岐阜数学教育研究
2014, Vol.13, 12-20

小学校高学年における不定形図形の求積に関する教材開発実践
－パンチングボードを利用したドットの視点による面積計算からモンテカルロ法へ－

稲葉芳成[1]，　河﨑哲嗣[2]

概要　小学校の算数科では基本的な平面図形の面積の求め方を学習する。第5学年では等積変形や倍積変形を通して台形やひし形の面積の求め方を学習し，さらには不定形の面積の求め方として方眼を用いた方法も発展的な内容として扱われる。面積要素から全体の面積を考えることは方法として一般的である。一方で，ある図形領域の面積が既知である場合に，それを基準に，求めたい領域の面積の割合を知ることで面積を求めることもできる。本稿ではこのような求積の考えに基づく教材の一例とその実践例を紹介する。

〈キーワード〉：図形の面積，割合，パンチングボード，モンテカルロ法

1 緒言・実践の目的

図形の面積は，図形の形状と共に図形の計量に関する重要な概念である。通常，小学校第4学年から面積を取り扱い，第5学年では様々な定型の図形の面積の求め方を学習する。およそ平面図形の面積については定形のものは小学校第4学年で長さから広さの概念への進展として長方形，正方形の面積の求め方にはじまり，小学校第5学年では三角形，平行四辺形，さらには，ひし形や台形の面積の求め方を学習し，第6学年では円の面積の求め方を学習する。通常，そこでの面積概念の形成については，単位面積を持つ図形を求めるべき図形に埋め込む方法が教科書では採られている。直線によって囲まれる図形，すなわち多角形については基本的に三角形などの基礎となる要素に分割することで求積が可能であり，曲線で囲まれる図形として円の面積についても学習する。円の場合には，方眼を用いた格子状の分割によるおよその見積もりや中心角が微小な扇形に切り分けることと，それを並び替えて平行四辺形に近似する説明などが用いられる。さらに不定形の図形の求積では，これらの活用や応用として「概形とおよその面積」として現実の様々な不定形の領域の面積を定形の図形に近似してその面積を概算する方法や方眼を用いた方法が教科書に盛り込まれている。このような方眼を用いる方法は，方眼の1つの「ます」を単位面積とすれば素朴な測度論にも通じるもので，面積概念の認識上も自然な発想である。これに関する実践としてジョルダン測度についての高校生向きの実践は，岩島・石渡[4]により紹介されている。方眼を用いる方法は，「単位面積が何個分あるか」という考え方のために直観的にも理解しやすく，方眼の密度を変化させることで近似の制度が向上することも理解し易い特徴があり優れたものである。

一方で，部分と全体という発想に基づく割合による面積把握の活動も重要なものであると考え，そうした内容の実践を行った。具体的には基本となる領域に規則的な間隔で並ぶ点（ドット）をとりその個数を数える。この領域の面積とドットの個数を基準に，求めたい図形領域内のドットの個数と基本領域のドットの個数の比率から面積を求めようとするものである。

原理的にはこちらの方法も単純なものであり，ドットをとる，数える，比を考えるという一連の操作も簡単なことから，学齢の比較的低い段階でも実践可能であると判断し，不定形な図形の求積の一例としての実践を試

1 立命館宇治高等学校
2 岐阜大学教育学部

みた。

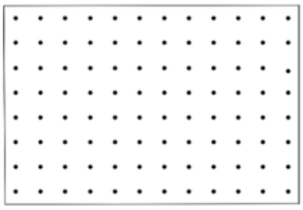

図１：基本となる領域とドットの一例

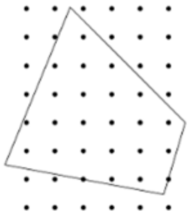

図２：対象となる図形内のドットの数を数える

実践の目的としては，ドットによる求積について小学生に対しても実際に理解可能な方法であるかどうかを検証すること，さらにドットをランダムなものに置き換えることにより，規則性と不規則性を問わず点の個数が領域の広さの割合に応じていることを理解することで，モンテカルロ法への発展的繋がりを扱うことが可能であるかどうかも考察のひとつとした。

