岐阜数学教育研究
2013,Vol.12, 11-26

道に沿った距離関数を用いた図形領域における教材の開発と実践

安藤茜[1] 佐治健太郎[2]

ユークリッド距離で定義されている図形に関して, ユークリッド距離の代わりに道に沿った距離を用いたとき, それらの図形の形がどのように変化するかを述べる. さらにそれを題材に, 新しい図形の発見の出来る授業を提案する.
＜キーワード＞　ユークリッド距離, 1-ノルム, 絶対値

1　序

平成 21 年の高等学校学習指導要領 [3] に, 図形領域に関して「図形に対する直観力・洞察力を養い, 図形の性質を論理的に考察し表現する能力を育成する.」と書かれている. このことを実現するために図形領域において生徒の興味を喚起できる教材を作成した. 教材を作成するにあたって以下に重点を置いた. (1) 生徒が数学と日常生活とのつながりを感じられること. (2) 創造的活動を行えること. (3) 通常の数学の授業と関連すること. (4) 生徒に数学の楽しさやよさを伝えること. さらに, 高等学校には, 数学の苦手な生徒がいる. 通常の授業とは一見違う要素を取り入れ, その生徒達にも数学に興味・関心がもてるようになることも意識した.

小学校・中学校・高等学校における算数・数学では多くの図形を扱う. それらはほとんど, ユークリッド距離を用いて定義される. 例えば線分は端点間の最短 (ユークリッド) 距離を与える集合であり, 円は一点からの (ユークリッド) 距離が等しい点の集合である. 角度は線分の長さから決まる. 二次曲線は全て (ユークリッド) 距離の言葉を用いて定義することができる. したがって土台となるユークリッド距離関数を他の距離関数に取り替えればこれらの図形は全て形が変化すると考えられる. さらに, それは取り替えた距離関数の性質を反映した図形になることが予想できる. また, そのような図形は通常教科書や問題集では扱われない. したがって, その形を調べることは, 生徒にとって新しい図形の発見であり, その活動は, 生徒の知的探究心を刺激することができると考えられる. これは前掲の重点 (2) を実現できる. 本論文では 2 点間の距離として 1-ノルムとよばれる, x 座標の差と y 座標の差の和で定義される距離を採用し, このような図形を調べる授業の提案と実践の報告を行う. 距離として 1-ノルムを採用した最大の理由は重点の (1) に挙げたように生徒に対して, 実生活に馴染みがあるとの説明がしやすいからである. つまり「現実の世界においてある地点からある地点まで行くのに最短距離でいけることはめったにない. 道に沿って移動する必要があるからである. 道が京都市のように碁盤の目状に整備されているところであれば 1-ノルムは 2 点間を移動する際の移動距離といえる. すべての都市がこのような構造を持っているわけではないが一つの理想化された状況として 1-ノルムは道に沿った距離としての

[1]岐阜大学大学院教育学研究科 (岐阜市柳戸 1-1)
[2]神戸大学大学院理学研究科 (神戸市灘区六甲台町 1-1)

意味をもつ.」のように説明できる. また, このように状況を単純化することは数学の思考テクニックとして基本的なものである. さらに, 本文中でみるように, 1-ノルムを使って求めたい図形を描こうとすると絶対値計算をかなり注意深く行う必要がある. したがって, 絶対値の計算演習を兼ねることができ, 重点 (3) を叶えられる. これらのことから, 1-ノルムを採用した.

2 教材について

第 1 節で言及した 1-ノルムの定義を述べる. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の 2 点 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ に対して, 実数 $d_1(x,y)$ を

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

と定義する. この関数は以下の性質をもつことが容易に確かめられる: 任意の $x,y,z\in\boldsymbol{R}^2$ に対して

- $d_1(x,y)\geq 0$ であり, $d_1(x,y)=0$ と $x=y$ は同値.
- $d_1(x,y)=d_1(y,x)$.
- $d_1(x,y)+d_1(y,z)\geq d_1(x,z)$.

このような性質を持つ関数は**距離関数**と呼ばれ, 距離関数の値を**距離**と呼ぶ.

従って d_1 は距離関数であり, d_1 を **1-ノルムが誘導する距離関数**, または単に **1-ノルム**という. また, $d_1(x,y)$ を x,y **間の 1-ノルムによる距離**または単に x, y **間の 1-ノルム**という. 通常の二点間の距離の公式で定まる距離をユークリッド距離と呼ぶが, ユークリッド距離の代わりにこの 1-ノルムを用いると距離を用いて定義される図形の形は変わる. 詳しくは [1, 2] を参照のこと. また, ユークリッド距離関数を 1-ノルムに取り替えるという操作はユークリッド距離のマックス・プラス代数化 (トロピカル化) とみなせることが [1] で指摘されている. 本論文で生徒に形を調べさせる図形は以下のものである. ここで, $x,y\in\boldsymbol{R}^2$ とし, r を正の実数, $l\subset\boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{R}^2$ 内の直線とする.

(1) x,y の**垂直二等分線** $\{p\,|\,d_1(p,x)=d_1(p,y)\}$.

(2) 中心 x, 半径 r の**円** $\{p\,|\,d_1(p,x)=r\}$.

(3) x,y を焦点, r を長軸の長さとする**楕円** $\{p\,|\,d_1(p,x)+d_1(p,y)=r\}$.

(4) x を焦点, l を準線とする**放物線** $\{p\,|\,d_1(p,x)=d_1(p,l)\}$. ここで, $d_1(p,l)=\inf\{d_1(p,q)\,|\,q\in l\}$ である.

(5) x,y を焦点, r を長さの差とする**双曲線** $\{p\,|\,|d_1(p,x)-d_1(p,y)|=r\}$.

