岐阜数学教育研究
2013，Vol. 12，88-101

結び目不変量を用いた高校生向けの数学教材の提案とその実践

田中利史[1]，岩月聖将[2]

空間図形の高校生向けの教材として「結び目不変量」を取り上げる。結び目は空間図形としてとらえると，その投影図を場合の数や漸化式を用いて考察することにより，二つの結び目の空間図形としての違いを調べることが出来る。本論文では，結び目不変量を用いた数学教材の提案及び，岐阜県教育委員会学校支援課主催の高校数学セミナーにおける実践授業について述べる。

＜キーワード＞　結び目，絡み目，空間図形，投影図，彩色数，コンウェイ多項式

1. 序文

結び目の数学は，国内外において研究が盛んに行われている。その主な目的は空間図形として結び目を分類することであるが，そのために場合の数や漸化式が用いられている。本論文では，二つの結び目の空間図形としての違いを考察することを通して，場合の数及び漸化式を教材として用いる授業を提案する。また，本論文で紹介する授業案を用いて，岐阜県教育委員会学校支援課の主催する平成25年度高校数学セミナーにおいて実践授業を行った。

平成21年度に改定された高等学校学習指導要領において，数学Aでは,「具体的な事象の考察に当たって場合の数を数え上げることは大切なことであり，小学校以来，ものの個数や順序を正しく数えることは扱われている」とあり，場合の数が重要視されている。また，数学Bでは「数列を漸化式で表現し，漸化式の意味を理解させる」とあり，数列の一般項を求める際に漸化式は大変重要であるが，その他の応用例についてはあまり取り上げられていない。以上のことより，結び目を空間図形としてとらえ，空間図形の平面への投影図を通して，場合の数及び漸化式を用いて空間図形の性質を知ることをねらいとした授業を開発することにした。

2. 結び目と絡み目

＜定義＞１本のひもの端を自由に動かし，絡めて，最後に端と端をつないだものを**結び目**という（図１）。

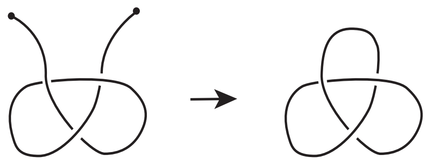


図１

＜定義＞いくつかの結び目の集まりを**絡み目**という。（図２）。

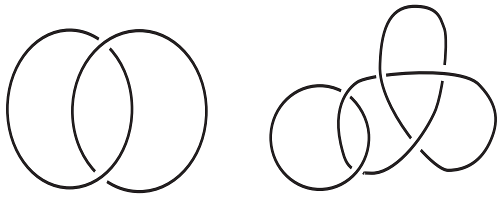
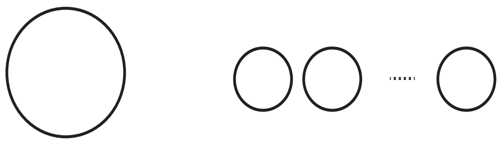


図２

[1]岐阜大学教育学部
[2]岐阜大学大学院教育学研究科

図３ (a) の結び目をほどける結び目といい，図３ (b) の絡み目をほどける絡み目という。



(a)　(b)

図３

結び目がほどけない結び目であることを示すことは容易ではない。結び目を一定時間変形しても自明な結び目にならないから，ほどけないとは言えない。このように「絡み目がほどけるか」ということが，結び目の図形としての性質を考察する上で基本的な問題となる。この場合に用いるのが，不変量という考え方である。絡み目を数式化または数量化し，二つの絡み目に対応するものを比較することで絡み目の違いを調べたり，特にほどけないかどうかを確かめることができる。このような数式または数量が不変量である。本論文では，３彩色数やコンウェイ多項式という不変量を用いて，絡み目の違いを考察する授業を提案する。

3. 結び目の図式

結び目または絡み目の平面への投影図を考える。このとき，辺を少し移動することで，結び目が重なる点は必ず図４ (a) のような二重点のみであるとする。

＜定義＞結び目または絡み目の投影図が自分自身と点で交わっている部分について，図４ (b) のように上下に区別してかいたものを**交点**という。

(a)　(b)

図４

＜定義＞結び目または絡み目の投影図で，影同士が交わっている部分がすべて交点になっているものを，結び目または絡み目の**図式**という。交点のない図式をもつ結び目または絡み目を**ほどける結び目**または**ほどける絡み目**という。

