学生が戸惑った原因であろう．その問題を解決するために，縦軸と横軸の取り方を強調説明してから演習に取り組んだり，あとで 2 つのグラフを合成するため，縦軸と横軸の取り方を変えないようにすることを伝えることが必要だったのだろう.

(エ)ねらい 3「定和ゲームや非定和ゲームを理解し，実際の社会状況やゲームとして自然な問題を作ることができる」について

Q3. 定和ゲームや非定和ゲームが理解できましたか？	
1．できた	…12 人
2．ややできた	…5 人
3．どちらともいえない	…2 人
4．あまりできなかった	…0 人
5．できなかった	…0 人

図 3　アンケート Q3 の結果

Q4. 定和ゲームや非定和ゲームとなるような問題を作ることができましたか？	
1．できた	…4 人
2．ややできた	…9 人
3．どちらともいえない	…6 人
4．あまりできなかった	…0 人
5．できなかった	…0 人

図 4　アンケート Q4 の結果

Q3 の「定和ゲームや非定和ゲームが理解できましたか？」というアンケートに対しては, 約 9 割の生徒が「できた」「ややできた」と回答した．定和ゲームと非定和ゲームの定義をするために，新しくゲームや問題を出すのではなく，トランプゲームを定和ゲーム，コンビニ問題を非定和ゲームとしたことで，理解しやすかったのだろう.

Q4 の「定和ゲームや非定和ゲームとなるような問題を作ることができましたか？」というアンケートに対しては,「できた」「ややできた」と回答した学生は 7 割，残りは「どちらともいえない」と回答した．今回は問題の題材を考える時間や，それをもとに問題を作る時間をとることができなかったため，レポート形式をとった.「どちらともいえない」という 3 割の回答は，作成した問題が適切かどうかの他者評価，他の学生と作成した問題の交流の時間がなかったため，自分の作った問題に対して自信を持つことができなかったからだろう．問題を作った後でグループを作り，作成した問題を交流することが必要だっただろう.

以下に，学生の感想を紹介する.
「ゲームを戦略的に考えるところから入ったので分かりやすかった.」「ゲームという身近な遊びを，数学を用いて選択することの興味が湧く，いい授業だと思う」「難しい内容だったけど，説明がわかりやすかった.」「ゲーム理論を考えることができれば，ゲームで自分が優勢になれることや店を開くときにどこに設置するのが一番いいかを考えられることが分かった．すこし難しかったけれど，私は楽しく問題を考えることができました.（特に最後のカップルが行き先を決めるゲームは面白く感じました.）」「それぞれの立場に立って考えるのが難しかったです.」「コンビニ問題のようにお金がからんでくると実際に社会でも考えられるよ

うな気がしておもしろかった.」「ゲームを交えてだったので面白く，親しみやすかった．高校生もややこしい部分もあるが，コンビニやトランプなど身近なものがでてくるので興味を持ちやすいと思う.」

4．今後の課題

授業計画の時間数が足りなかったため，再計画が必要である．トランプゲームの演習やコンビニ問題で確率的に出店する近くの高校を選ぶときの期待値を計算するのに多大な時間を要した．この研究の目的は，最適反応戦略を求めるための時間をとりたいと考えたため，必要ならば期待値の計算は提示しても良いだろう.

また，今回の授業を受けた対象は，大学3年生のため文字を変数と捉えたり，文字を固定して考えることは高校生に比べて慣れている．実際には現在の学習指導要領では期待値を数学Ⅰ・Aで学習しないということとや 2 つの変数を用いて問題を考えることは経験がないだろう．その中で，高校生にもねらいが達成できるような授業にしていく必要があると考える.

