岐阜数学教育研究
2014, vol.13, 78-100

サイクロイド曲線を題材とする高校数学における教材開発と実践

西脇康雅 [1]，柘植直樹 [2]，河崎哲嗣 [2]

サイクロイド曲線にはさまざまな性質がある．しかし，サイクロイド曲線を学習する高校 3 年生において，その性質について知っている生徒は少ない．様々な直線や曲線に沿った実際の物体の運動を物理学の知識を用いて数学的に考察することで，サイクロイド曲線には最速降下性があることを知り，等時性があることを示すことができるような授業案を提案し，実践を行った．本稿では授業の様子やアンケートをもとに，高校数学の教材としての実践について報告する．

＜キーワード＞サイクロイド曲線，最速降下性，等時性

1．はじめに

2008 年に学習指導要領が改定され，高等学校学習指導要領が全面的に実施されている．この学習指導要領・数学編 [1] の目標に,「事象を数学的に考察し表現する能力を高めること」「数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てること」が定められている．

本研究では，多くの数学者によって研究されてきたサイクロイドを教材化する．実際の物体の運動について，学習し身につけたものを用いて考察するとともに，歴史あるサイクロイド曲線を扱うことで，数学を学ぶ意欲を高める．サイクロイド曲線の性質である最速降下性についての問題は 1696 年にヨハン・ベルヌーイによって提示され，ニュートン，ヤコブ・ベルヌーイ，ライプニッツ，ロピタルらが解答した．この問題をきっかけに，変分法が生まれ，微積分学の発展にも影響を与えた．

著者が高校時代にサイクロイド曲線に関して知っていたことは，円が定直線に接しながら，すべることなく回転するとき，円周上の点 P が描く曲線であることや，サイクロイド曲線の媒介変数表示式などであった．しかし，大学の講義でサイクロイド曲線が最速降下曲線であることや等時性があることを知り，新たなサイクロイド曲線の知識を得るとともに興味を持った．本研究では，サイクロイド曲線の幾何的な意味を理解するだけでなく，サイクロイド曲線には，最速降下性と等時性の 2 つの力学的な性質があることを知る．サイクロイド曲線に沿って転がる質点の運動を数学的に考察することで，等時性に気づくとともに，数学のよさを実感し，高校で学習する内容の関連を感じることもできると考えた．これらのことから，サイクロイド曲線にとどまらず，数学に対する興味を高めるであろうと考えた．

以下にその授業実践の結果を報告する．

2．授業の概要

2.1　題材について

本論文で提案する授業の題材は，サイクロイド曲線の最速降下性と等時性の 2 点である．最速降下性とは，任意の 2 点を結ぶ曲線に沿って質点を転がしたとき，最も短時間で転がる曲線はサイクロイド曲線であるというものである．また，等時性とはサイクロイド曲線上の任意の点から質点を転がしても，最下点までの降下時間は変わらないというものである．サイクロイド曲線は数学Ⅲの「平面上の曲線と複素数平面」,「微分法」,「積分法」で登場する．その中ではこのような力学的な性質は学習せず，多くの生徒は知らない．サイクロイド曲線には最速降下性があることを示すた

[1] 岐阜大学大学院教育学研究科
[2] 岐阜大学教育学部

めには，変分法が用いられ，等時性に関しては微分方程式を解くことにより，単振動であることが導かれることが多い．しかし，今回の実践では高校 3 年生までの知識を用いて実際の物体の運動をモデル化し，等時性を示す．今回扱うサイクロイド曲線は $(0, 0)$ と $(\pi,-2)$ を通るもの，つまり

$$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=-(1-\cos\theta) \end{cases}$$

とする．実際の物体の運動について，まず $(0, 0)$ と $(\pi,-2)$ を結ぶ直線や曲線に沿って運動するボールの降下時間を求める．次に，サイクロイド曲線に沿って $y=0$ ではなく $y=-1$ より転がるボールについて降下時間を先ほどの求め方と同様にして，求める．サイクロイド曲線上の任意の点から転がしても降下時間は変わらないことから，等時性が導かれる．このように事象を数学的に考察することでサイクロイド曲線に対する興味や，数学のよさを感じることができると考える．

2.2　教材について

この教材のねらいを以下のとおりとする．

ねらい(1)　始点と終点を定めたさまざまな曲線に沿ったボールの降下時間を求めることができる．

ねらい(2)　サイクロイド曲線は最速降下性と等時性を持つことを理解する．

ねらい(3)　実際の物体の運動を数学的に考察し，サイクロイド曲線の力学的性質を知ることで興味を持つ．

内　容

2 点を結ぶ滑らかな曲線に沿ってボールを転がしたとき，もっとも早く転がるのはどのような曲線だろうと問題提示をし，予想を立てさせる．直接，最速降下性を導くことは難しいため，その代わりにいくつかの曲線に沿って運動するボールの降下時間を求めてサイクロイド曲線に沿って転がるときが最も早いことを示す．降下時間を比較するためにはボールが転がる始点と終点を定める必要があるため，始点を $(0, 0)$，終点を $(\pi, -2)$ とする．実際の物体の運動をモデル化するために，この運動に関係する事柄を考えさせ，ボールの軌道と重力が関係することを確認する．

まず，ボールの運動する曲線を考えるために，物体の位置（x , y）を時刻 t の関数である p を用いて表す．授業では，p が t の関数であることに留意するため $p(t)$と表すこととし，媒介変数表示された曲線に沿ったボールの速さを求めた．この際，p が t の関数であることから合成関数の微分を用いて x 軸方向と y 軸方向の速度をそれぞれ求め，曲線に沿って運動する物体の速さを求める．

さらに，重力の影響を考慮するために，数学Ⅲまでの学習内容のほかに，物理学のエネルギーに関する知識が必要となる．物理未履修者もいるため，位置エネルギーと運動エネルギーを丁寧に説明する．そして，それぞれの物体の位置におけるエネルギーを確認し，力学的エネルギー保存の法則より速さを求める．