4. 結び目のライデマイスター移動

＜定義＞ ([2]) 結び目の図式において，次の変形（図５）を**ライデマイスター移動**と呼ぶ。

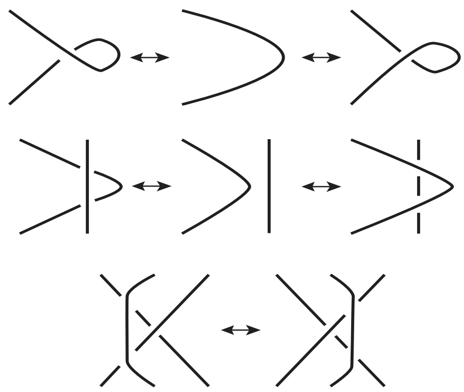


図５

＜定義＞ ([2]) 二つの結び目の図式がライデマイスター移動の有限回の操作で移りあうとき，それらの結び目は**同じ**であるという。

5. 結び目の３彩色数

結び目がほどける，ほどけない，を調べるために重要となる結び目の３彩色数を定義する。
＜定義＞結び目の図式の各曲線に三色のどれかを次のように塗る。
各交点のまわりの塗り方が
・　全て同じ色である。または，
・　すべて違う色である。

結び目の図式に対して，この条件を満たす塗り分け方の場合の数のことを，その図式の**３彩色数**という。

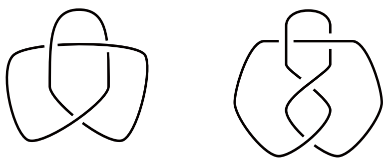
＜定理＞（[1], [3]）３彩色数はライデマイスター移動で変わらない。

この定理により，３彩色数は結び目の不変量であることが分かる。

＜命題＞自明な結び目の３彩色数は3である。

（証明）自明な結び目は交点のない図式を持つ。この図式に色を塗る際は三色のうちのいずれか一つしか使えない。よって，自明な結び目の３彩色数は3である。

＜命題＞（[1], [3]）三葉結び目（図６（a））及び８の字結び目（図６（b））の３彩色数はそれぞれ9と3である。

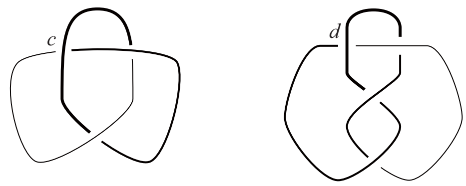


(a) (b)

図６

（証明）図７の交点cについて，一色で彩色する場合，図式すべてが一色となる。よってその場合が三通りある。交点cについて，三色で彩色する場合は，図７ (a) のように図式のすべての色が決まり，かつ各交点で塗り分けの条件を満たしているため，この場合が六通りある。（図において，線の太さの違いにより色の違いを表す。）したがって塗り分け方はあわせて九通りあるため，三葉結び目の３彩色数はそれぞれ9である。

図７の交点dについて，一色で塗る場合，塗り分けの条件を満たすためには，図式全体が一色でなければならない。よって，その場合が三通りある。交点cについて，三色で彩色する場合は，残りの一つの曲線にどのように色を塗っても，図７ (b) のように，必ずいくつかの交点において塗り分けの条件が満たされない。したがって，８の字結び目の３彩色数は3である。



(a) (b)

図７

上の定理と命題より次のことが分かる。

＜系＞三葉結び目はほどけない結び目である。

6. 向きのついた絡み目とコンウェイ多項式

二つの絡み目の違いを調べるために有効である，絡み目のコンウェイ多項式を定義する。そのために絡み目の向きの定義を最初に与える。

＜定義＞絡み目を構成するそれぞれの結び目に沿って，一周する方向を決める。このとき，矢印をつけて向きを表す。これを**向きのついた絡み目**という。（図８）

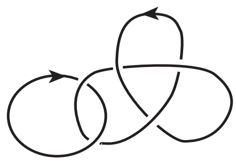


図８

＜定義＞向きのついた絡み目の図式において，ライデマイスター移動（図５）と同様の変形を考える。絡み目の向きから得られる図式の向きについては，次の意味で自然に与えられるとする。

・　変形する部分以外の向きは変化しない。

・　変形する部分の向きについては，それ以外の向きから自然に与えられる。（図９）

これを，**向きのついた絡み目の図式のライデマイスター移動**という。

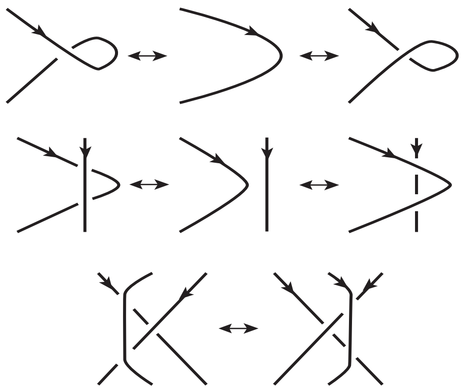


図９

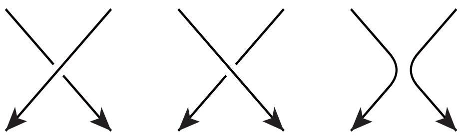
＜定義＞二つの向きのついた絡み目の図式が何回かのライデマイスター移動で移り合うとき，それらの絡み目は**同じ**であるという。