2 教材と実践の状況

2014 年度の日本学術振興会「ひらめき☆ときめきサイエンス～ようこそ大学の研究室へ～KAKENHI(研究成果の社会還元･普及事業)」に基づく岐阜大学公開講座「はじめて！ワクワク！？見て・さわって・考える『形と数の教室』」が 2014 年 4 月から 8 月まで 6 回にわたり岐阜大学サテライトキャンパスにて実施された。本稿の実践内容はその第 6 回として「いろんな形の面積をもとめてみよう」と題して実施した回のものである。講座の時間は午前 10:00～正午までの 2 時間で，対象生徒は小学校 5 年生以上の小学生が中心（一部中学生も含む）であった。当日は岐阜市を中心とした近郊からの参加者が多く保護者を含む 40 余名が第 6 回講座に参加した。

2-2　講座における内容の算数・数学的意味付け

今回の教材は，面積比を用いた様々な平面図形や領域の求積である。算数科・数学科では通例では面積公式を用いた求積法を取り扱うが，実際の生活場面においては典型的な三角形や四角形などの平面図形よりも複雑な形状であったり，さらには円も含めて，曲線で囲まれる領域の面積を求めることも必要となってくる。そうした場合の求積にはいくつかの方法があり，通例は図形の細分やメッシュに分割する方法が採られ，算数の教科書にも面積の概算の方法のひとつとして紹介されている。

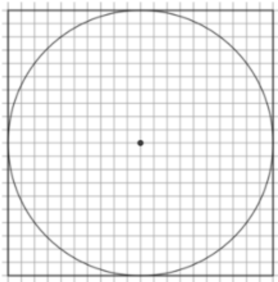

図３：格子分割による円の求積の一例

実際に半径を 1 として 1/10 の長さでメッシュをとれば, 円内の正方形は 276 個であり，円周が乗る正方形は 76 個あるのでこの分の面積の和を大まかに正方形面積の和の 1/2 として考えることにすれば,

$$276\times\left(\frac{1}{10}\right)^2+76\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times\frac{1}{2}=3.14$$

となる。実際の円周率に近い値が得られているが，これは偶然の結果もあり実際には円周の乗る正方形面積の和を 1/2 としているところには有力な根拠が無く，およその近似によるものである。また円周が乗る正方形がどれかという判断がなかなか難しいので，実際に

授業で扱う場合には，同じ条件下でも概算値は異なる場合が多い。

一方，基本的な図形を基にして，その図形の面積を既知としたときに，それとの比や割合をとることで求めたい図形の面積を知ることができる。等積変形や相似図形の面積比は小学校の高学年であれば理解可能な概念である。今回の実践教材では，この面積比をどのように捉えるかという手法として,「一様な分布をもつ点の数の比」という考えを用いる。ここでの「一様」は感覚的に濃淡の無い様子を表すものであって，数学的に，厳密に領域内の任意の単位面積あたりの点の個数が一定である等の定義は強調しない。また今回の教材では教授法の工夫として，そうした操作の補助としての簡単な道具を用い，作業的に手を動かすことで小学生などの学齢の低い児童にも興味を持たせながら，面積概算の精度を上げる方法を採用した。「一様な分布の点」という意味では2つの意味が考えられる。ひとつは完全に規則的に並んだ分布である。通常，学齢が低い対象生徒に「一様」を説明することは難しいが，同類の言葉で「均一」あるいは「均等」または「規則正しい」などの言葉を用いて説明しながら，イメージとして「濃いところと薄いところがない」感じを理解してもらう。勿論イメージ的には「完全に規則正しい分布」が容易である。これに対して不規則な点の分布でも一様性を考えることができる。小学生は勿論のこと大人でもこの状況を理解することは難しい。しかし不規則であっても濃淡の無い状況が作れることを感覚的にイメージすることは可能である。このような基礎的な理解の上で，モンテカルロ法の紹介に続く流れで構成した。メッシュの場合と異なり，ドットでの理解はモンテカルロ法の考えに直接結びつくことが利点である。