力学的エネルギー保存の法則より，速さは重力加速度 g と $p(t)$を用いて表されるため，重力が考慮される．これら 2 通りで表した物体の転がる速さを用いて降下時間を求める．

今回の授業では演習時間の関係や計算の煩雑さから直線 $y=ax$，サイクロイド曲線，これとは別の曲線の計 3 種類の直線や曲線について扱う．最速降下曲線となるサイクロイド曲線を，媒介変数表示で

$$\begin{cases} x = p(t) - \sin\, p(t) \\ y = -(1-\cos\, p(t)) \end{cases}$$

と与える．これは，高等学校で学習するものを x 軸に関して対称移動させたものである．計算過程に関してサイクロイド曲線を例にとると

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 1-\cos p(t)\frac{dp}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt} = \sin p(t)\frac{dp}{dt}$$

であるから

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sin\frac{p(t)}{2}\frac{dp}{dt}$$

となる．また，転がし始めるときと，転がっている途中の力学的エネルギーをそれぞれ求める．力学的エネルギー保存の法則を用いると，

$$0=mg(-1+\cos p(t))+\frac{1}{2}mv^2$$

が成り立つ．これを v について解くと $v>0$,

$\sin\dfrac{p(t)}{2}>0$ であるから

$$v=2\sqrt{g}\sin\frac{p(t)}{2}$$

が導かれる．それぞれ求めた 2 つの速さは等しいことから，

$$2\sin\frac{p(t)}{2}\frac{dp}{dt}=2\sqrt{g}\sin\frac{p(t)}{2}$$

が導かれる．この式には時刻 t，ボールの速さ v，重力加速度 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ が考慮されている．以後，時間の単位は秒，長さの単位は m とすることを確認し，降下時間 T を求めるために，導いた関係式を $1=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{dp}{dt}$ と変形する．この式の両辺を t で積分すると

$$\int_0^T dt=\int_0^T\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{dp}{dt}dt$$

となる．ここで，$u=p(t)$とおくことで，左辺に対して置換積分を用いて計算を行う．

$p(0)=0$，$p(T)=\pi$ であるから

$$T=\int_0^\pi\frac{1}{\sqrt{g}}du$$

となる．この式の左辺を計算することにより，

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{g}}\fallingdotseq 1.00$$

と求めることができる．この他の曲線に関しても同様に計算をすることにより降下時間を求める．上で挙げた今回扱う 3 種類の直線や曲線の降下時間はそれぞれ，1.2 秒，1.1 秒，1.0 秒である．このことからこの中で最も降下時間が短いものは，サイクロイド曲線であることを確認し，すべての曲線を考えても，実はサイクロイド曲線にボールを沿わせたときが，最も早く転がり落ちることを説明する．また転がす 2 点は，始点を決めたら終点は始点より低い位置であれば任意の点でよいことを紹介する．

授業の後半部分では，サイクロイド曲線には等時性があることを導く．新たな問題として，サイクロイド曲線上の $y=0$ の点ではなく $y=-1$ である点からボールを転がしたときに，降下時間はどのように変化するだろうと，提示し，予想を立てさせる．

降下時間を同様に計算して求めればよいことを確認し，各自で計算をさせる．先ほどの計算と比較して，始点の力学的エネルギーが異なり，積分計算が難しくなるため，ヒントとして $\cos\dfrac{u}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}s$ と置換することを与える．実際に降下時間を求めると，それは原点から転がしたときの降下時間と一致する．さらに発展として，サイクロイド曲線上の任意の点からボールを転がしたときの降下時間を求める問題を用意する．この問題は全員が取り組むわけではないが，任意の点から転がしたときの降下時間は全体で確認する．そしてこのサイクロイド曲線に沿って任意の点から転がるボールの降下時間は，重力加速度 g のみに依存し始点の位置には依存しないことに気づかせることで，等時性の理解へつなげていく．

また，今回の授業では時間がなく，プリントに記載するのみとなるが，ホイヘンスがこの等時性を用いて振り子を作ろうとしたことを紹介する．展開案については本文の最後に添付する．

3. 実践結果

3.1 授業実践

授業名：「最速降下曲線と等時性」

場所：岐阜大学教育学部

日時：平成 26 年 12 月 11 日（木）

14:45～16:15

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座

3 回生（22 人）

3.2　活動の様子

今回の授業を進めていくにあたり，パワーポイントと学習プリント[資料 1]を使った．

導入では，「最も早く転がる」を「最もスピードが速い」と誤解する学生もいたが，もう 1 度丁寧に説明したことで，問題を理解し展開に入ることができた.「どの曲線に沿って転がしたときが最も早くなるか」という問いに対して，「最短経路だから直線が早い」，「重力の影響を大きく受けるために，転がり始めたらできるだけ早く下がるような曲線だろう」といった意見があった．

それぞれの学生が予想を持った後，曲線に沿った運動を考察していった．ここで，時刻 t の関数である p を用いて表された x, y をそれぞれ時刻 t で微分するが，これに抵抗を感じる学生もいた．高校数学では速さを求める際，このような合成関数の微分を用いて求めることはほとんどないため，混乱し時間がかかっている学生も見られた．

次に，重力の影響を考慮するために，位置エネルギーと運動エネルギーを説明したが，想定していたほど戸惑うことはなく理解していた．それぞれの点における力学的エネルギーは，位置エネルギーや運動エネルギーの式を確認しながら求めていた．また，それぞれの速さを表すときには角度を半角に合わせるようにヒントを出した．しかし，それが適確でなかったため正弦ではなく余弦の半角にした学生もいた．授業の展開部分に時間がかかると予想したため，導入を短くしたところ，授業者の説明のみとなってしまった．さらに，学生はスライドの画面に意識が集中してしまい，多くの時間を説明理解に費やし，導入が長びいた．