(6) x,y からの距離の積が r である図形(**カッシーニの卵形線**) $\{p\,|\,d_1(x,p)d_1(y,p)=r\}$.

(7) x,y からの距離の比が r である図形 (**アポロニウスの円**) $\{p\,|\,d_1(x,p)=kd_1(y,p)\}$.

これらは d_1 をユークリッド距離に読みかえればすべてよく知られた同名の図形の定義と一致する. これらの集合を描くと図 2.1 のようになる.

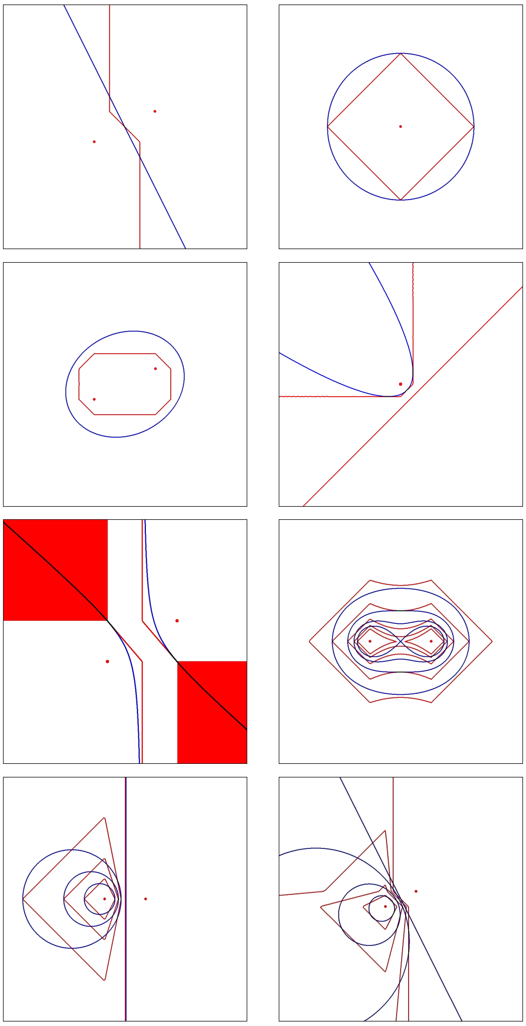


図 2.1: d_1 による図形. 左上から, 垂直二等分線, 円, 楕円, 放物線, 双曲線, カッシーニの卵形線, アポロニウスの円 (2 種類). 赤線はこれらの図形で, 青線は通常のユークリッド距離を用いて同様に定義される図形.

ユークリッド距離の場合の各図形の特徴を適度に持ち, d_1 の持つ $\pi/4$-対称性を反映した興味深い図形である. 距離 d_1 はタクシー距離やマンハッタン距離とよばれることもあり, この距離に関する垂直二等分線, 円, 楕円, 放物線, 双曲線は [2] で見られる. また, 数学の話題として散発的に扱われることもある. 距離関数は 1-ノルムに限らず, また距離関数に限らず, 平面 2 つの直積 $(\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2)$ 上の関数であればどのような関数でも本論文と同様の考察は可能である. ただし, たとえば $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ に対して,

$$f(x, y) = \sin(y_1 - x_1)\sin(y_2 - x_2) - 1$$

で定まるような関数を考えると, 原点中心, 半径 1 の f に関する円は

$$\begin{aligned}&\{(y_1, y_2) \mid \sin(y_1)\sin(y_2) = 0\}\\&\quad = \{(y_1, y_2) \mid y_1 = m\pi, y_2 = n\pi,\\&\qquad\qquad m, n \text{ は整数}\}\end{aligned}$$

となり, 網目のような模様となる. 距離関数でないと円や双曲線などの各図形の持つ特徴は認識しにくい.

本論文で提案する授業は生徒にこれらの図形を絶対値の計算により自分で描かせることが目標である.

3　授業について

前節までで述べた教材を高等学校 1 年次生を対象として, 学習指導要領に新しく導入された課題学習として実際に行った. 本節では授業の概要と考察を述べる.

3.1　授業の情報

対象は岐阜県立高等学校の 1 年次生であり, 期日は 1 月, 参加人数は 16 名であった.

3.2　授業のねらい

これまでに述べてきたことをふまえ, 本授業のねらいを以下の 3 点とした.

(1) ユークリッド距離と 1-ノルムの違いがわかる.

(2) 距離の定義を変えることで, 距離によって定義されている図形の形が変化することがわかる.

(3) 絶対値の計算を習得できる.

3.3 授業の展開

本授業は, 全 1 時間の構成とした. 対象が高校 1 年次生であったので, 絶対値についての習得度が低かったため, 場合分けの数が比較的少ないが, 前節までで述べた教材の特徴が現れていることから, 円のみを扱うことにした. 以下で授業の展開を述べる.

(1) ユークリド距離の公式. 座標平面上の 2 点の距離を, 三平方の定理を用いて計算して求める.

(2) 絶対値. 絶対値の意味についての復習をする. また, 絶対値の記号についての説明を行い, 演習も行う.

(3) 1-ノルムの定義と意味. 碁盤の目上に道が整備されている都市を例に取り, 自然な移動距離をあらわす距離として 1-ノルムの説明を行う. 実際に, 平面上の 2 点の 1-ノルムを求める.

(4) 円の確認. 円の定義の復習をする. 平面上で, ある定点からの距離が一定の点の集まりが円であることを, 実際に座標平面上に描き, 再確認する.

(5) ユークリッド距離による円. 平面上で, ある定点からの距離が一定の点の集まりが円であることを利用し, ユークリッド距離における円の方程式を求める. 本授業では, ある定点を原点, 距離を 2 としておこなう.

(6) 1-ノルムによる円. ユークリッド距離による円と同様に, ある定点を原点, 距離を 2 とする 1-ノルムにおける円を求める. 座標平面上に描き, ユークリッド距離との円の形の違いを明らかにする.

