

四色定理を題材とした高校生向けの教材開発と実践

酒井駿佑¹, 田中利史²

高校生向けの教材として「地図の彩色問題」を取り上げる。地図はグラフとしてとらえると、その頂点のつながり方を考えながら頂点を彩色することにより、地図の彩色を調べることが出来る。本論文では、グラフの彩色を用いた高校生向けの授業案及び実践授業について述べる。

<キーワード> グラフ, 彩色, 四色定理

1. 序文

平成 21 年度改定の高等学校学習指導要領数学編において、数学科の目標は次のように設定されている。

数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

そこで、事象を数学的に考察し表現する能力を高めること及び、数学的論拠に基づいて判断する態度を育てることをねらいとし、四色定理を題材とした高校生向けの教材開発を行った。本論文では、その教材の概要と実践について述べる。

2. 題材について

四色定理とは『隣接する領域が異なる色になるように地図を塗り分けるとき、どのような地図も 4 色あれば十分である』という定理である。本論文において開発した教材は、この四色定理を題材としている。

地図はグラフを用いて表現することができ

るため、地図の塗り分けはグラフ理論(参考文献 [2]) の問題としてとらえることができる。グラフ理論は国内外において盛んに研究が行われている最先端の数学であるが、教材への応用は、ケーニヒスベルクの橋に代表される一筆書き問題などが一般的であり、地図の塗り分け問題を教材に応用した先行事例は少ない。そこで、グラフの考え方や性質を使って、地図の塗り分けに必要な色の最小数を調べていく、高校生向けの数学教材を開発することにした。そのため、地図の塗り分け問題を高校数学における「図形領域」や「場合の数」の内容を発展させたものと位置付けている。

3. グラフについて

<定義 1 >

ボールを机の上に何個か置き、それらをひもでつなぎ合わせたもの(図 1)をグラフという。また、ボールを頂点、ひもを辺という。

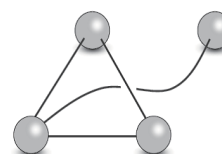


図 1

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

< 定義 2 >

頂点の個数が同じで、頂点同士のつながり方も同じである 2 つのグラフは同型であるという。

< 定義 3 >

地図に対して、次のような操作を考える。

1. 地図の各領域(都道府県や市町村など)に 1 つずつ駅を置く。
2. 2 つの領域が隣り合っているならば、それらの領域上に置いた駅同士を線路でつなぐ。このとき、2 つの領域の境界線と線路が 1 点で交わるようにし、既に敷いてある線路とは交わらないようにする。(図 2) こうして作られた路線図において、駅を頂点、線路を辺とみなしたものを、地図の路線グラフと呼ぶ。



図 2

< 定義 4 >

どの隣り合う 2 頂点も同じ色にならないように色を付けることを、グラフを彩色するという。また、グラフを彩色するために必要な色の最小数を、グラフの彩色数という。

4. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業の教材は、グラフである。それらを題材として扱う理由を以下に示す。

1. それまで扱ったことのない図形をあつか

うものであり、生徒の興味関心を得ることができる。

2. 高校で扱う内容と関連づけができる。
3. 歴史的 content が豊富である。

(2) 授業のねらい

本授業のねらいを以下のようにした。

- (a) グラフの考え方を身に付け、地図をグラフを用いて表現することができる。
- (b) グラフの頂点に彩色をすることで、地図の塗り分けに必要な色の最小数を考えることができる。
- (c) どんな地図も 4 色あれば塗り分けられることを、本時の活動や数学史的な話題から知ることができる。

(3) 授業の構成

ここで授業案の流れを説明する。

1. 本時の課題を与える。

課題

岐阜県の地図は最低何色で塗り分けできるか調べよう。

2. 岐阜県の白地図を提示し、岐阜県の地図は最低何色で塗り分けられるかという問題提起を行う。そして、この問題に取り組むための準備としてグラフを導入する。(< 定義 1 >)