授業の展開部分では，ボールの降下時間を求める. 積分するときの t について積分区間は 0 から T までと理解できていた．しかし，現実事象と関連させて積分することに慣れていないことや，$p(t)$ に関する説明不足もあり，$u=p(t)$ と置換したとき $p(0)$ や $p(T)$ が分からず, 積分区間で混乱する学生が見られた．これらの多くの困難はあったが，それを乗り越えて降下時間を求めることができた学生は，達成感を持ったようだった．個人追求の時間を取った後，スライドを用いたり，授業者がホワイトボードに計算過程を書いたりして確認を行った．

それぞれの曲線に沿った降下時間を確認し，サイクロイドの最速降下性を紹介した後，等時性についての問題を提示した．学生がそれぞれ予想した結果は次のとおりである．短くなると予想した学生が 12 人, 変わらないと予想した学生が 11 人, 長くなると予想した学生が 1 人であった．その理由としては，「高さが半分になったから短くなる」「高さが変わると速さも変わるから短くなる」「振り子と同じように変わらない」などであった．

降下時間と同様に立式をしていくが，位置エネルギーや p の積分区間が変化したことや，計算量が多いことから途中で間違える学生が見られた．最後に計算を確認し，降下時間を求めたところ，先ほどと同じように重力加速度にのみ依存することに気づき，納得しているように思えた．

4.　授業に対する考察

授業後に，学生に対しアンケートを実施した．その回答から授業に対する考察を行う．

4.2　ねらい(1)，(2)，(3) についての考察

ねらい(1)「始点と終点を定めたさまざまな曲線に沿ったボールの降下時間を求めることができる」について

授業の前半の様々な曲線に沿って転がるボールの速さを求める活動では，速さを 2 通りの方法で求めたり，積分の計算に苦戦したりする学生も見られた．しかし，問題を解いていくにつれ，周りで教えあったり, 学習プリントを見直したりして，降下時間を求めることができるようになった．また「サイクロイド曲線に沿って$(0\,,0)$から$(\pi, -2)$までボールが転がる時間を求めることができまし

たか.」というアンケートに対して，約70%の学生が「できた」と回答した．アンケートには「積分計算を行うのが久しぶりだったし，計算量が多くて大変だった」,「授業でやったサイクロイド曲線に沿って転がしたときは，降下時間は約1.0秒になることが求めることができた」,「数学と物理の知識を使って降下時間を求めることができてよかった」などがあった．また，授業の後半では，原点からの降下時間と同様にして， $y=-1$ の点から転がしたときの降下時間を求めた．転がし始めるときの位置エネルギーが変化したことや，授業の前半での計算をできない学生がいるまま等時性の話に進んでしまったことから，混乱したりつまずいたりする学生が見られた．また，前半に時間をかけすぎてしまい，等時性を導く時間も少なくなってしまった．これらのことから「サイクロイド曲線上の，高さ y が -1 の点から転がしたときの降下時間を求めることができましたか」というアンケートに対して,「できた」と回答した学生は約50%にとどまった．以上より，ねらい(1)については特に等時性に関する部分に課題が残る．

ねらい(2)「サイクロイド曲線は最速降下性と等時性を持つことを理解する」について

全体的にサイクロイド曲線の性質に関しては理解できていた．特に，自分で計算をすることができたり周りの学生に聞いたりスライドを確認したりして降下時間を求めることができた学生は，サイクロイド曲線は最速降下性や等時性を持つことを理解しているように思われた.「サイクロイド曲線の性質について理解できましたか.」というアンケートに対して，95%が「理解できた」と回答した．また，アンケートには「サイクロイド曲線の性質についてはじめて知りその性質に驚いた」,「サイクロイド曲線上のどの点からスタートしてもかかる時間が同じであることが分かった」,「1回終点より下がってもサイクロイド曲線に沿わせたときが早いことに驚いた」などがあった．

このことからねらい(2)は達成できた．

ねらい(3)「実際の物体の運動を数学的に考察し，サイクロイド曲線の力学的性質を知ることで興味を持つ」について

サイクロイド曲線の性質を知ったり，導いたりしたことを通して，サイクロイドに対する理解が深まり，興味が持てていた.「授業を受ける前と比べて，サイクロイド曲線や数学に興味を持ちましたか.」というアンケートに対して，80%を越える学生が授業を受ける前より興味を持った．と回答した．その一方で，サイクロイドに沿ったボールの降下時間を求める際には煩雑な計算があり，求めることに抵抗を感じた学生は興味を持てなかったと回答した．アンケートより「2点を結ぶ曲線はいろいろなものが考えられるが，その中でサイクロイド曲線が一番早いことに興味を持った」「実際に作って確かめてみたい」「等時性という性質が面白かった」「実際に見てみたい」「他にどのような性質があるのか知りたくなった」「数学だけでなく物理の知識の知識を使うことで，実際の運動が考えられることが分かった」「日常生活のいろいろな現象を考えられたらいい」などと興味がわいたとの回答もあった．これらのことから，ねらい(3)について達成できたと考える．

5　今後の課題

今回の実践において，サイクロイド曲線に対する新たな知識を持たせ，興味を引き出すことができた．今後，さらに数学の学習に興味や意欲を持って取り組むことができるように，生徒の，事象を考察することから生じる物理の知識や煩雑な計算に対してのつまずきを克服する手立てをより明確にしていく必要がある．また，小学校理科では単振り子の周期は振れ幅に依存しないと学習し，高校物理においても振れ幅が小さいとき単振り子には等時性があると学習する．しかし，振れ幅が大きくなると等時性は崩れるが，サイクロイド曲

線は真に等時性があることまでを授業の中で説明できるとより興味を持ち，有用性を感じることもできたと考える．本実践では，計算量が多く，授業時間の多くを計算することに使ってしまったことや，導入が長くなったことから，後半の展開の部分の時間が短くなり，時間配分が適当でなかった．また，その結果として全体的に生徒が授業に対して受け身となった．さらに，アンケートに，「実際に見たり作ったりしたかった」との声もあった．問題を出した際に，モデルを見せることでイメージできるようになり，より課題意識が明確になり，主体的に活動できると考える．そしてより数学のよさを感じ，興味を持たせることができる教材になると考える．