(7) 考察. 本授業の内容をプリントによって整理し, 理解度を確認する.

3.4 授業の考察

本節では授業後のアンケートを参考に, 先に述べた 3 つの授業のねらいが達成できたか考察を行う.

(1) 「ユークリッド距離と 1-ノルムの違いがわかる.」について.

ユークリッド距離は直線距離であり, 1-ノルムはそうでないことを図を用いて丁寧に説明したので, 生徒は両者の違いを分かっていた. 従ってこのねらいは達成できたと言える.

(2) 「距離の定義を変えることで, 距離によって定義されている図形の形が変化することがわかる.」について.

全ての生徒が, 「ユークリッド距離の円は丸い形をしている. 1-ノルムの円はダイヤの形, ひし形, 正方形を傾けた形」などと正しく答えた. さらに, ユークリッド距離の円と 1-ノルムの円の形は同じか, 異なるかの問いに対して, ほぼすべての生徒が「異なる」と答えたため, このねらいは達成できたと言える.

(3) 「絶対値の計算を習得できる.」について.

本授業では, まず, 1-ノルムによる円が

$$|x| + |y| = 2$$

となることを求め, この式を使って 1-ノルムにおける円を求めた. この計算は, 4 通りに場合分けをする. しかし, 絶対値の定義

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

は理解出来ているものの, 実際に生徒自身が場合分けをして計算することは難

いようであった. そのため, 場合分けの誘導を行い, それに沿って計算を行った. 従ってこのねらいに関して, 生徒は絶対値の計算を習得するところまでは行かなかったが, 演習を積むことはできたと考えられる.

3.5 今後の課題

本授業は一時間という短い時間でユークリッド距離の円と 1-ノルムの円との違いを理解させようとした. そのため, 説明する事項が多く, 計算の時間や生徒自身が考える時間を十分とることができなかった. 従って, 今後は二時間で無理なくまた, 生徒自身が手を動かして計算できるような時間を十分確保した授業を考察したい.

本授業の指導案について, もともとの指導案と改善した指導案を文末に添付する.

4 関連話題

本節では教材化が望まれる 1-ノルムを使う他の考察を述べる.

4.1 2 つの円に接する円の中心の軌跡

ユークリッド距離における楕円・放物線・双曲線はそれぞれ,

(1) 円とその内部にある円の両方に接する円の中心の軌跡.

(2) 円と直線の両方に接する円の中心の軌跡.

(3) 円とその外部にある円の両方に接する円の中心の軌跡.

としても得られる. 従って, 同様のことを 1-ノルムで得られる図形に関しても考えることができる. この考察をすると絶対値や二次曲線の性質をよく考えることになるので, このような性質の教材化も興味深い.

4.2 ベクトルの角度

通常の距離関数の代わりに 1-ノルムを用いて中学校で学習するような平面幾何学を展開することができれば中学生に図形に関して新しい話題を提供することができると考えられる. したがって, 1-ノルムを用いた平面幾何学は非常に面白く, よい教材になりうると思われる. そのためにまず角度を定義する.

角度は平面上の二本のベクトルに関して定義されていると考えるのが自然であるので, 本節では平面上の点をその位置ベクトルと同一視する. ベクトル x の **1-ノルム d_1 による長さ**を

$$|x|_1 = d_1(0, x)$$

と定義する. このとき, $\langle x, y\rangle_1$ を

$$\langle x, y\rangle_1 = \frac{1}{2}\left(|x|_1^2 + |y|_1^2 - |x-y|_1^2\right) \tag{4.1}$$

で定義する. このとき次が成り立つ.

補題 1.

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle_1}{|x|_1|y|_1} \leq 1.$$

証明.

$$\left|\frac{\langle x, y\rangle_1}{|x|_1|y|_1}\right| \leq 1$$

を示せばよい. これは $\langle\ ,\ \rangle_1$ の定義から

$$\left|\frac{|x|_1^2 + |y|_1^2 - |x-y|_1^2}{|x|_1|y|_1}\right| \leq 2$$

と同値である. さらにこれは

$$\left||x|_1^2 + |y|_1^2 - |x-y|_1^2\right| \leq 2|x|_1|y|_1 \tag{4.2}$$

と同値である. 式 (4.2) 左辺の絶対値の中身が正ならば (4.2) は

$$||x|_1 - |y|_1| \leq |x-y|_1$$

と同値であり, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ とすれば, これは

$$\big||x_1| + |x_2| - |y_1| - |y_2|\big| \\ \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

となるので, 左辺を $\big|(|x_1|-|y_1|)+(|x_2|-|y_2|)\big|$ とみて絶対値の三角不等式を使えば示される. したがって (4.2) の右辺の絶対値の中身は負と仮定する. このとき (4.2) は

$$-|x|_1^2 - |y|_1^2 + |x-y|_1^2 \leq 2|x|_1|y|_1$$

となり,

$$-\big(|x|_1 + |y|_1\big)^2 \leq -|x-y|_1^2$$

と変形できるので,

$$|x|_1 + |y|_1 \geq |x - y|_1 \qquad (4.3)$$

を示せばよい. 同様に $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ とすれば, (4.3) は

$$\big||x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|\big| \geq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

となる. 右辺を $|x_1 + (-y_1)| + |x_2 + (-y_2)|$ とみて絶対値の三角不等式を使うと $|x_1 + (-y_1)| + |x_2 + (-y_2)| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$ となるのでこの場合も示された. □

このことから, $\langle\ ,\ \rangle_1$ を内積のように考えて, 以下のように 2 つのベクトル x, y が ($\langle\ ,\ \rangle_1$ **に関して**) **なす角** $\angle_1(x, y)$ を

$$\angle_1(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle_1}{|x|_1|y|_1}\right) \in [0, \pi]$$