講座は大雑把に2部構成とし，第1部は規則的に並んだドットを用いての不定形の領域の求積，そして第2部はランダムなドットを用いての求積とその応用とした。

この実践において，要となったものはドットを数える際に利用した「パンチングボード」である。パンチングボードは一般的に「複数の穴のあいた板」をさすが，ここではA4版に近い大きさの透明塩ビ版に直径約3㎜の円形の穴が規則正しく並んだものを利用した。このパンチングボードを利用する利点は方法論的に以下の優れた点があると考えたからである。

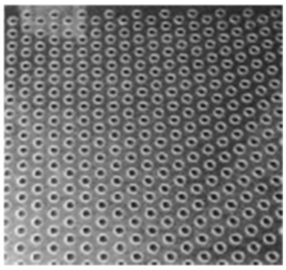

写真1：透明塩ビ製パンチングボード(穴の様子がわかりやすいように褐色の床面上に置いたもの)

①透明な塩ビ板を利用するため，様々な図形に対して重ねることで容易に規則正しいドットを打つことができる。これに対し透明でないパンチングボードでは対象となる図形が見えないためこの活動には不向きである。
②パンチングボードの穴の大きさが適度であるため，点を打つ作業が容易で，かつ間隔の適度さからリズミカルに打点が行える。
③パンチングボードという規格に基づくため教室内の結果の統一性や時間経過に依らない統一性が確保できる。つまりいつでもどこでも誰が取り組んでも同様の結果が得られる。
④パンチングボードがDIYショップと呼ばれるホームセンター等で数百円程度の比較的安価に容易に入手できるために，コスト面からの実践上の汎用性を持つ。

以上の利点を認識した上で，実際にパンチ穴に沿いながら，再現性を確保した実践が可能となった。

2-2　講座の流れ

講座配布のハンドアウトより以下に講座の流れを示す。

岐阜大学教育学部　公開講座　はじめて！ワクワク！？見て・さわって・考える「形と数の教室」
第６回「いろんな形の面積をもとめてみよう」

立命館宇治中学校・高等学校
教諭　稲葉芳成

■　今日やること
図形の面積を考えます。
パンチングボードという板を使います
そこからいろんな図形のおよその面積を求める方法を考えます

■　使うもの
紙
鉛筆
コンパス
電卓（あれば便利）
定規（あれば便利）
パンチングボード

■　内容
１　復習
①　面積の求め方を復習します（長方形・三角形・台形・円）
②　全体と部分の関係を見ておきます

２　準備
①　15 cm×20 cm の長方形をかきます
②　その 15 cm×20 cm の長方形に入るパンチ穴の個数を求めます

３　実験１
①　上底の長さが 5 cm，下底の長さが 10 cm，高さが 10 cm の台形をかきます
②　この台形のおよその面積を求めます

４　実験２
①　半径 5 cm の円をかきます
②　この円のおよその面積を求めます

５　実験３
①　岐阜県の白地図を用意します
②　岐阜県のおよその面積を求めます

６　実験４
①　一辺の長さが 10 cm の正方形をかきます
②　この中に点を 300 個でたらめに打ちます
③　この正方形に合わせて半径が 10 cm の円の四分の一だけをかきます
④　円の外側と内側の点の個数を数えます
⑤　何がわかるか考えます

７　実験５（時間が余れば）
コンピュータを用いた事例紹介

2-3　第１部（基本的な図形の求積）

対象となる児童が小学校 5 年生以上であったため面積の基礎的な学習事項は既習であり，まず準備として簡単な定型の平面図形の面積の求積公式を確認した。その上で用意したパンチングボードの基礎的な性質として，基準となる図形領域の面積とドットの数を定める作業に取り組んだ。