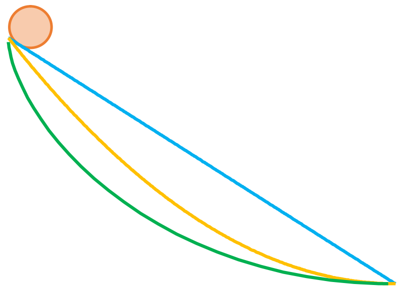
参考文献

[1] 文部科学省， 2008， 高等学校学習指導要領解説　数学編

[2] 大島利雄　他　14 名， 2012，数学Ⅲ， 数研出版

[3] 高橋陽一郎，1996，岩波講座　現代数学への入門「力学と微分方程式」岩波書店

展開案

過程	活動内容	指導援助
導入 (20)	○問題を提示する． 問題 2 点を結ぶ滑らかな直線や曲線に沿ってボールを転がしたとき最も早く転がるのはどの曲線だろう． 	・問題の意味を理解させる．
	予想とその理由を書かせる． ・直線　・円　・放物線　・楕円… ・2 点を結ぶ最も短い経路であるから． ・1 番重力を受けて加速しそうだから．	・予想を書かせる．予想を立てることで，この問題について考えさせ興味を持たせる．
	○速さについて復習する． $\begin{cases} x=p(t) \\ y=-ap(t) \end{cases}$ で表された直線に沿って運動するボールの速さを求める． $v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dt}, v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}=-a\frac{dp}{dt}$ であるから $v=\sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\left(a\frac{dp}{dt}\right)^2}=\sqrt{1+a^2}\frac{dp}{dt}$	・p が t の関数であることを確認し，微分するときに注意させる． ・ボールの中心が与えられた曲線に沿うことに留意する．
	○位置エネルギー，運動エネルギー，力学的エネルギーについて確認する．力学的エネルギー保存の法則が成り立っていることを説明する． $\begin{cases} x=p(t) \\ y=-ap(t) \end{cases}$ で表された直線に沿って運動するとき，x=0 のときと x=$p(t)$ のときで力学的エネルギー保存の法則を適用する． $0=mg(-ap(t))+\frac{1}{2}mv^2$ となり $v=\sqrt{2gap(t)}$ と求めることができる．	・物理を履修していない生徒もいるため，丁寧に説明をする． ・高さの基準を x 軸とするため，位置エネルギーがマイナスのときがあることを確認する．
展開 ① (40)	○直線や曲線に沿って(0，0)から(π，2)までボールを転がしたときの，転がる時間を求めよう． 問題① 直線 y=ax(a>0)に沿って転がしたときの降下時間を求めよう． つまり $\begin{cases} x=p(t) \\ y=-ap(t) \end{cases}$ で表される直線に沿って(0，0)から(π，2)までボールが転がるときの時間を求めよう．	・降下時間を比べるために，始点と終点を決める必要がある． ・時刻 t と $p(t)$について確認する． ・手が止まっている生徒に

	・このとき，通る点が 2 点与えられたことから $a=\frac{2}{\pi}$ となることと，p に関して $p(0)=0$，$p(T)=1$ であることを確認する． 直線に沿った運動より速さは $v=\sqrt{1+a^2}\frac{dp}{dt}$ であり， 力学的エネルギー保存の法則より求めた速さは $v=\sqrt{2gap(t)}$ である．これら 2 つの速さは等しいから $\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2gap(t)}}\frac{dp}{dt}=1$ が成り立つことを確認する． 両辺を t で積分する．このとき，$t:0\to T$ である． $\int_0^T dt=\int_0^T\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2gap(t)}}\frac{dp}{dt}dt$ となり，ここで $u=p(t)$ として $p(0)=0$，$p(T)=1$ であるから，置換積分を用いて降下時間を求める． $T=\int_0^1\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2gau}}du$ となるから，降下時間 $T=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2ga}}2\sqrt{\pi}\fallingdotseq 1.19$ 降下時間は約 1.2 秒である． ・再度求め方を全体で確認する． 演習 1 $\begin{cases}x=p(t)-\sin p(t)\\ y=-(1-\cos p(t))\end{cases}$ で表されるサイクロイド曲線に沿って (0，0)から(π，2)までボールが転がる時間を求めよう． 曲線に沿った運動より $v=2\sin\frac{p(t)}{2}\frac{dp}{dt}$ 力学的エネルギー保存の法則より $v=2\sqrt{g}\sin\frac{p(t)}{2}$ これら 2 つの速さは等しいから $\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{dp}{dt}=1$ 両辺を t で積分し，$u=p(t)$ として置換積分を用いて降下時間を求める． 降下時間 $T=\pi\sqrt{\frac{1}{g}}\fallingdotseq 1.00$ 演習② $\begin{cases}x=\frac{4}{5}a\{p(t)\}^{\frac{5}{2}}\\ y=-2\{p(t)\}^2\end{cases}$ で表される曲線に沿って(0，0)から(π，2)までボールが転がる時間を求めよう． このとき，2 点が与えられていることから $a=\frac{5}{8}\pi$ であることを確認する．	対して，援助する． ・両辺を t で積分するため，置換積分を用いることを確認して積分する． ・降下時間について，文字を使った状態の式まで計算させ，数値を出させるところまではやらせない． ・長さの単位は m，時間の単位は秒であることに留意する． ・再度求め方を確認し，演習 1 をスムーズに取り組むことができるようにする． ・半角の公式を用いて速さを表すようヒントを出す． ・等時性の計算につながるため，確実に計算できるように留意する．