また， 本教材は，カリキュラム外の学習を含んでおり，学校では選択数学や，発展的な内容として作成したものである．実際に今回の教材を用いるためには，生徒の発達段階に応じて適切な学年に位置づけ，既習内容を基本とした上で使用しなければならない．そのためにも，学習カリキュラムの内容についてもっと理解を深め，その時に応じた教材を再開発し，実際の教育現場で使えるような教材を作っていく必要がある．また，カリキュラム内でも数学の有用性を感じられるような工夫を凝らした授業や教材開発を行うべきであると考えている.

引用文献

[1]文部科学省，2008， 高等学校指導要領解説数学編，教育出版株式会社
[2] 岡田章，1996，ゲーム理論，有斐閣

資料１〔指導案〕

ゲーム理論

平成 26 年 12 月 4 日（木）14:45~16:15
岐阜大学教育学部棟　B409

本時のねらい
・最適反応戦略や均衡点を理解することができる.
・最適反応戦略をトランプゲームやコンビニ問題に適用した時にどのような結果になるか論理的に考えることができる.
・定和ゲームや非定和ゲームを理解し, 実際の社会状況やゲームとして自然な問題を作ることができる.

	生徒の活動	教師の指導・留意点
5	・オペレーションズリサーチ，ゲーム理論の説明 オペレーションズリサーチ…問題を科学的方法を用いて、問題解決のために有効な情報を提供することを目的にする. ゲーム理論はオペレーションズリサーチの中の一つの分野. ・トランプゲームのルールについての説明をする.	・導入として，数学が社会で実際にどのように使われているかの例を示す. ・「オペレーションズリサーチの中のゲーム理論を学習する.」という説明をする. ・同じ色のトランプを出した場合と，違う色のトランプを出した場合では異なることを例を用いて確認する.
5	・①：♠7，♦8 と②：♦3，♠7 のトランプの組でトランプゲームを実際に行う.	・トランプゲームのルールを理解するために，２人ずつでゲームをする.
10	・本時の課題を確認する. ①:♠7，♦8，②:♦3，♠7 の場合ではどちらかのプレイヤーのほうが有利，不利はあるだろうか？それとも，どちらも平等なのだろうか？ ・最適反応戦略と均衡点の定義を確認する. 「相手のある戦略のもとで自分の利得を最大にする戦略」を最適反応戦略,「両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組」を均衡点という.	・生徒にどちらの方が有利，不利がまたは平等か予想させる. ・定義を確認するだけでなく，実際にトランプが①:♠5，♠6，②:♦3，♦8 という場合を用いて，最適反応戦略と均衡点の定義について確認する.

	・利得表を書き，①：♠7，♦8，②：♦3，♠7 の場合の最適反応戦略を求める． 今回のトランプの場合では最適反応戦略を求めることはできるが，均衡点は存在しないことを確認する．	・最適反応戦略の定義をした時の考え方を参考にして，生徒自身で最適反応戦略と均衡点を見つけさせる．
15	確率的に出すトランプを決めてよいとする． ・確率的に出すトランプを選ぶために，①の利得の期待値の求め方を確認する． ・確率的に出すトランプを選んだ時の最適反応戦略の考え方を確認する． 相手のトランプを選ぶ確率に対して，自分の確率を変えて，自分の利得の期待値が最大になるようにする． ①:♠7 を p．♦8 を 1-p の確率で出す． ②:♦3 を q，♠7 を 1-q の確率で出す． $(0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1)$ ・①の最適反応戦略を考える． ①の利得の期待値 $E = -4pq + 5(1-p)q - (1-p) \times (1-q)$ $\quad = (-10q + 1)p + 6q - 1$ p を変数と考え，q に対してのEが最大になるようにする． 傾きが正，負，0 になるときで場合分けを行い，それぞれの場合に対して，Eが最大になる p を求める． ・①の最適反応戦略に対して，実際その確率にしたがってトランプを選んだ時，どのような選択になるのか確認する． ・①の最適反応戦略を，q を縦軸に，p を横軸にとり，グラフに表す．	・2 つの変数に対する期待値の求め方を学習していないため，積の法則の復習と，期待値の求め方の復習を絡めて学習する． ・２変数のうち一方の変数を固定するという考え方を学習していないため，時間をかけて丁寧に説明することが必要である． ・Eが最大になる p を求めるときに，グラフを描き，視覚的に E が最大になることを確認する． ・縦軸，横軸にそれぞれ異なる変数をとるため，今までの関数のグラフとは異なることに注意する．場合分けを確認しながら，グラフを描く．
10	・②の最適反応戦略を考える． ①の最適反応戦略の求め方を参考にして，考える．	・①の最適反応戦略を考えるときには①のトランプの確率は p だったため，p を変数