で定義する. 通常の角度はこの定義にある 1-ノルムをユークリッド距離に変えたものと一致する. さらに, これを角度の定義式としてユークリッド幾何学を構成することができる (たとえば [4] を参照). この角度はもちろん通常の角度と異なることが予想される. どのように異なるのかを調べるために具体的に通常の角度が 60° である 2 つのベクトルが $\langle\ ,\ \rangle_1$ に関してなす角を調べてみる. 2 つのベクトル x, y を $x = (1, 0)$, $y = (1/2, \sqrt{3}/2)$ とすると,

$$\arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle_1}{|x|_1|y|_1}\right) \fallingdotseq \arccos\frac{1}{2.7232} \\ \fallingdotseq 69^\circ$$

となる. つまり, x, y がなす通常の角度は 60° であるが, $\angle_1$ は約 69° であることが分かる.

同様にして, 2 つのベクトル $x = (1, 0)$, $y = (\cos a, \sin a)$ に, $0 \leq a \leq \pi$ を代入し, それぞれの値を求め, 横軸にユークリッド距離の意味での角度 (通常の角度), 縦軸に $\angle_1$ をとってグラフを書くと図 4.1 の赤線のようになる. 直線は $y = x$ のグラフである.

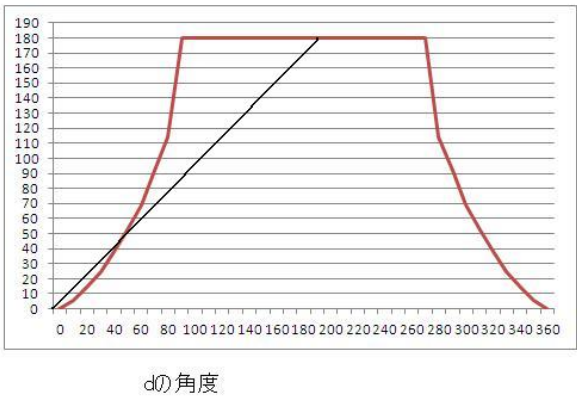


図 4.1: 通常の角度と角度 $\angle_1$

図 4.1 より, 45° を境に, 通常の角度と $\angle_1(x, y)$ との大小関係が変化することが分かる.

この角度は $\langle\ ,\ \rangle_1$ が線形でないので, 通常の角度では持ちえない性質をもつ. また, 角度の定義として式 (4.1) の形を採用しなくても

$$\frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}, \quad \frac{|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2}{2}$$

等, $\langle x, y\rangle_1$ の定義として採用してもよいと思われる式は多くあるが, とりあえずはこの式を定義として考えることにする. 今回定義した角度が持つ通常の角度と異なる性質の例として, 一方のベクトルを正の実数倍したとき, 角

度が変わることが挙げられる. 以下にその例を示す. 2 つのベクトルを $x=(1,0)$, $y=(k,k)$ (ただし $k>0$) とおく. ベクトル y は, $y=x$ 上にある. つまり, 両者のなす通常の角度は 45° である. それぞれの値を $\angle_1(x,y)$ の定義式に代入すると

$$\arccos\left(\frac{1/2(1+4k^2-(|k-1|+k)^2)}{2k}\right) = \arccos\left(\frac{k^2+k-|k-1||k|}{2k}\right)$$

となる. k が変化するとき, この関数は以下のような値をとる.

(1) $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\frac{k^2+k-(k-1)k}{2k}\right) \\ = \ & \arccos 1 \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

(2) $k<1$ のとき

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\frac{k^2+k+(k-1)k}{2k}\right) \\ = \ & \arccos k. \end{aligned}$$

これらの計算により, $\angle_1(x,y)$ のグラフは図 4.2 のように書かれる.

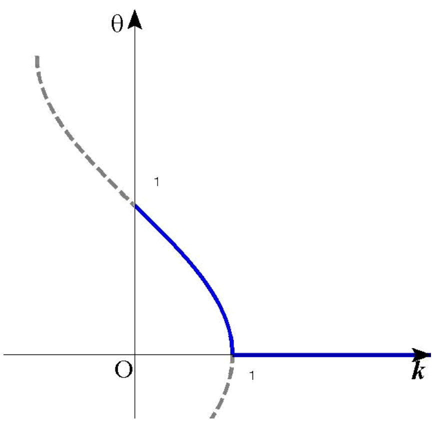


図 4.2: $(1,0)$ と (k,k) の角度 θ

4.3　三角形の内角の和

本小節では 4.2 節で考えた角度に関して初等幾何学を考える. 三角形 OAB の頂点 O の $\langle\,,\,\rangle_1$ **に関する内角**を

$$\angle_1\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$$

で定義する. 本小節では角度はすべてこの定義の角度を扱うため, 単に角度, 内角と書いたらすべて $\langle\,,\,\rangle_1$ に関する角度をあらわすとする.

$\triangle OAB$ について,

$$O=(0,0), A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2)$$

とし, $a_1,a_2,b_1,b_2>0$ または, $a_1,a_2,b_1,b_2<0$ とする. この時, 次の定理が成り立つ.

定理 2. 上記の設定の下,

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2) \geq 0$$

ならば $\triangle OAB$ の内角の和は π である. また,

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2) < 0$$

ならば $\triangle OAB$ の内角の和は π でない.

証明. 各内角を $\alpha = \angle_1\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, $\beta = \angle_1\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)$, $\gamma = \angle_1\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)$ とする.

(1) $(a_1-b_1)(a_2-b_2) \geq 0$ のとき, 計算により

$$\cos\alpha = 1, \cos\beta = 1, \cos\gamma = -1$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = 1$$

よって, $\triangle OAB$ の内角の和は π である.