<table>
<tr>
<td rowspan="5">展開
②
(25)</td>
<td>曲線に沿った運動より $v=4p\sqrt{a^2p(t)+1}\,\frac{dp}{dt}$
力学的エネルギー保存の法則より $v=2p(t)\sqrt{g}$
これら 2 つの速度は等しいから $\frac{2\sqrt{a^2p+1}}{\sqrt{g}}\frac{dp}{dt}=1$
両辺を t で積分し，$u=p(t)$ として置換積分を用いて降下時間を求める．
降下時間 $T=\frac{4}{3a^2\sqrt{g}}\{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\}\fallingdotseq 1.07$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>これら 3 つの中では演習 1 のサイクロイド曲線に沿わせたときが最も早い．→すべての曲線を考えてもサイクロイド曲線が最も早い．
・この問題は 1696 年に懸賞問題として出されたことなどを紹介する．</td>
<td>・サイクロイド曲線が最速降下曲線となることを確認する．</td>
</tr>
<tr>
<td>○問題②を提示する．

問題
サイクロイド曲線上の原点ではない点からボールを転がしたとき，降下時間はどのように変化するだろう？</td>
<td>・予想を書かせる．予想を立てることで考えさせ興味を持たせる．</td>
</tr>
<tr>
<td>予想
・高さが半分になったから降下時間も半分になる．
・加速しづらくなるから降下時間が長くなる．
・変わらない．
・サイクロイド曲線 $\begin{cases}x=p(t)-\sin p(t)\\ y=-(1-\cos p(t))\end{cases}$ の $p(0)=\frac{\pi}{2}$ から $p(T)=\pi$ まで転がしたときの降下時間を求める．
（計算は，以下の任意の点から転がした場合の計算の $p_0=\frac{\pi}{2}$ の場合である）</td>
<td>・ボールの転がる時間を求めるため，前半の時間の求め方と同じであることを確認してから，問題に取り組ませる．

・ $\cos\frac{u}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}s$ と置換することをヒントとして出す．</td>
</tr>
<tr>
<td>・時間に余裕がある生徒は一般のサイクロイド曲線上の任意の点から転がす場合を計算する．
曲線に沿った運動より $v=2\sin\frac{p(t)}{2}\frac{dp}{dt}$
力学的エネルギー保存の法則より $v=2\sqrt{g}\sqrt{\cos^2\frac{p_0}{2}-\cos^2\frac{p(t)}{2}}$
これら 2 つの速さは等しいから $\frac{2\sin\frac{p(t)}{2}}{2\sqrt{g}\sqrt{\cos^2\frac{p_0}{2}-\cos^2\frac{p(t)}{2}}}\frac{dp}{dt}=1$
両辺を t で置換積分を用いて積分する．</td>
<td>・ $\cos\frac{u}{2}=\cos\frac{p_0}{2}s$ と置換す</td>
</tr>
</table>

まとめ (5)	降下時間 $T=\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$ →サイクロイド曲線上の任意の点からボールを転がしたとき，最下点まで転がるのにかかる時間は一定である． ・サイクロイド曲線に沿わせたときに等時性が成り立つことを知る． サイクロイド曲線のま サイクロイド曲線の性質には 2 点をサイクロイド曲線で結んだとき，最も早く到達するという最速降下性がある．また，サイクロイド曲線上の任意の点からボールを転がしたとき，最下点に到達する時間は等しいという等時性がある． ・アンケートを記入する． 時間が取れたら，補足としてホイヘンスが考えたサイクロイド振り子について説明する．	ることをヒントとして出す． ・計算した結果から降下時間が高さ（始点）によらないことに気づかせる．

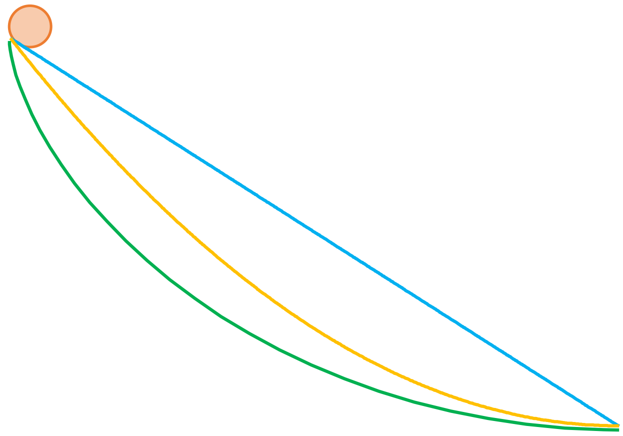
[資料 1]　学習プリント

最速降下曲線と等時性

名前（　　　　　　　　　　　　）

問題

2 点を結ぶ滑らかな直線や曲線に沿ってボールを転がしたとき
最も早く転がるのはどの曲線だろう.



予想と理由

最も早く転がる曲線を考えるうえで・・・

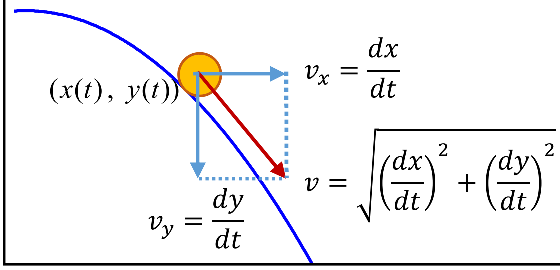
ボールの転がる速さが重要になる.
(短時間で転がすためには，速さを大きくすることを考える)
また，その速さは曲線によって変化する.
そのために，速さについて考えていこう.