今回の講座では基本的な領域を 15 cm×20 cm の長方形とした。この領域はどんなものでもよいが，十分に広い領域をとるほうが誤差は小さくなる。一方で広い領域をとれば打点や計数に時間がかかるため適度な大きさの模索が必要である。今回は全員でこの領域に取り組んだ。約 10 分程で打点と計数を終えたが，このとき，打点のコツ（あまり丁寧に鉛筆で綺麗に点を打つのではなくむしろリズミカルに 1 点ずつ打つのが良いこと）や計数のコツ（規則的に並ぶ場合には計算で計数が可能であること）などを体感する。パンチングボードのあて方によって計数値は異なるので，数人から

計数値を聴取し，そのおよその値を講座全体の値として採用した。この際には，平均値や中央値を採用することも考えられるが，講座の中心テーマは面積であることから，ここでの統計的な扱いは厳密性を捨てて直観的なものとしておく。

このようにして面積 300 ㎠に対して 710 個のドットという関係が基本的な基準値となった。先にも触れたが，パンチングボードのあて方には個性が出るために個人差を残したまま個別の値を基準値にして講座を進めることもできるが，講座の一体性を確保する目的と，平均的な値を採用することで誤差を小さくできることから講座全体の基準値はひとつに定めた。

次に，求めたい図形をその基本図形内に描いてそこに入るパンチ穴を数えることでパンチ穴の全体との比からの面積比によって求めたい図形のおよその面積を知る。こうした面積比や領域比という考え方は割合や確率といった他の分野と密接な関係がある。サイコロの目などの離散的な確率は馴染み深いが，連続的な確率を考える場合には領域比を考えることとなる。

事前説明では直観的な説明として，以下のような図で面積比とドット比について参加児童の簡単な理解を得た。

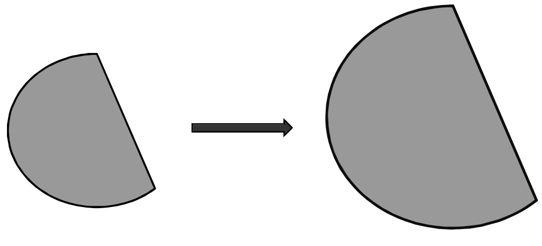

図４：図形の面積が２倍になると，入るドットの数も２倍となることを直観的に示す

次に実際の求積に進む。まず，この方法で面積が求められるのか？という疑問を解消する意味も込めて基本的な図形で検証する作業を行った。対象としたのは台形と円である。

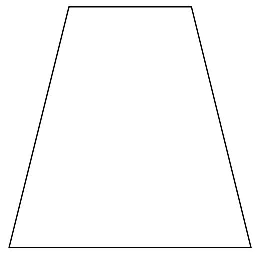

図５：上底５ cm,下底 10 cm，高さ 10 cm の台形

円は本来小学校第６学年の学習内容であるが，参加者の殆どは既にその公式である「半径×半径×3.14」や円周率という言葉を知っていた。

この例では先の基準となる長方形の場合と異なりパンチングボードをあてた場合に穴の並びに対して斜めに横切る線分が生じる。この場合に穴のおよそ半分以上がこの図形内に入る場合は打点しそれ以外は打点しないというルールに沿いながらドットを打っていく。こうしてこの領域内に 180 個のドットが入ることを確認した。これにより以下の関係が生じる。