	②の得点の期待値 $E=4pq-5(1-p)q+(1-p)\times(1-q)$ $\quad=(10p-6)q-p+1$ q を変数と考え，p に対してのEが最大になるようにする. ・傾きが正，負，0 になるときで場合分けを行い，それぞれの場合に対して，Eが最大になる q を求める. ・②の最適反応戦略に対して，実際その確率にしたがってトランプを選んだ時，どのような選択になるのか確認する. ・②の最適反応戦略を，q を縦軸に，p を横軸にとり，グラフに表す.	と考えたが，②の場合は選ぶことのできる確率が q のため，その点に注意する. ・困っている生徒に①のときにはどのように考えたのかを確認しながら指導補助を行う. ・最適反応戦略を求めた時と同じく，①のときのグラフの描き方を参考に②の最適反応戦略のグラフを描けるようにする.
5 10	・①と②の最適反応戦略のグラフを 1 つのグラフにまとめる. ・交わったところが，確率的に出すトランプを選ぶ場合の均衡点であることを確認する. (p，q)=($\frac{3}{5}$，$\frac{1}{10}$)は均衡点. ・均衡点での期待値を求める. ①の期待値と②の期待値に$p=\frac{3}{5}$,　$q=\frac{1}{10}$を代入する. ①の期待値$E=-\frac{2}{5}$,　②の期待値$E=\frac{2}{5}$ ②の方が期待値が高いため，最適反応戦略を互いにとった場合②の方が有利であると確認する. コンビニ問題 コンビニの大手Ａ社とＢ社がある．Ｘ高校，Ｙ高校どちらかの近くへの出店を考えている．Ｘ高校は全校生徒 600 人，Ｙ高校は 400 人いる. 次の 3 つの条件があるとき，自社のコンビニ利用客をより多くするためには，それぞれの会社はどちらの高校の近くに出店するのがよいか? (ⅰ)条件 1：Ａ社Ｂ社が別々の高校近くに出店する場合，　その高校の全生徒を獲得することができる.	・均衡点の定義「両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組」を再確認して，実際にグラフの交点はその定義を満たしていることを確認する. ・課題に対するまとめを行う. ・トランプゲームのときの利得表のつくり方を参考に生徒の力で利得表を書くことができるようにする. ・最適反応戦略，均衡点を求めることができるよう，前の学習を振り返りながら考えさせる.