速さ

平面上を運動するボールの時刻 t における座標(x,y)が t の関数であるとき，

ボールの時刻 t における x 軸方向の速度 v_x と y 軸方向の速度 v_y はそれぞれ

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ となり，物体の速さは$v = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ となる．



この p に関して・・・

x 座標を p と定めると y は x の関数であるから　y 座標も p を用いて表される．

もちろんボールの位置(x,y)は重力の影響を受けて，スタートしてからの

時刻 t によって決まるので・・・

p は t によって決まる！（p は t の関数である！）

これを頭においてこの後の話を進めていくこととする．

時刻 t におけるボールの位置が$\begin{cases} x = p(t) \\ y = -ap(t) \end{cases}$ で表される直線に沿ったボールの速さを求めよう．

エネルギーについて考えよう

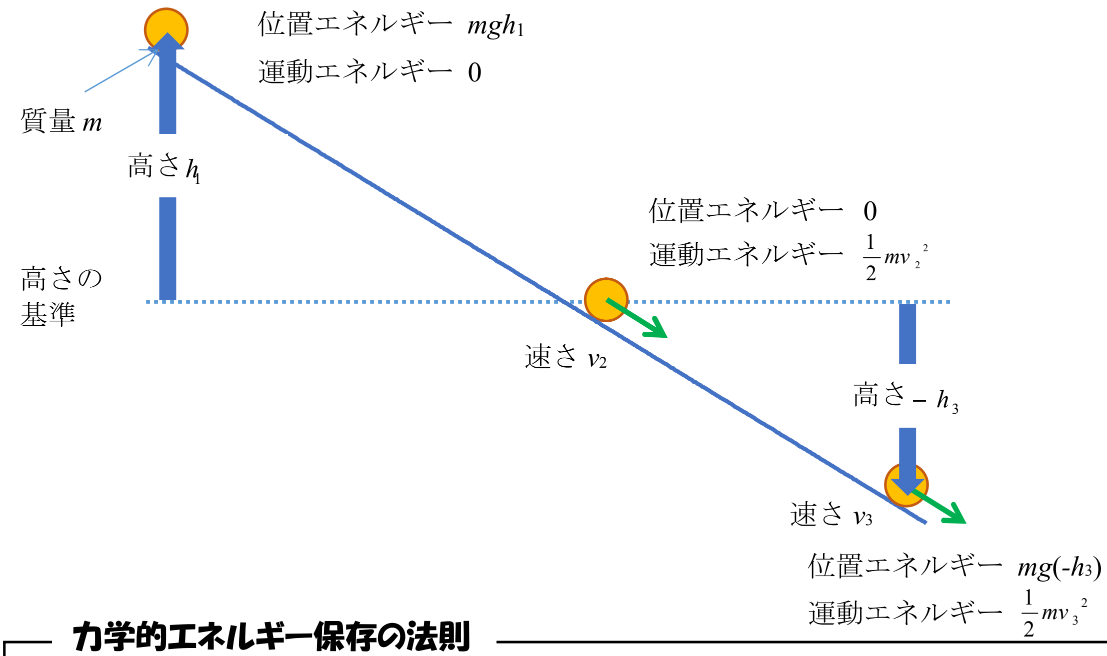
物体が持っている仕事をする能力のこと.

位置エネルギー…基準より高い位置にある物体が持つエネルギー　大きさは mgh

運動エネルギー…運動している物体が持つエネルギー　大きさは $\frac{1}{2}mv^2$

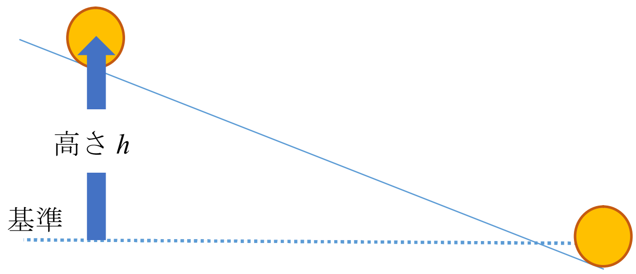
※　物体の質量 m，基準からの高さ h，物体の速さ v，重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$ とする.

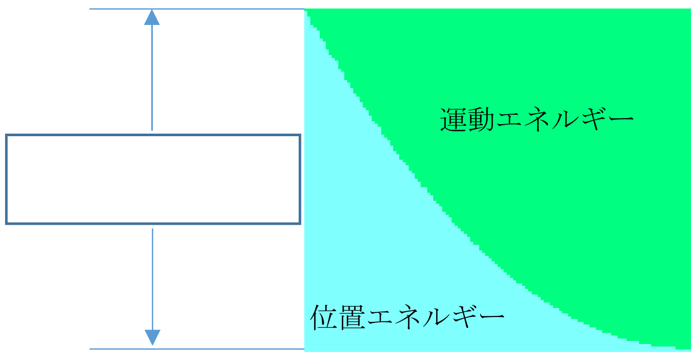
→ 高さは高いほど，質量は大きいほど，速さは大きいほどエネルギーは大きい.