	基準の長方形	対象の台形
面積	300 ㎠	
ドットの個数	710 個	180 個

表１：基準の長方形と対象となる台形の，面積とドットの個数の関係

ここから台形の面積が簡単な方程式として計算できるが，小学生対象であるため文字式を避けて簡単な数字の場合に置き換えて説明を行った上で，

台形の面積＝300×180÷710＝76.056

を得た。公式による実際の面積は 75 ㎠となることから，誤差は約１ ㎠強である。参加児童は概ね納得していたが，誤差が大きいという指摘も聞こえた。

これに続いて円の面積についても検証した。曲線を含む場合にも有効であるかどうかの検証も兼ねている。ここでは半径５ cm の円を用意した。この場合にも以下の関係が得

られた。

	基準の長方形	対象の円
面積	300 ㎠	
ドットの個数	710 個	188 個

表２：基準の長方形と対象となる円の，面積とドットの個数の関係

これによる面積は 79.4 ㎠であり，公式による面積 78.5 ㎠に比べて良い近似となっている。この過程を通して参加者はパンチングボードを用いた打点の計数による方法が図形の求積に有効であることを体感できたと思われる。また時間の関係上十分な時間をとることができなかったが，考察として以下のような問いを投げかけた。

「およその値がもっと正確なものに近くなるにはどういう工夫が必要でしょう（何かパンチングボードの他に似たような道具が使えるでしょうか)」

これに対して，参加者の一部から「点がもっとたくさん打てるようにする」という回答を得ることができた。

2-4　第２部（応用）

簡単な図形での検証の後，身近な図形や領域の面積を測ることも楽しい。例えば自分の手形などの不定形なものの面積を求めさせてもよいが，時間的な制約も考慮する必要があり，実際には準備を含めて第１部を終えるまでに１時間を要した。休息後の第２部として参加者の多くの居住地である岐阜県の面積を求める作業に取り組んだ。用意したものは 10 万分の１の白地図である。この領域にも同様な方法で取り組むことにより以下の関係を得た。

	基準の長方形	10 万分の１岐阜県
面積	300 ㎠	
ドットの個数	710 個	240～260 個

表３：基準の長方形と対象となる地図上の岐阜県の領域の面積と，ドットの個数の関係

図６：岐阜県の白地図，児童には図の縮尺として 30km が３cm になっている地図として説明

境界線が複雑なためにドットの計数値のばらつきは大きなものとなる。外れ値と思われるものを除いた値が上表の値である。例えばここで 252 個の点を例に計算すると白地図上の岐阜県の面積が 106.479㎠となる。実際には縮尺上の変換をしなければならないため 10 万の２乗値をかけて単位変換する必要がある。または面積で考え 100 倍して㎢に直すことが必要である。しかし時間の都合上これは天下り的にせざるを得なかった。岐阜県の面積は公称値として 10620 ㎢とされており，ここでもこの方法の有効性は体感できたと考えられる。また居住県の面積などの身近な題材に取り組むことで，求積過程において，岐阜県の面積が全国第７位であることなどを賑やかに語る風景が生じていた。

次にこの発展として「モンテカルロ法」による求積と円周率に進んだ。一般にモンテカルロ法はコンピュータを用いてのランダムな点の発生に基づく（実際には疑似乱数ではあるが）ものである。先の例ではドットをとる際に補助的な道具としてパンチングボードを

用いたことで，ある程度の精度をもって一定間隔，つまり規則性・一様性が確保されていた。モンテカルロ法では規則性に囚われずに一様性を確保することが求められるが「全体と部分の一様性が同程度であれば規則性に係わらずに割合の精度が保証される」という事実を直観的に理解できるかがポイントとなる。例えばそれはランダムな点をフリーハンドでとることでそのことを簡単に確認するために単純な長方形とその部分をとって確かめる作業などを行うことである程度検証可能であり，過去に筆者（稲葉）は高校生を対象にそのような実践を試みた経験がある。