	(ⅱ)条件 2：両社が同じ高校近くに出店した場合，その高校の生徒数をＡ社は 4 割，Ｂ社は 6 割獲得する． (ⅲ)条件 3:それぞれの会社は, 互いにどちらの高校の近くに出店するかを事前には分からない． ・コンビニ問題での利得表を作る． コンビニの利用者を利得とする．	
20	・最適反応戦略を考え，均衡点を求める． （Ａ社，Ｂ社）＝（Ｘ高校，Ｙ高校）， （Ｙ高校，Ｘ高校）は互いの最適反応戦略が一致しているので，均衡点になっている． 確率的に出店する高校を決めた場合，均衡点が存在するか調べよう． Ａ社:Ｘ高校をp，Ｙ高校を$1-p$の確率で選ぶ． Ｂ社:Ｘ高校をq，Ｙ高校を$1-q$の確率で選ぶ． $(0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1)$ ・Ａ社の最適反応戦略を考える． Ａ社の利得の期待値 $E = p \times q \times 240 + (1-p) \times q \times 400 + p \times (1-q) \times 600 + (1-p) \times (1-q) \times 160$ $= (-600q + 440)p + 240q + 160$ p を変数と考え，q に対してのEが最大になるようにする． 傾きが正，負，０になるときで場合分けを行い，それぞれの場合に対して，Eが最大になる p を求める． ・Ａ 社の最適反応戦略に対して，実際その確率にしたがって出店する高校を選んだ時，どのような選択になるのか確認する． ・Ａ社の最適反応戦略を，q を縦軸に，p を横軸にとり，グラフに表す． ・Ｂ社の最適反応戦略を考える． Ｂ社の利得の期待値 $E = (-400p + 360)q + 160p + 200$ q を変数と考え，p に対してのEが最大になるようにする．	・トランプゲームで確率的に出すトランプを決めた場合の最適反応戦略の考え方を参考にして，生徒の力で考えることができるようにする．

	・傾きが正，負，０になるときで場合分けを行い，それぞれの場合に対して，Eが最大になる q を求める． ・B 社の最適反応戦略に対して，実際その確率にしたがって出店する高校を選んだ時，どのような選択になるのか確認する． ・B 社の最適反応戦略を，q を縦軸に，p を横軸にとり，グラフに表す． ・A 社，B 社の最適反応戦略のグラフを合わせる． $(p,\ q)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(\frac{9}{10},\ \frac{11}{15})$は均衡点であり，最初に見つけた均衡点のほかに$(p,\ q)=(\frac{9}{10},\ \frac{11}{15})$の均衡点が存在した． 確率的に出店する高校を選ぶ前の均衡点での出店の決め方のほかに，A 社は $\frac{9}{10}$ の確率で X 高校を選び，$\frac{1}{10}$ の確率で Y 高校を選ぶ．また， B 社は $\frac{11}{15}$ の確率で X 高校を選び， $\frac{11}{15}$ の確率で Y 高校を選ぶという均衡点が存在した．	・トランプゲームのときと異なり，最適反応戦略のグラフの交点が３つになっていることを確認する．また、そのうちの２つが確率的に決める前に見つけた均衡点に等しいことも確認する．
10	・定和ゲーム，非定和ゲームの定義を確認する． 「利得の合計が全て等しいようなゲーム」を定和ゲーム,「利得の合計が全て等しくはないゲーム」を非定和ゲームという． 定和ゲームや非定和ゲームとなる問題を実際に作る． (ⅰ)問題の状況，数値を自分で決め，利得表を作る． (ⅱ)社会の状況やゲームとして自然な問題になるようにする． (ⅲ)定和ゲーム, 非定和ゲームのどちらを作るか意識して作るようにする． ・問題の例を出す．	・自分の作る問題が定和ゲーム，非定和ゲームのどちらの問題になっているかを把握したうえで，問題作りができるようにする． ・問題文に数値が出てこない問題でも自分で利得を決めることで，利得表を作れることを確認する．

資料｛テキスト｝

ゲーム理論

学籍番号（　　　　　　　　　）名前（　　　　　　　　）

トランプゲーム

- ①と②それぞれに２枚ずつトランプが配られる．互いのトランプは知っているとする．
- ２人同時に２枚の中から１枚を選んで出す．
- 同じ色だった場合，大きい数字を出した方が数字の差の分，相手から得点をもらう．
- 違う色だった場合，小さい数字を出した方が数字の差の分，相手から得点をもらう．
- ５回勝負を行い総合得点の多い方を勝ちとする．

例　①♠6　②♠9　の場合　①-3　②+3　（同じ色で②の方が数字が大きい）

①♠3　②♦7　の場合　①+4　②-4　（違う色で①の方が数字が小さい）

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
①：♠7，♦8					
②：♦3，♠7					
得点					

得点の合計＿＿＿＿＿＿

どちらかの方が有利，不利はあるだろうか？または，平等だろうか？

定義 1
相手のある選択のもとで自分の利得を最大にする選択を**最適反応戦略**という.