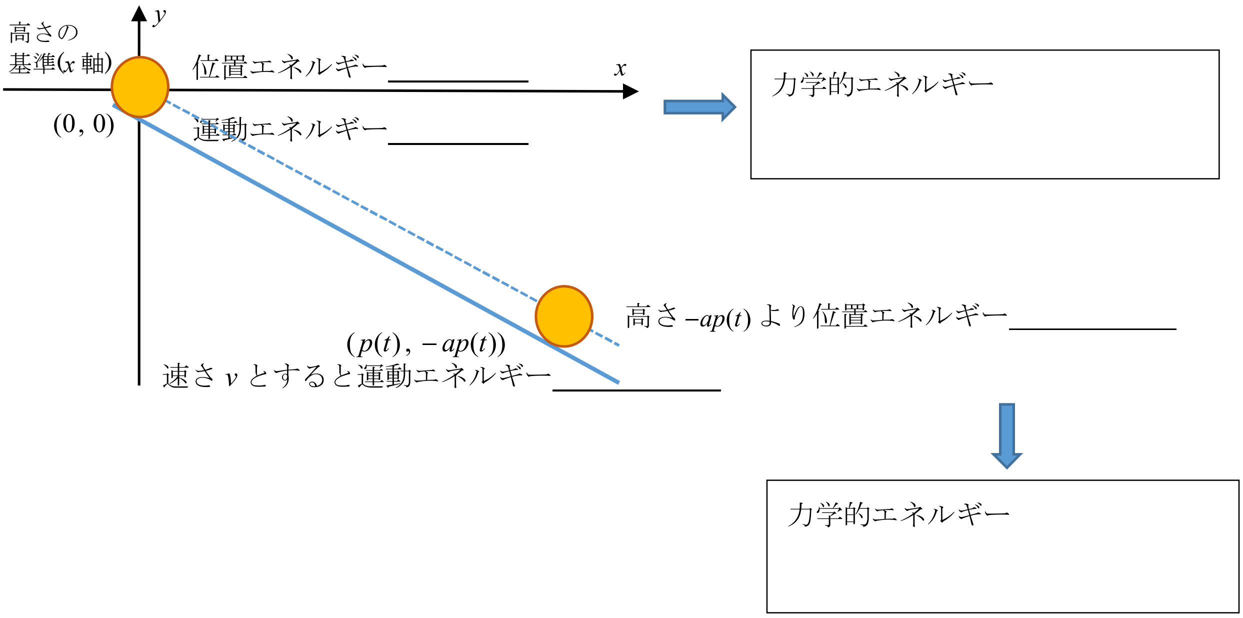
力学的エネルギー保存の法則

物体の質量を m，基準からの高さを h，物体の速さを v，重力加速度を g とする.
このとき位置エネルギー mgh と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ の和を力学的エネルギーといい
力学的エネルギーは一定となる.





時刻 t におけるボールの位置が $\begin{cases} x = p(t) \\ y = -ap(t) \end{cases}$ で表される直線に沿って $(0,\ 0)$ から転がるボールの速さを，力学的エネルギー保存の法則より求めよう．



力学的エネルギー保存の法則より

________________ ＝ ________________

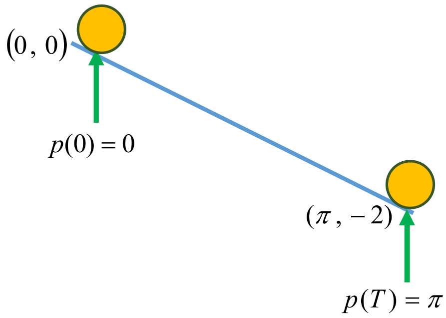
速さを求めると

直線や曲線に沿ったボールの降下時間 T を求めよう！

問題① $\begin{cases} x = p(t) \\ y = -ap(t) \end{cases}$ で表される直線に沿って $(0, 0)$ から $(\pi, -2)$ までボールが転がる時間を求めよう．（このとき $a = \dfrac{2}{\pi}$ ）

※　重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ で計算するため，以後時間の単位は秒，距離の単位は m とする．

①　曲線に沿った運動の速さは 2 ページより



②　力学的エネルギー保存の法則を用いて
速さを求めると 4 ページより

③　2 つの速さは等しいことから

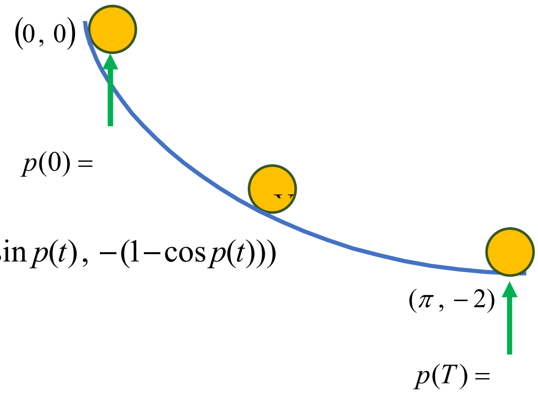
定積分の置換積分

$\alpha < \beta$ のとき，区間 $[\alpha, \beta]$ で微分可能な $u = p(t)$ に対して $a = p(\alpha)$，$b = p(\beta)$ ならば

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(p(t))\,p'(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(u)\,du$$

演習１ $\begin{cases} x = p(t) - \sin p(t) \\ y = -(1-\cos p(t)) \end{cases}$ で表されるサイクロイド曲線に沿って $(0, 0)$ から $(\pi, -2)$ まで ボールが転がる時間を求めよう．

① 曲線に沿った運動を考える．



$v_x =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$v_y =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ であるから

速さ v を半角の公式を用いて表すと

v ＝

※ 半角の公式

$$\sin^2 \frac{p}{2} = \frac{1-\cos p}{2}$$

$$\cos^2 \frac{p}{2} = \frac{1+\cos p}{2}$$

② 力学的エネルギー保存の法則を用いる．
ボールが転がり始めるときの
位置エネルギーは＿＿＿＿＿，運動エネルギーは＿＿＿＿＿であるから
力学的エネルギーは＿＿＿＿＿＿

ボールが転がっている途中での速さ v とすると
位置エネルギーは＿＿＿＿＿＿，運動エネルギーは＿＿＿＿＿であるから
力学的エネルギーは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

力学的エネルギーは等しいから

＝

速さ v について解いて半角の公式を用いると

③　2 つの速さは等しいことから

$$= \qquad\qquad$$

両辺を t で積分する． $t=0$ から $t=T$ までボールが転がるから

ここで置換積分を用いると

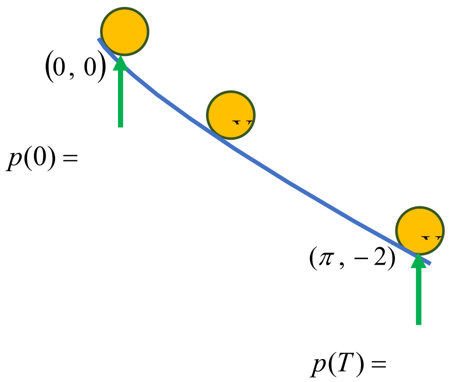
$u=p(t)$に対して $p(0)=$　　， $p(T)=$　　であるから

定積分の置換積分

$\alpha<\beta$ のとき，区間［α，β］で微分可能な $u=p(t)$に対して $a=p(\alpha)$，$b=p(\beta)$ならば

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(p(t))\,p'(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(u)\,du$$