3. 次の演習を行う。

演習 1

次の条件を満たすグラフを，ボールとひもを使って作ってみましょう。
 ・頂点は5つあり，各頂点はA, B, C, D, Eと名前が付いている。
 ・AとB, DとE, CとE, BとD, AとCがそれぞれ1本ずつの辺でつながっている。

この演習を行うと，同じ条件でグラフを作っても下図のように，人によって形や大きさに違いが生じることが予想できる。

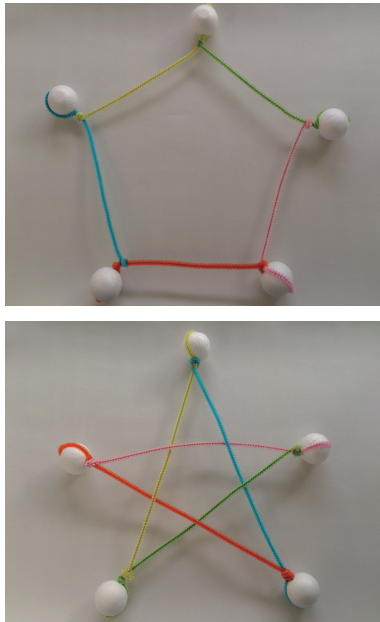


図 3

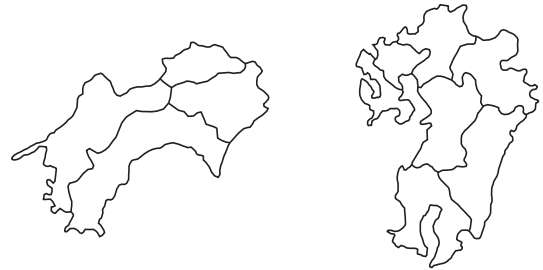
グラフは頂点と辺のつながり方に着目した図形であり，その形や大きさは問題にしないことを授業者が説明する。

4. ここでグラフの同型を定義する。実際にグラフを作るという活動を取り入れることで，同型の概念をイメージしやすくする。
5. 地図をグラフで表現する方法を，授業者が説明する。(< 定義 2 >)

6. 問題演習として，地図の路線グラフを描く活動及び，路線グラフをボールとひもを使って作る活動を行う。

演習 2

- (1) 四国と九州の地図の路線グラフを完成させましょう。
- (2) 四国の路線グラフを，ボールとひもを使って作ってみましょう。



7. グラフの頂点彩色を定義する。(< 定義 3 >)
 頂点彩色は，どの隣り合う2 駅も同じ色にならないように色をつけることに対応することを，授業者が説明する。
8. 問題演習として，演習 2 で描いた路線グラフを彩色する活動を生徒が行う。

演習 3

演習 2 で描いた路線グラフについて，カラーシールを使って彩色してみよう。

生徒が彩色を行う際には，カラーシール(図 4)を頂点の上に貼るとする。これは，彩色する色を変更したいときに，シールを上から貼り直すだけでよく，効率的に活動が行えると考えるためである。

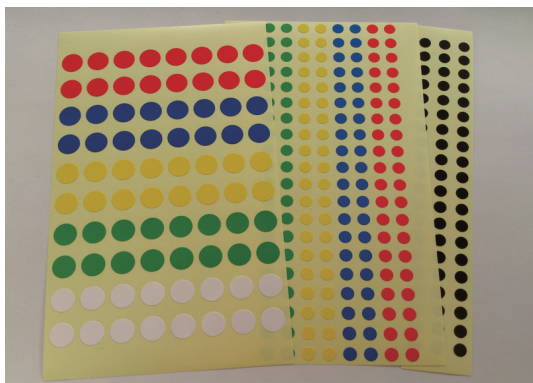


図 4

9. 路線グラフの作り方から，グラフの頂点彩色を考えることで，もとの地図の塗り分けが得られることを授業者が説明する。
10. 問題演習として，様々な地図の路線グラフを彩色する活動を生徒が行う。