①:♠5, ♠6　②:♦3, ♦8 の場合

① ＼ ②	♦3	♦8
♠5		
♠6		

【約束】
得点のことを利得，上のようにそれぞれの選択に対して，利得を表す表を利得表という.
左に①の利得，右に②の利得を表す.

最適反応戦略
①の立場
（ｉ）　②が♦3 を選んだ場合　________を選ぶ.
（ii）　②が♦8 を選んだ場合　________を選ぶ.
②の立場
（iii）　①が♠5 を選んだ場合　________を選ぶ.
（iv）　①が♠6 を選んだ場合　________を選ぶ.

定義 2
両方のプレイヤーの最適反応戦略が一致している選択の組を**均衡点**という.

①:♠5, ♠6　②:♦3, ♦8 の場合の均衡点は（　　　,　　　）

①は________を選び，②は________を選んで出すことが
互いに最適反応戦略.

演習１
最初に行ったゲームの①：♠7，♦8，②：♦3，♠7 の場合の①，②それぞれの最適反応戦略，均衡点を調べよう．

①＼②		

最適反応戦略

①：♠7，♦8，②：♦3，♠7 の場合の均衡点は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

確率的に出すトランプを決めて良いとする.

①＼②	♦3	♠7
♠7	−4, 4	0, 0
♦8	5, −5	−1, 1

①:♠7 を $\frac{1}{2}$ ，♦8 を $\frac{1}{2}$ の確率で出すとする.

②:♦3 を $\frac{1}{3}$ ，♠7 を $\frac{2}{3}$ の確率で出すとする.

①の利得の期待値Eを求めよう.

確率的に出すトランプを選ぶ時の最適反応戦略

①:♠7 を p，♦8 を $1-p$ の確率で出すとする.（$0 \leq p \leq 1$）

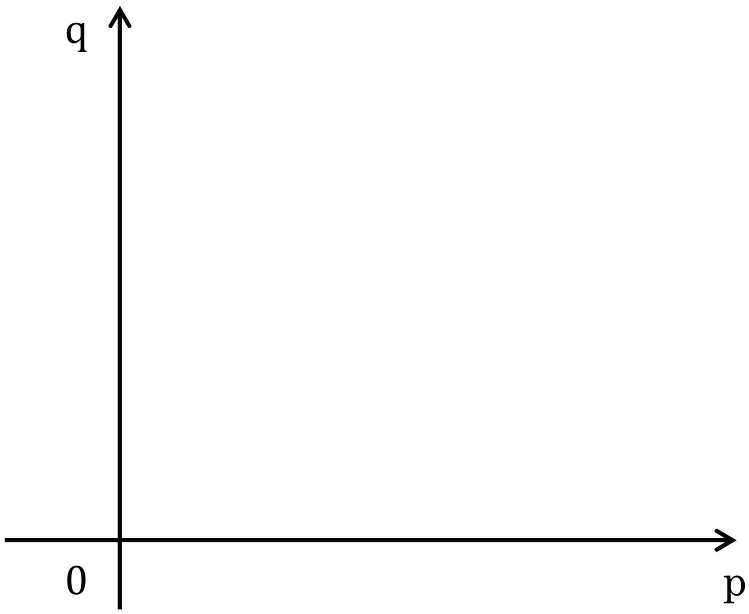
②:♦3 を q，♠7 を $1-q$ の確率で出すとする.（$0 \leq q \leq 1$）