(2) $(a_1-b_1)(a_2-b_2) < 0$ のとき計算により

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) \neq 1$$

よって, $\triangle OAB$ の内角の和は π でない.

□

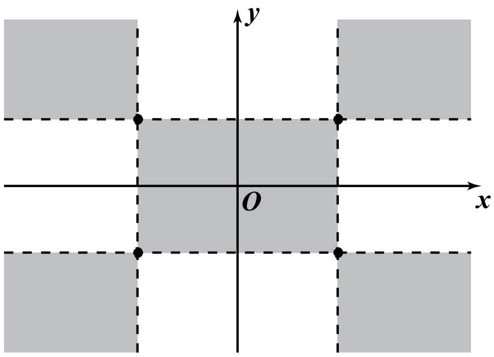


図 4.3: 内角の和が π となる三角形の存在領域. 三角形の 1 つの頂点が原点, もう 1 つの頂点が 4 つの黒丸のどれかにある場合, 最後の頂点が黒丸と同一象限内の影を付した部分にあるならば, その 3 点でできる三角形の内角の和は π となる.

5 中学生対象の授業案

本教材は中学校で習う図形も多く扱っているため, 中学生を対象とした授業にすることも可能である. 本節では中学生対象の授業案を提示する. 授業案は, 中学 1 年生を対象とする全 2 時間の授業である.

5.1 授業のねらい

(1) ユークリッド距離と 1-ノルムが違うことがわかる.

(2) 距離の定義を変えることで, 距離によって定義されている図形の形が変化することがわかる.

5.2 授業の展開

第 1 時

- 本時のねらい
  - 通常の距離と 1-ノルムが違うことがわかる.
  - 2 点間の 1-ノルムを求めることを通して, 1-ノルムの求め方がわかる.
- 本時の展開

(1) 通常の距離の確認. 平面上の 2 点間の距離は, 2 点を結ぶの線分の長さであることを, 実際に平面上の 2 点間の距離を求めて確認する.

(2) 1-ノルムの説明. 碁盤の目上に道が整備されている都市を例に取り, 自然な移動距離をあらわす距離として 1-ノルムの説明を行う.

(3) 1-ノルムの求め方. 平面上の 2 点の 1-ノルムを求めることを通して, 1-ノルムに慣れる.

(4) 考察. 本授業の内容をプリントによって整理し, 理解度を確認する.

第 2 時

- 本時のねらい
  - 1-ノルムにおける円を描くことを通して, 距離における円と 1-ノルムにおける円が違うことがわかる.
- 本時の展開

(1) 平面上の 2 点間の距離と 1-ノルムの復習.

(2) 円の確認. 円の定義の復習をする. 平面上で, ある定点からの距離が一定の点の集まりが円である.

(3) ユークリッド距離による円. 平面上のある定点からの距離が一定の点の集まりが円であることを利用し, ユークリッド距離における円の方程式を求める. 本授業では, ある定点を原点, 距離を 2 として行う.

(4) 1-ノルムによる円. ユークリッド距離による円と同様に, ある定点を原点, 距離を 2 とする 1-ノルムにおける円を求める. 座標平面上に図を描き, ユーク

リッド距離での円の形の違いを明らかにする.

(5)考察. 本授業の内容をプリントによって整理し, 理解度を確認する.

本授業の指導案を文末に添付する.

愛木豊彦氏・平澤美可三氏からの貴重な助言に感謝する. また山田雅博氏からの有益な助言と継続的な励ましに深く感謝する.

参考文献

[1] A. Ando and K. Saji, 2013, *Tropicalization of Euclidean distance function and shapes of elamentary geometric objects*, preprint.

[2] E. F. Krause, 1987, *Taxicab geometry : an adventure in non-Euclidean geometry*, Dover Publ. Inc. New York.

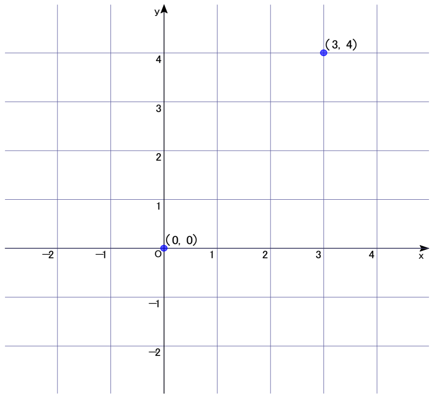
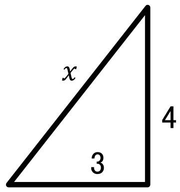
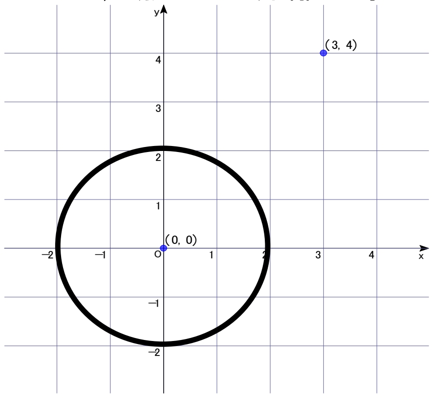
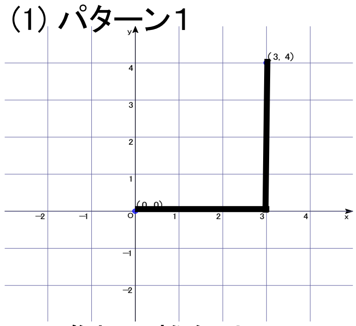
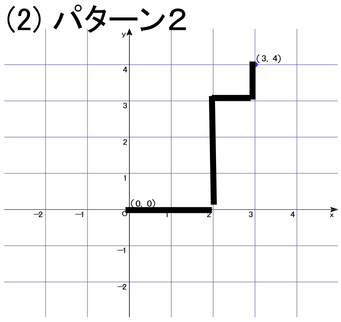
[3] 文部科学省, 2009, 高等学校学習指導要領解説数学編.