演習 4

次の地図の路線グラフを完成させましょう。また，カラーシールで彩色を行い，地図の彩色数を調べましょう。



11. これまでに学習したことを活用して課題追究を行う。岐阜県の地図の路線グラフを A 3 サイズの用紙に拡大印刷したもの（図 5）を使用する。
 岐阜県の地図を一度に塗り分けることは大変であるため，まずは東濃地区周辺について考え，その後，岐阜県全体へ彩色範囲を広げていく。

課題追究 Step 1

東濃地区周辺について，小さいカラーシールを使って彩色し，彩色数を調べましょう。

課題追究 Step 2

岐阜県の地図について，小さいカラーシールを使って彩色し，彩色数を調べましょう。

12. 課題追究を終えた生徒は，できるだけ少ない色で塗り分けるために工夫したことや，使う色の種類を減らすことができない理由を考え，テキストにまとめる。

全体交流の時間を設けて，生徒の意見を取り入れながら，彩色のポイントや彩色数の決定理由についての意見を深めていく。

13. 授業の締めくくりとして，四色定理に関する物語（参考文献 [2]）を紹介する。

(4) 教師の指導・援助

- グラフの説明を行う。
- 地図とグラフの対応について，板書，スライドを用いて丁寧に説明する。
- グラフの彩色の仕方について，スライドにより，例を用いて説明する。

本授業における数学的活動は，具体的な地図に対し，対応するグラフを作成し，実際に塗り分けることで，地図を塗り分けるために最低何色必要かを考察することである。
 演習問題を通して，グラフの基本的性質及びその応用の仕方を知り，生徒が彩色数を調べることが出来るようになることを目標としている。

5. 実践結果

以下のとおりに実践を行った。

講座名：身近な問題を数学で解決しよう！～
地図は何色あれば塗り分けできる？～

日 程：平成 26 年 10 月 22 日（水）13：00～
16:15

場 所：岐阜大学教育学部 A426 教室

対 象：岐阜大学教育学部数学教育講座の大学
3 年生（2 名），大学 4 年生（18 名）

(1) 授業の流れ（教師の指導・援助）

以下のような流れで授業を行った。



図 5

- (a) テキスト及び授業で使用する教材（カラーシール（図 4）及び岐阜県の地図（図 5））を配布する。
- (b) 「岐阜県の地図は最低何色で塗り分けできるか調べよう」という問題提起を行う。
- (c) ボールとひもを用いて，グラフを定義する。
- (d) グラフの同型を定義する。

- (e) 同型なグラフの例として，模型（図 3）を各班に配布する。
- (f) 地図の路線グラフを定義する。
- (g) 学生が地図の路線グラフをテキストに描く演習を行う。
- (h) グラフの彩色を定義する。
- (i) 学生が前の演習で描いたグラフをカラーシールで彩色する。
- (j) ここまでの学習をもとに，本時の課題に取り組む。
- (k) 課題追究の際，学生から次のような意見が出たため，ここで紹介する。
 - できるだけ少ない色で塗り分けするための工夫
 この形のグラフ（図 6）は 3 色で塗る。