①の最適反応戦略を考える．

①の利得の期待値Ｅをp，qを用いて表そう．

______を変数と考え，______に対してのEが最大になるようにする．

最適反応戦略



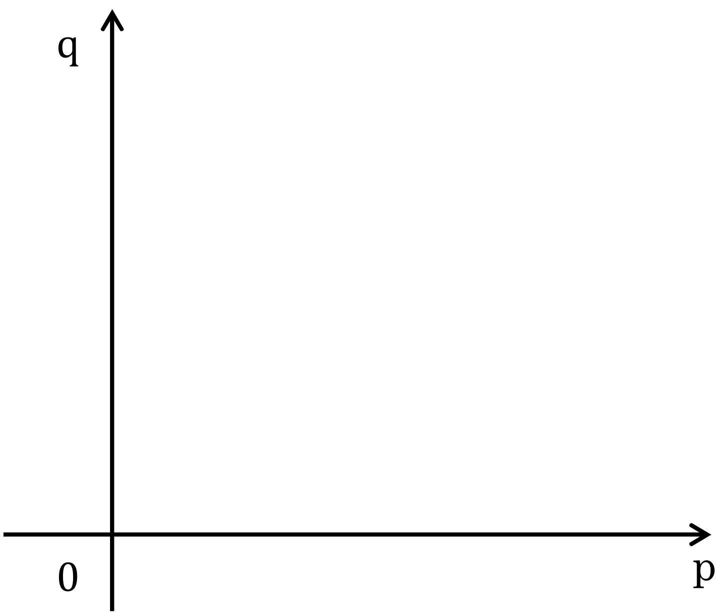
演習 2

②の最適反応戦略を求め，グラフに表そう．

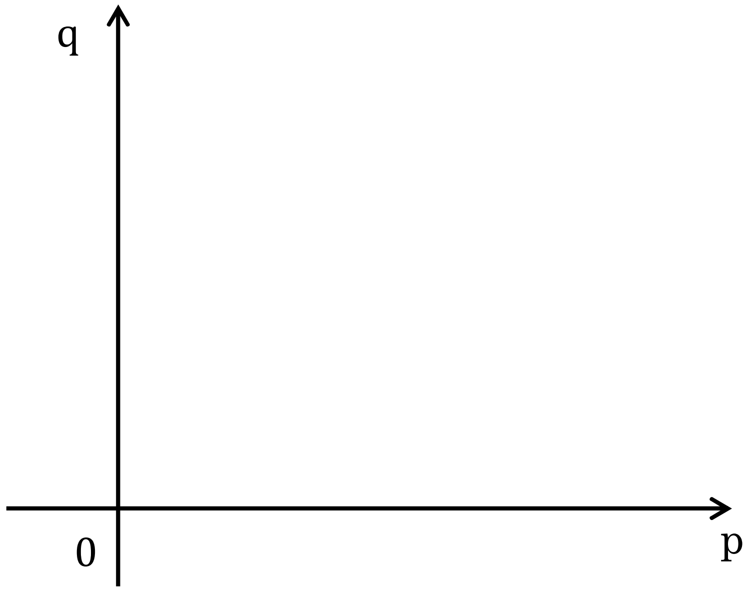
②の利得の期待値Ｅをp，qを用いて表そう．

＿＿＿＿を変数と考え，＿＿＿＿に対してのＥが最大になるようにする．

最適反応戦略



①と②の最適反応戦略のグラフを１つのグラフにまとめる.



(p, q)＝(　　　　,　　　　)は互いの最適反応戦略になっているため, 均衡点.

均衡点での期待値を求めよう.