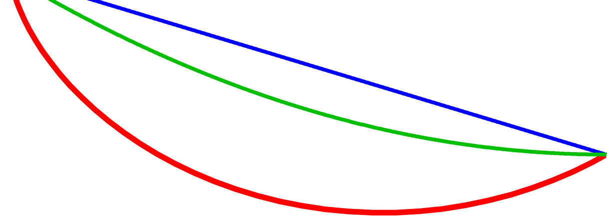
演習２　$\begin{cases} x = \dfrac{8}{5}a\{p(t)\}^{\frac{5}{2}} \\ y = -2\{p(t)\}^2 \end{cases}$ で表される曲線に沿って，(0, 0) から $(\pi, -2)$ までボールが転がる時間を求めよう．（このとき $a = \dfrac{5}{8}\pi$ ）→ 降下時間をそのまま a で計算し，最後に代入しよう．



3 つの曲線の中では＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿に沿ってボールが転がるときが一番早いが・・・
実は・・・

＿＿

（転がす 2 点を決めるとき，終点は始点より低い位置ならどのような点を選んでもよい.）

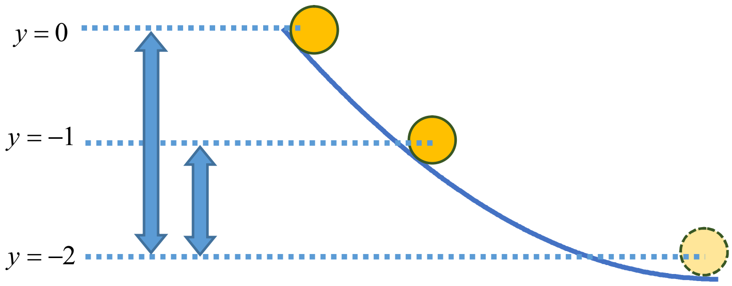


このように 2 点を結ぶ曲線に沿ってボールを転がしたとき，最も早く転がる曲線を**最速降下曲線**といい，最速降下曲線がどのような曲線になるのかという問題は，1696 年にスイスの数学者のヨハン・ベルヌーイが懸賞問題として提起した．この問題に対してベルヌーイ自身を含め，兄のヤコブ，ニュートン，ライプニッツ，ロピタルの 5 人がそれぞれ，サイクロイド曲線であることを証明した.

応用

問題

サイクロイド曲線上の $y=0$ ではなく $y=-1$ から $(\pi,-2)$（最下点）まで
ボールを転がしたとき降下時間はどのように変化するだろう？

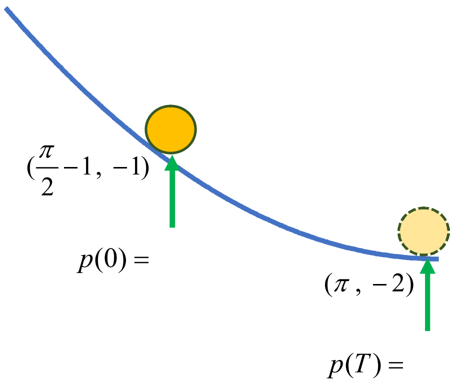


予想と理由

問題　サイクロイド曲線 $\begin{cases} x=p(t)-\sin p(t) \\ y=-(1-\cos p(t)) \end{cases}$ 上の $y=-1$ から $(\pi,-2)$ までボールを転がしたときの降下時間を求めよう．

① 曲線に沿った運動を考える．6 ページの演習①より

$v=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿



② 力学的エネルギー保存の法則を用いる．
ボールが転がり始めるときの
位置エネルギーは＿＿＿＿＿　，
運動エネルギーは＿＿＿＿＿　であるから
力学的エネルギーは＿＿＿＿＿＿＿＿

ボールが転がっている途中での速さ v とすると

位置エネルギーは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，運動エネルギーは＿＿＿＿＿＿であるから

力学的エネルギーは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

力学的エネルギーは等しいから $\cos\frac{p(t)}{2}$ を用いて速さ v を表すと

※　半角の公式

$$\sin^2\frac{p}{2}=\frac{1-\cos p}{2}$$

$$\cos^2\frac{p}{2}=\frac{1+\cos p}{2}$$

ヒント　①すべて角度は半角の公式に合わせよう．

②積分するとき $\cos\dfrac{u}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}s$ と置換して積分しよう．

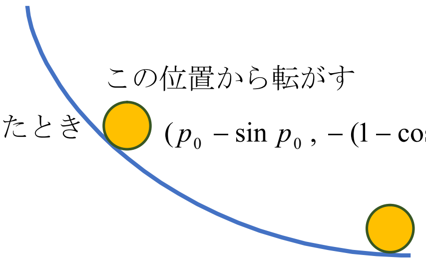
○一般化してみよう．つまり・・・

サイクロイド曲線 $\begin{cases} x = p(t) - \sin p(t) \\ y = -(1 - \cos p(t)) \end{cases}$ 上の

任意の点 $(p_0 - \sin p_0, -(1 - \cos p_0))$ から $(\pi, -2)$ まで転がしたとき

転がる時間はどのように変化するだろう？

この位置から転がす



$(p_0 - \sin p_0, -(1 - \cos p_0))$

$(p(t) - \sin p(t), -(1 - \cos p(t)))$

※　半角の公式

$$\sin^2 \frac{p}{2} = \frac{1 - \cos p}{2}$$

$$\cos^2 \frac{p}{2} = \frac{1 + \cos p}{2}$$

ヒント　①すべて角度は半角に合わせよう.

②積分するとき $\cos\frac{u}{2}=\cos\frac{p_0}{2}s$ と置換しよう.

これらのことから注目すべき事実が現れた！

サイクロイド曲線のま

①

②

このサイクロイド曲線の等時性を利用して

ホイヘンスがサイクロイド曲線を利用した振り子を考えた.

振り子にしたとき，重力などによって振れ幅が減衰
したとしても,サイクロイド曲線には等時性があるから.