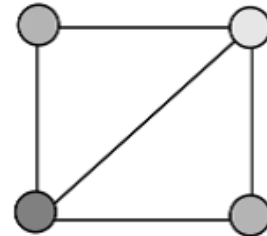


図 6

4 頂点完全グラフ（図 7）は 4 色で塗る。

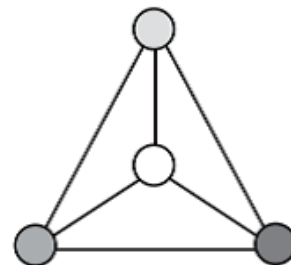


図 7

辺が集まっている頂点に着目する(図8)。

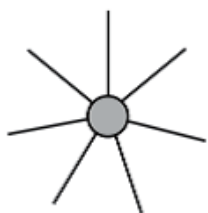


図8

彩色済みの頂点の色を変更する(図9)。

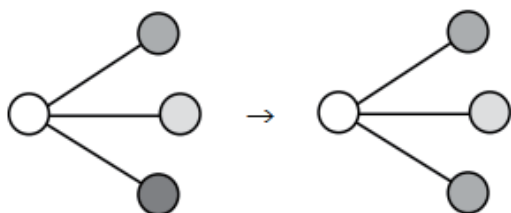


図9

- 岐阜県の地図が3色以下で塗り分けできない理由
 - ・4頂点完全グラフ(図7)を含んでいるから。
 - ・奇数角形のグラフ(図10)を含んでいるから。

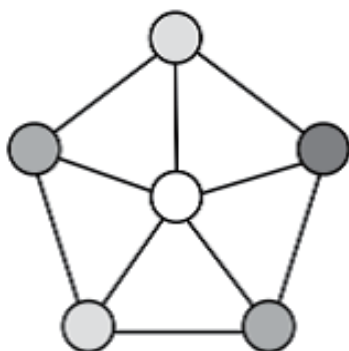


図10

(2) 実践結果とその考察

授業後にアンケートを実施した。その回答及び授業中の生徒の様子をもとに、本授業のねらいの達成度の考察を行う。

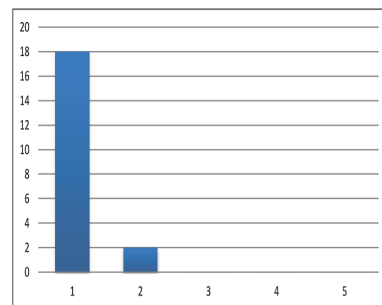
(a) アンケートの質問項目とその結果

アンケートの質問項目は次のとおりである。

1. 講座を受講しての感想について

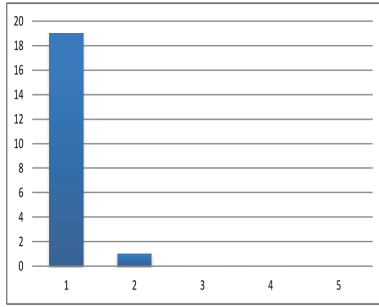
(1) Q1. 地図をグラフを用いて表現することができましたか。

1. できた
2. ややできた
3. どちらともいえない
4. あまりできなかった
5. 全然できなかった



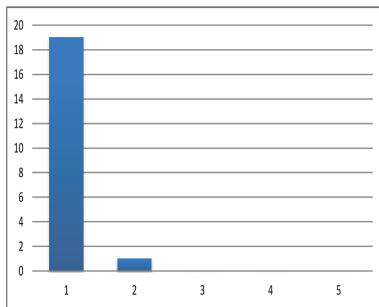
(2) Q2. グラフを使うことで地図の塗り分け方を調べられることがわかりましたか。

1. わかった
2. ややわかった
3. どちらともいえない
4. あまりわからなかった
5. 全然わからなかった



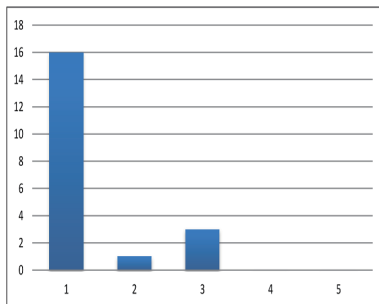
(3) Q3. 地図を塗り分けるために必要な色の最小数を調べることができましたか。