コンビニ問題

コンビニの大手Ａ社とＢ社がある．Ｘ高校とＹ高校どちらかの近くへの出店を考えている．現在それぞれの高校の近くにはコンビニがないものとする．Ｘ高校は全校生徒 600 人，Ｙ高校は 400 人である．次の 3 つの条件があるとき，「自社のコンビニ利用客をより多くするためには，それぞれの会社はどちらの高校の近くに出店するのがよいか？」

(ｉ)条件 1:Ａ社，Ｂ社が別々の高校近くに出店する場合，その高校の全生徒を獲得することができる．

(ⅱ)条件 2:両社が同じ高校近くに出店した場合，その高校の生徒数をＡ社は 4 割，Ｂ社は 6 割獲得する．

(ⅲ)条件 3:それぞれの会社は互いにどちらの高校に出店するかを事前には分からない．

演習 3

コンビニ問題で，コンビニの利用者数を利得として，利得表を作り，p. 2 のように最適反応戦略，均衡点の存在を調べよう．

Ａ社＼Ｂ社	Ｘ高校	Ｙ高校
Ｘ高校		
Ｙ高校		

最適反応戦略

（Ａ社，Ｂ社）＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿は均衡点.

Ａ社は________を選び，Ｂ社は_________を選んで出店すること，
Ａ社は________を選び，Ｂ社は_________を選んで出店することは
互いに最適反応戦略．

<u>演習４</u>
確率的に出店する高校を選んだとき，Ａ社，Ｂ社の最適反応戦略を考え，上の均衡点のほかに均衡点が存在するか調べよう．

Ｂ社 / Ａ社	Ｘ高校	Ｙ高校
Ｘ高校		
Ｙ高校		

Ａ社：Ｘ高校をp，Ｙ高校を$1-\mathrm{p}$の確率で選ぶとする．$(0 \leq \mathrm{p} \leq 1)$

Ｂ社：Ｘ高校をq，Ｙ高校を$1-\mathrm{q}$の確率で選ぶとする．$(0 \leq \mathrm{q} \leq 1)$

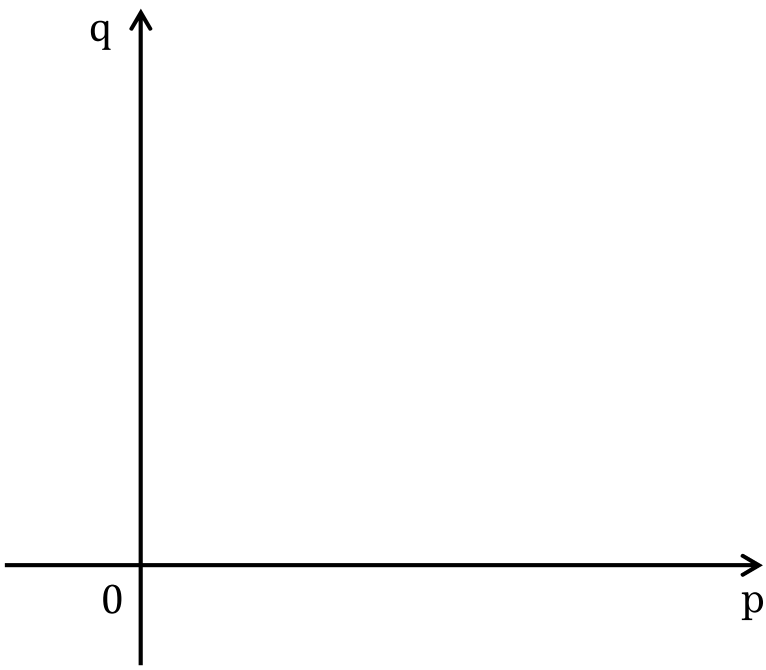
相手の出店する高校を選ぶ確率に対して，自分の出店する高校を選ぶ確率を変えて，自社の利得の期待値が最大になるようにする．