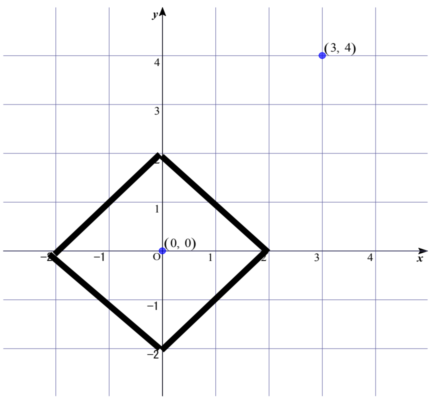
[4] 佐治健太郎, 2011, 変換群の考え方による中学校・高校における平面幾何の構成, 岐阜数学教育研究 **10**, 119–127.

指導案

指導案は以下の順に添付する. 第 3 節で述べた授業案についての指導案 (計 2 ページ), 第 3 節で述べた課題を踏まえ改善した指導案 (計 4 ページ), 第 5 節で述べた授業案についての指導案 (1 ページ).

本時の展開

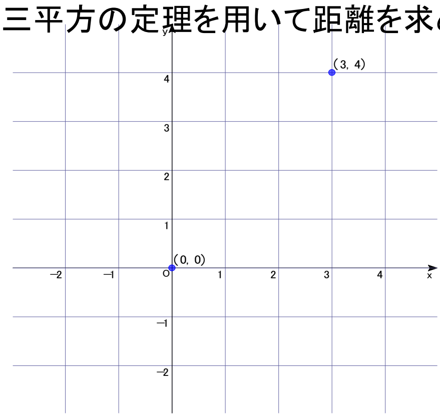
段階	学習活動と予想される生徒の姿	
導入	○2点 (0,0) と (3,4) 間の距離を求める。 三平方の定理を用いて距離を求める。  三平方の定理  $x^2 = 3^2+4^2$ $= 25$ $x = \pm 5$	○平面上の2点間の距離は三平方の定理を用いて求めることが出来ると助言する。 ○平面上の2点間の距離の公式化を行う。
	○円の復習をする。 円とは, 1点からの距離が等しい点の集まりである。  確認のため, 座標平面上に, 1点を (0,0) ととり, その点から距離が 2 である点をたくさん書き, 円になることをみる。	
	○1−ノルムの説明を聞く 座標平面の座標軸を道とする。このとき, (0,0) と (3,4) の間の最短経路を書き込む。 (1) パターン1  (2) パターン2  	○1−ノルムの公式化を行う。 ○平面上の2点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 間の1−ノルムは $\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|$
	○1つ進む距離を1として (0,0) と (3,4) の間の距離を求める。 (1) パターン1 : x 軸を 3, y 軸を 4 進んでいるので, 距離は7となる。 (2) パターン2 : パターン1と同様に距離は7となる。	○絶対値の説明を行う。 $\|a\|=a$ $(a \geqq 0)$, $\|a\|=-a$ $(a<0)$

	○1-ノルムとは, 通った道の距離のことである。 平面上の2点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 間の1-ノルムによる 距離（1-ノルム）は $\|x_1-x_2\| + \|y_1-y_2\|$ ○ (0,0) と (3,4) 間の 1-ノルムを求める。 公式より $\|0-3\|+\|0-4\|$ $=\|-3\|+\|-4\|$ $=7$ 原点からの 1-ノルムが 2 の円はどのようになるだろうか。 ○円上の点を $P=(x, y)$ とし, 式を作成する。 (0,0) と P 間の 1-ノルムが 2 であることから立式する。 $\|x\| + \|y\| = 2$	
	○x と y の絶対値を外すため, 場合分けをして計算をする。 (1) $x>0$, $y>0$ のとき, $x+y=2$, (2) $x<0$, $y>0$ のとき, $-x+y=2$, (3) $x>0$, $y<0$ のとき, $x-y=2$, (4) $x<0$, $y<0$ のとき, $-x-y=2$.	○場合分けをしやすいように, プリントを作成する。
	○座標平面上に (1) から (4) のグラフを書き込み, 円を描く。  ○1-ノルムの円の形はどんな形になったか発表する。 (1) ダイヤの形 (2) ○の形ではない (3) 四角形	○計算のできた生徒からグラフを書き込ませる。
まとめ	○まとめをする。 距離の定義が変わると, 円(距離で定義される図形) の形は変わる。 ○授業アンケートを行う。	○絶対値の計算の復習ができる問題が載っているプリントを作成し, 絶対値の計算が修得できたか確認を行う。

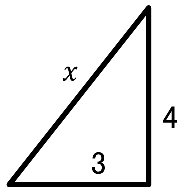
本時の展開

<table>
<tr><th>段階</th><th>学習活動と予想される生徒の姿</th><th></th></tr>
<tr><td>導入</td><td>

○2点 (0,0) と (3,4) 間の距離を求める。
ものさしを使い，距離は 5cm であると認識する。
三平方の定理を用いて距離を求める。



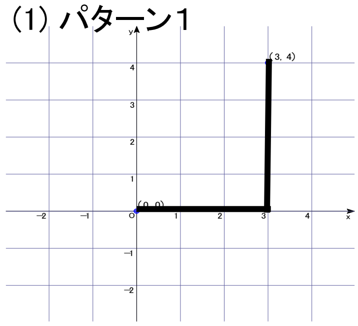
三平方の定理



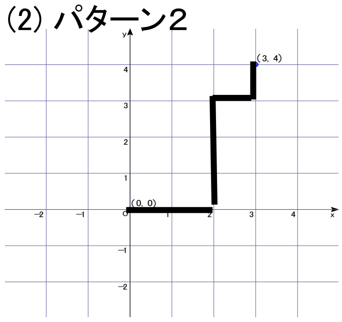
$x^2=3^2+4^2$
$=25$
$x=\pm5$

○1–ノルムの説明を聞く
座標平面の座標軸を道とする。このとき，(0,0) と (3,4) 間の最短経路を書き込む。

(1) パターン1



(2) パターン2



○1つ進む距離を1として (0,0) と (3,4) 間の距離を求める。
(1) パターン1：x 軸を 3，y 軸を 4 進んでいるので，
距離は7となる。
(2) パターン2：パターン1と同様に距離は7となる。