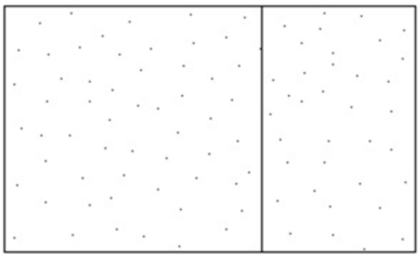

図７：フリーハンドの打点による求積

ランダムに点をとることが一定間隔で点をとることと同等な役割を果たすことが，小学生に直観的に理解できるかどうか怪しいところはあったが，例えば何かの粉状のものを一定の高さから振りかければ，そこでは均一性が確保できるようなイメージとして捉える程度である。そこで円の面積と，そこからの円周率の算出をフリーハンドによる打点の方法，つまり簡易的な疑似モンテカルロ法によって求めた。

用意するものは 10cm×10cm の正方形である。流れとしては以下の通りである。

①正方形に適当に 300 個の点を打たせる（300 個でなくてもよい）。

②1 つの頂点（本講座では左下）を中心にしてコンパスで 1/4 円を描く。

③2 つに分けられた領域の 1/4 円内の点の個数を数える（実際は狭いほうの点の個数を数えて 300 から引く）。

④点の個数の比から面積比を考え，1/4 円の面積を求める。

⑤面積から円周率を求める。

⑥精度の向上のため，参加者のいくつかの平均をとっても良い。

この方法では，過去の経験からフリーハンドな打点の一様性の精度により円周率の値は通常 2.9～3.3 の値をとる場合が多い。しかし第１部で，ある程度均一な点をとることに親しんだ後なので精度はこれより良くなることが期待できる。

実際に参加者が得た数値は 3.2 付近のものであった。

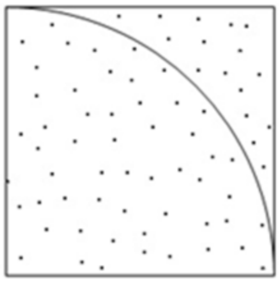

図８：フリーハンドの打点による簡易モンテカルロ法

中には極端に偏った打点を行った児童もおり，その場合には大きく理想値の 3.14 から外れる。しかしそうした事例の交流ができれば，理想的な打点の様子を交換することも可能である。また適当な人数のデータを集計して平均値をとるなどの統計処理をおこなうことで，より精度の良い結果を得ることもできる。

考察としては，どんな点の打ち方が望ましいかを十分に時間をとって考えさせることが出来なかったが，「偏らないように打つことが望ましいこと」，「規則的に並んだ偏りの無さ」と「不規則であっても偏りの無い状態」が求積に同程度に有効であることを説明した。最後にモンテカルロ法の名称やコンピュータによる事例紹介を行って講座を終えた。

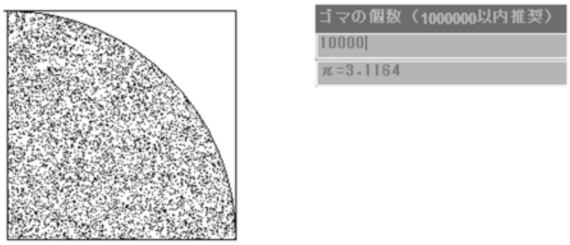

図９：Java を利用したモンテカルロシミュレーションの例

出典：http://www.f.waseda.jp/takezawa/math/number/Pi/monte.html

3 結果と考察

この講座を通して，児童には面積比による不定形領域の求積の方法を体験してもらうことができた。また，その際には補助的な道具として透明パンチングボードを利用した。操作という点でも，簡単な道具を用いて打点と計数によって身の回りの図形の面積がおよそ求められることを知ってもらうことができた。

もう少し詳しい考察として，表４にも示した事後の調査から，理解の状況が概ね良好であり，全体と部分の関係から比による面積の計算という考え方の理解そのものも概ね良好であったと考えられる。ただし，パンチングボードを用いての，ドットの計数による，「ドット比＝面積比」の転換の理解と計算については，関係性からの方程式を解く過程となるために，学齢の低い一部の児童には難しかった様子で，直後の感想文では「計算が速すぎて追いつけなかった」というものが見られた。この点は実践上もう少し丁寧さが必要であったと思われる。