A社の最適反応戦略を考える．

A社の利得の期待値Eをp，qを用いて表そう．

______を変数と考え，______に対してのEが最大になるようにする．

最適反応戦略

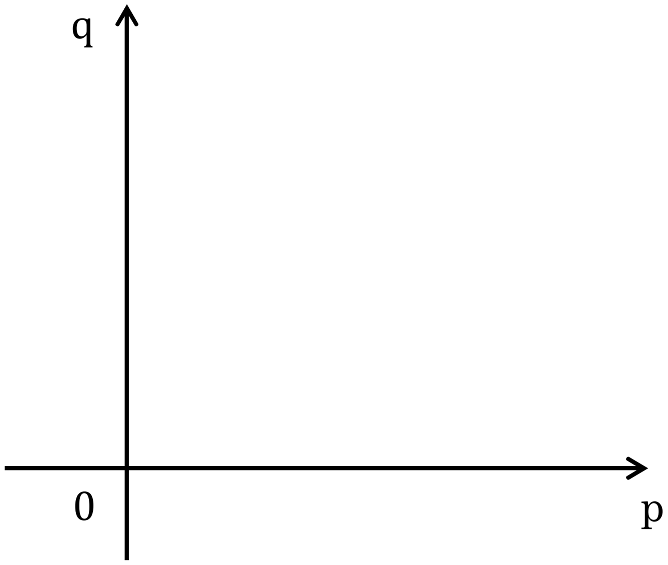


B 社の最適反応戦略を考える．

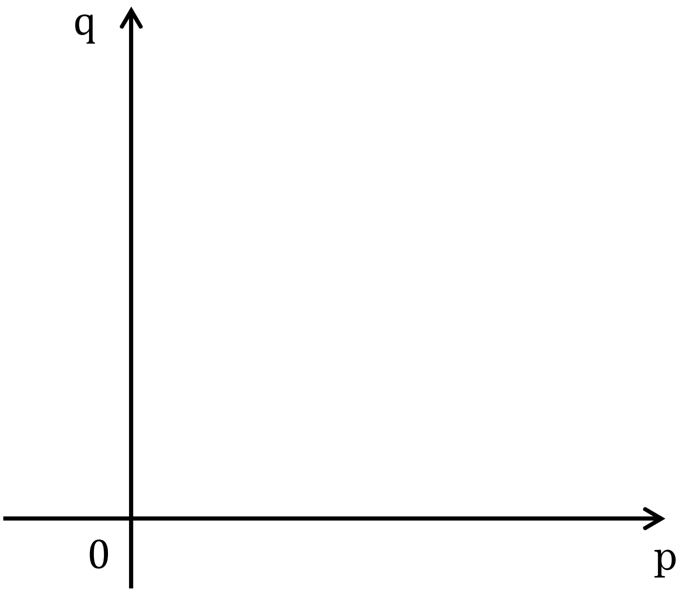
B 社の利得の期待値 E を p，q を用いて表そう．

______*を変数と考え，*______*に対しての E が最大になるようにする．*

最適反応戦略



Ａ社とＢ社の最適反応戦略のグラフを１つのグラフにまとめる.



（p, q）＝(　　　,　　　)，(　　　,　　　)，(　　　,　　　)

は互いの最適反応戦略になっているため，均衡点.

Ａ社は________を選び，Ｂ社は_________を選んで出店すること，

Ａ社は________を選び，Ｂ社は_________を選んで出店すること，

Ａ社は_________の確率でＸ高校を選び，_________の確率でＹ高校を選び出店，

Ｂ社は_________の確率でＸ高校を選び，_________の確率でＹ高校を選び出店することは互いに最適反応戦略.

①＼②	♦3	♠7
♠7	−4，4	0，0
♦8	5，−5	−1，1

①と②の利得の合計が全て等しいようなゲームを**定和ゲーム**という.

A社＼B社	X高	Y高
X高	240，360	600，400
Y高	400，600	160，240

A社とB社の利得の合計が全て等しくはないようなゲームを**非定和ゲーム**という.

男性と女性がデートの行き先として,野球の観戦に行くか,映画を見に行くかの選択がある.男性は野球，女性は映画に行きたい．しかし，２人にとって，別々に好きなものを見に行くより，一緒に出掛けることの方が大切.
２人が相談する前段階として，それぞれはどのような選択をするのがよいだろうか.

男性＼女性	野球	映画
野球		
映画		