1. できた
2. ややできた
3. どちらともいえない
4. あまりできなかった
5. 全然できなかった



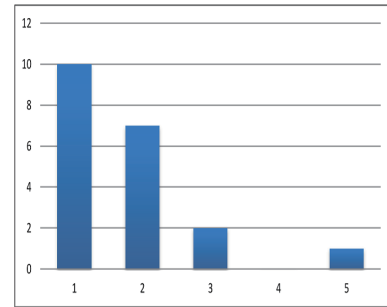
(4) Q4. どんな地図も4色あれば塗り分けられることを実感できましたか。

1. できた
2. ややできた
3. どちらともいえない
4. あまりできなかった
5. 全然できなかった



(5) Q5. 現代数学であるグラフ理論のことをもっと知りたいと思いましたか。

1. そう思う
2. ややそう思う
3. どちらともいえない
4. あまりそう思わない
5. 全然そう思わない



(6) Q6. 本日の授業に関して、ご意見・ご感想などありましたら記述してください。

・具体的に色を塗り分ける活動しながら学べたので、スムーズに理解できました。

・身近な地図を使った活動を取り入れることで、楽しく、実感を伴った理解をすることができました。

・地図の問題を数学を利用して解決するという経験はなかなか無かったので、興味・関心を持って取り組むことができたし、面白いと感じました。

・岐阜県のような領域が多い地図を塗り分けたのは初めてでしたが、思っていた以上に難しい作業でした。

・四色定理は何度か聞いたことがあって、どんなことをするのかと思っていました。実際にやってみると、具体的な操作でもわりと難しいことがわかりました。

・四色定理の存在は知っていたけれど、その歴史については初めて知って、興味を持ちました。

- ・四色定理がなぜ有名になったかなど、歴史を知ることができて興味を持ったというわかりやすく興味を引かせるようにされていたので勉強になりました。
- ・大学の内容でも、中高生にわかるような教材が作れると実感しました。
- ・数学にときめいてもらえるきっかけとして、いい教材であると思いました。

(b) 授業の比較及びねらいの達成度

ねらい1 に対する評価

アンケート「Q1. 地図をグラフを用いて表現することができましたか。」に対して、20人すべての学生が「1. できた」または「2. ややできた」と回答している。また、実践においても、多くの学生が地図の路線グラフを描くことができていたことから、このねらいは達成できたと考えられる。

ねらい2 に対する評価

アンケート「Q3. 地図を塗り分けるために必要な色の最小数を調べることができましたか。」に対して、20人すべての学生が「1. できた」または「2. ややできた」と回答している。また、塗り分けに必要な色の最小数を調べるための様々な工夫を考えることができていたことから、このねらいは達成できたと考えられる。

ねらい3 に対する評価

アンケート「Q4. どんな地図も4色あれば塗り分けられることを実感できましたか。」に対して、20人中17人の学生が「1. できた」または「2. ややできた」と回答している。また、記述式アンケートにおいて、四色問題の

歴史を知ることができて興味を持ったという感想も多く寄せられたことから、このねらいは達成できたと考えられる。

6. 反省と今後の課題

実践を終えて、本教材の見直しが課題となった。今回の実践では、演習問題や課題追究の時間として想定していたものが長すぎたため、授業の終了が予定よりも30分程早まってしまった。もう少し発展的な内容を取り組んだり、理論の部分に重点を置いた授業とし、より深く追究できるように構成を作り替える必要があると考えた。

良かった点としては、学生から「身近な地図を取り上げたことで、実感を伴った理解ができた」などの感想が寄せられたことである。これは、教材研究の段階から重点を置いていた部分であった。

また、課題追究の場面では、3人の学生が塗り分けに5色必要であるという結果になっていたが、同じ班の学生が4色で塗り分けられていることを知り、どこを修正すればいいかを自然に班全体で交流する姿も見られ、これも良い点であったと考える。

7. 参考文献

- [1] ロビン・ウィルソン (著), 茂木 健一郎 (訳), 四色問題, 新潮社 (2004).
- [2] 鈴木 晋一, 数学教材としてのグラフ理論 (早稲田教育叢書), 学文社 (2012).