全体としての実践授業の雰囲気は，対象となる児童の興味関心度が高かったことに支えられた。ドットの打点と計数には相当な時間が必要であり，飽きてしまう心配がある。実際に著者の過去の経験では高校生に取り組ませると，少なくない生徒が作業に取り組まずに他者の結果を待つ状態となる。単純作業が連続する退屈さは，この教材の持つ短所である。

以下の表は参加者に対する事後調査の結果である。それぞれ興味を持てたか①，理解ができたか②，を降順の各５段階で自己評価してもらった。これを見る限りにおいては，当日の参加者のように積極的に算数の講座に興味を抱いて参加する児童・生徒には内容自体の興味関心は高く，理解度も高かったと考えて良いであろう。

①興味	小5	小6	中学生	大人
5	10	6	0	6
4	5	3	2	2
3	3	0	0	0
2	0	0	0	0
1	0	0	0	0
平均	4.4	4.7	4	4.8

②理解	小5	小6	中学生	大人
5	9	6	0	5
4	5	2	1	2
3	3	1	1	1
2	1	0	0	0
1	0	0	0	0
平均	4.2	4.6	3.5	4.5

表４：事後の調査結果の一覧（降順５段階）

講座は２時間の構成としたが時間に余裕があれば児童と共に考察を十分に行えたという反省点がある。ドットの打点のコツや近似誤差を少なくするための方策，あるいは平均値や中央値を採用することなどの議論などを経ることも可能である。また規則性と不規則性によらない「偏りの無さ」についても双方向的に議論して確かめることも可能であろう。そのような意味では，このまま教室内にこの教材を持ち込むことは危険である。しかし，メッシュをとる従来広く行われている方法に加えて，ドットをとる視点を加えることで，

あらたな求積手段を獲得すると同時に，将来的なICT利用に伴うモンテカルロ法の有効性や乱数などの概念理解にも繋がる点は有益なものである。手作業的にも，メッシュをとる方法は，与えられた図形や領域を方眼紙上に写すか，その領域に格子状の直線を引くかの作業を伴う。その点，透明塩ビ製のパンチングボードならば，上から直接重ねるだけでドットの個数が計数できるために簡便とも言え，方法論的に優れた面を持つものと考えられる。参加者の感想は概ね好評で5段階評価として平均値は4を超えるものであった。

今回の実践は2時間の特別な枠組みの中で行われたが，通常の教室内で実施する場合には，準備と導入・基本的な図形の求積・応用と分けての3時間程度が必要となる。実施の可能性は少なくないが現状，各単元にミニマムの時間しかとれない学校の算数の現場に持ち込むことは難しいことが予想される。そのような意味では発展的あるいはオプション的な学習の機会の中で扱われるべき教材のひとつと位置づけることができよう。

〈謝辞〉

実践授業を行う上での指導補助ならびに事後調査の集計をして頂いた岐阜大学大学院教育学研究科大学院生の村井独歩氏に感謝する。

〈参考文献〉

[1] 島田和昭「思考力の育成を目指した指導 ―面積(概念形成)の指導を例にして　その2―」イプシロン，愛知教育大学数学教室，1989，31，67-75.

[2] 栾山仁志「三角形の面積概念に関する概念イメージの研究」上越数学教育研究第17号，2002，79-90

[3] 確かな学びを支える授業改善実践事例集数学部会「第2学年『数量関係』題材『課題学習-宮城県の面積を求めよう-』」確かな学びを支える授業改善実践事例集Part.2，仙台市教育センター，2005，101-104

[4] 岩島慶尚，石渡哲哉「『面積の定義』を素材とした教材開発～定義の作成～」岐阜数学教育研究，2005，Vol.4，7-11

[5] 髙倉亘「幾何学的確率に関する教材について」北海道算数数学教育会高等学校部会研究部レポート
http://izumi-math.jp/W_Takakura/k_kakuritu/k_kakuritu.pdf