○1–ノルムとは，通った道の距離のことである。

平面上の2点
(x_1, y_1), (x_2, y_2) 間の1–ノルムは
$|x_1-x_2| + |y_1-y_2|$

絶対値は次のように計算する。
$|a| = a \ (a \geqq 0)$,
$|a| = -a \ (a<0)$

○(0,0) と (3,4) 間の 1–ノルムを求める。公式より，
$|0-3|+|0-4|$
$=|-3|+|-4|$
$=7$

$\boxed{\text{絶対値を含む計算の仕方を考えよう。}}$

(1, 1) と (x, 5) 間の 1–ノルムは5である。x の値を求めよ。

</td><td>

○(0,0) と(3,4)の距離が5cmになるようにプリントを作成する。

○平面上の2点間の距離は三平方の定理を用いて求めることが出来ると助言する。

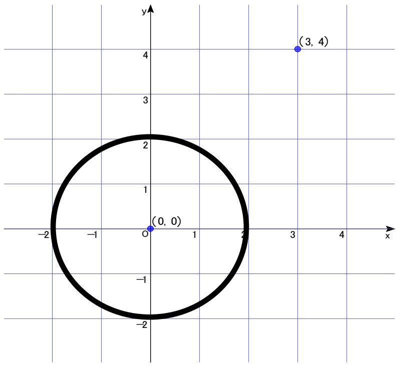
○平面上の2点間の距離の公式化を行う。

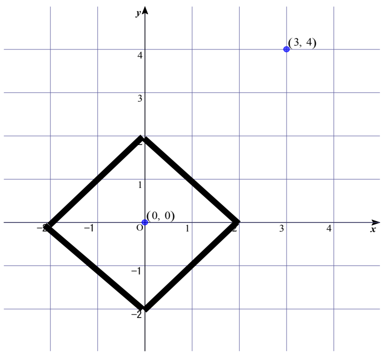
○全部で35パターンある。

</td></tr>
</table>

まとめ	1-ノルムの公式に代入して求める。 $\lvert x-1\rvert+\lvert 5-1\rvert=5$ $\lvert x-1\rvert+4=5$ $\lvert x-1\rvert=1$ 場合分けをして計算する。 (1) $x-1>0$ のとき $x-1=1$ ゆえに $x=2$ (2) $x-1<0$ のとき $-x+1=1$ ゆえに $x=0$ ゆえに $x=0, 2$ ○まとめをする。 絶対値の計算は, 絶対値内の符号に気をつけて, 絶対値を外して計算する。	場合分けについては, 生徒自身で気付き, 行なって欲しいが, 手が止まっている場合は, 助言を行う。

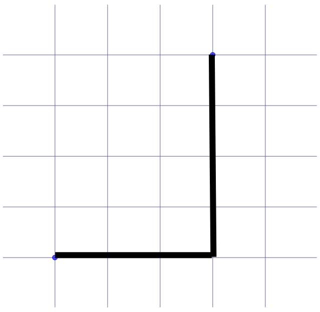
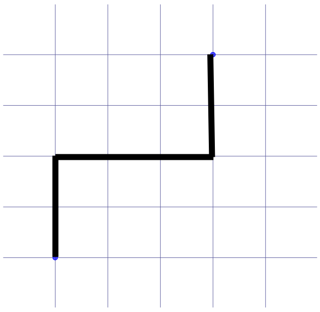
本時の展開

<table>
<tr><th>段階</th><th>学習活動と予想される生徒の姿</th><th>指導の基準</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>
○1−ノルムの復習をする。
(0,0)と (3,4) 間の 1−ノルムを求める。公式より
|0−3|+|0−4|
=|−3|+|−4|
=7
○円の復習をする。
円とは, 1点からの距離が等しい点の集まりである。


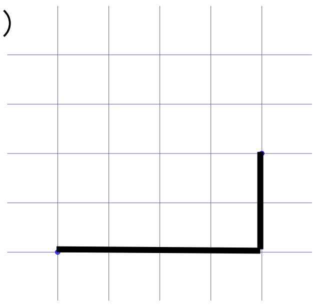
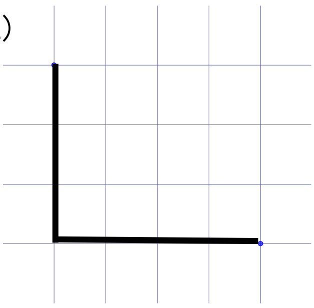
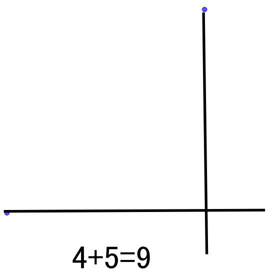
確認のため, 座標平面上に, 1点を (0,0) ととり, その点から距離が 2 である点をたくさん書き, 円になることをみる。
</td><td>
○1−ノルムとは, 通った道の距離のことである。
平面上の2点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 間の1−ノルムによる距離 (1−ノルム) は
$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
</td></tr>
<tr><td>展開</td><td>
原点からの 1−ノルムが 2 の円はどのようになるだろうか。
○円上の点を $P = (x, y)$ とし, 式を作成する。
(0,0) と P 間の 1−ノルムが 2 であることから立式する。
$|x| + |y| = 2$
○x と y の絶対値を外すため, 場合分けをして計算をする。
(1) $x>0$, $y>0$ のとき, $x + y = 2$,
(2) $x<0$, $y>0$ のとき, $-x + y = 2$,
(3) $x>0$, $y<0$ のとき, $x - y = 2$,
(4) $x<0$, $y<0$ のとき, $-x - y = 2$.
○座標平面上に (1) から (4) のグラフを書き込み, 円を描く。


</td><td>
○絶対値の復習もする。
○計算のできた生徒からグラフを書き込ませる。
</td></tr>
<tr><td>まとめ</td><td>
○1−ノルムの円の形はどんな形になったか発表する。
(1) ダイヤの形
(2) ○の形ではない
(3) 四角形
○まとめをする。
距離の定義が変わると, 円(距離で定義される図形) の形は変わる。
○授業アンケートを行う。
</td><td>
○絶対値の計算の復習ができる問題が載っているプリントを作成し, 絶対値の計算が修得できたか確認を行う。
</td></tr>
</table>

本時の展開

<table>
<tr><th>段階</th><th>学習活動と予想される生徒の姿</th><th>指導の基準</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>○2点 A, B 間の距離を求める。
平面上の2点間の距離は，2点を結ぶ線分の長さであることを用いて，A, B を線分で結び，距離は 5cm と求める。</td><td>○A, B の距離が 5cm になるようにプリントを作成する。</td></tr>
<tr><td>展開</td><td>○2点 A, B を碁盤の目の上に置き，AからBへ行く最短経路を記入する。
パターン1

パターン2

○最短経路の距離を測る。
パターン1：7
パターン2：7
○1−ノルムの説明を聞く。
1−ノルムとは，最短経路を通った道の距離のことである。

1−ノルムを簡単に求める方法を考えよう。

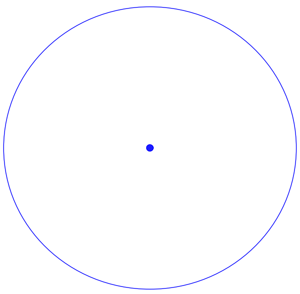
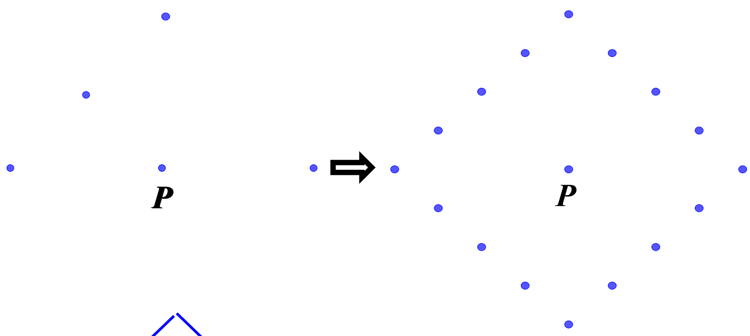
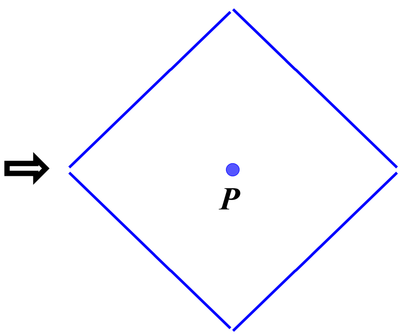
○1−ノルムを求める演習を行い，簡単に求める方法を考える。
(1)

4+2=6
(2)

4+3=7
(3)

4+5=9

パターン２よりパターン１の2つの線分を用いて1−ノルムを求める方が簡単であることに気付き，碁盤目上に2点がなくても同様の求め方で求める。</td><td>○パターンは35通りある。

○どのパターンも最短経路の距離は7になる。

○軸に平行で，交わるように2本の直線を引くことで，2 点間の1−ノルムを求めることが出来ることに導いていく。</td></tr>
<tr><td>まとめ</td><td>○まとめをする。
2点 A, B 間の1−ノルムの求め方
Aを通る直線 m と B を通る直線 n を軸に平行で，交わるように引き，交点を P とする。1−ノルムは AP の距離と BP の距離の和で求めることができる。
○アンケートを行う。</td><td>○2点の位置が異なっても，それらの間の1−ノルムが等しい問題を作成し，生徒に解かせる。</td></tr>
</table>

本時の展開

段階	学習活動と予想される生徒の姿	指導の基準
導入	○2点 A, B 間の距離と1−ノルムを測り，復習する。  A, B 間の距離は 5cm A, B 間の 1−ノルムは 4+3=7cm	○ A, B 間の距離は，最短の長さである。
展開	○円の復習をする。 円とは，1点からの距離が等しい点の集まりである。  確認のため，座標平面上に，1点をとり，距離が 2 である点をたくさん書き，円になることをみる。 1点からの1−ノルムが2の図形(円)はどのようになるだろうか。 ○1点を P とし，P からの1−ノルムが2の点を描いていく。   ○1−ノルムの円の形はどのような形になったか発表する。 (1) ダイヤの形 (2) ○の形ではない (3) 四角形	○ A, B 間の1−ノルムの求め方は，Aを通る直線と B を通る直線を軸に平行で，交わるように引き，その交点とそれぞれの点の距離を足せばよい。 ○手が進まない生徒には，1cm幅で碁盤の目状に線の引かれたプリントを渡す。 ○通常の距離の円と形が変わったということがわかればよい。
まとめ	○まとめをする。 距離の定義がかわると，円の形は変わる。 ○授業アンケートを行う。	