＜定義＞向きのついた絡み目 L に対し，多項式 $a_L(z)$ を，次の三つの性質を用いて定義する。

(1) 向きのついた絡み目 L と L' がライデマイスター移動で移り合うならば $a_L(z) = a_{L'}(z)$

(2) ほどける結び目 O に対して，$a_O(z) = 1$

(3) 三つの絡み目 L，M，N について，それぞれの図式 D_L，D_M，D_N で，ある点の近く以外では全く同じで，その点の近くでは，次のようになっているものがあるとする。



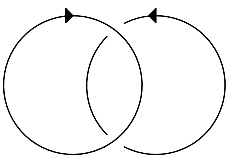
D_L　D_M　D_N

このとき

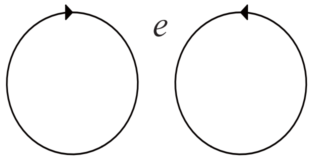
$a_L(z) - a_M(z) = z \cdot a_N(z)$

が成立する。この a_L を向きのついた絡み目 L の**コンウェイ多項式**という。

＜命題＞次の（ほどける）絡み目のコンウェイ多項式は 0 である。



（証明） ライデマイスター移動を用いて次の絡み目の図式に変形する。



この絡み目を O_2 とする。e の近くにおいて定義の漸化式を適用すると，

$a_L(z) - a_M(z) = z \cdot a_N(z)$ かつ，

L と M は，ほどける結び目であるから，

$$1 - 1 = z \cdot a_{O_2}(z)$$

となる。したがって，$a_{O_2}(z) = 0$ である。

＜命題＞正ホップ絡み目（図１０（a））及び負ホップ絡み目（図１０（b））のコンウェイ多項式はそれぞれ z と $-z$ である。

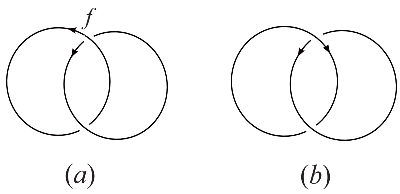
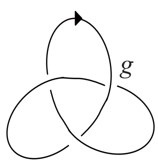


図１０

（証明）正ホップ絡み目の交点 f について，定義の漸化式を適用すると，

$a_L(z) - a_M(z) = z \cdot a_N(z)$ かつ，M は上の O_2 であり，N はほどける結び目であるから，$a_L(z) - 0 = z \cdot 1$ となり，$a_L(z) = z$ となる。負ホップ絡み目についても同様の計算により $-z$ が得られる。

＜命題＞次の向きのついた三葉結び目 K のコンウェイ多項式は $1 + z^2$ である。



（証明） 上の結び目の交点 g について，定義の漸化式を適用すると，
$a_L(z) - a_M(z) = z \cdot a_N(z)$ かつ, M はほどける結び目であり，N は正ホップ絡み目であるから，$a_L(z) - 1 = z \cdot z$ となり，$a_L(z) = 1 + z^2$ となる。

7. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業では，結び目と絡み目を教材として扱う。結び目の数学は研究が盛んに行われている最先端の研究分野であり，数多くの数学の道具やアイデアが用いられているため，教材として多面的に応用が可能である。さらに，日常生活の中であらわれる結び目は，教材として身近に感じられ数学の有用性が生徒に伝わりやすいと考える。さらに，予備知識をあまり必要としないため，導入が容易である。

(2) 授業のねらい

(1) で述べた教材を題材として，授業のねらいを以下の三点とした。

(a) 空間図形の位置関係を投影図を用いて認識できる。

(b) 漸化式を用いて空間図形を多項式で表すことに意欲をもって取り組むことができる。

(c) 場合の数や多項式を用いることで，いろいろな空間図形を区別したりすることが理解できる。

(2) 授業の構成

我々が作成したテキストを用いた授業の構成について説明する。

（一日目）

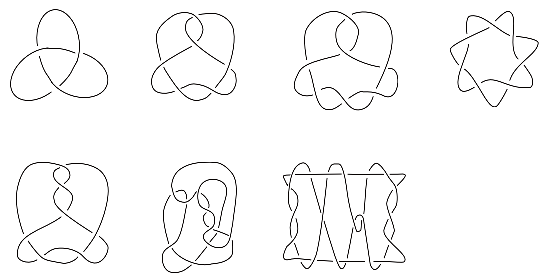
1. (導入)　日常生活の中にある結び目の例を紹介する（靴ひも，御祝儀袋，DNA, ロープなど）。

2. 　結び目の定義を確認する。

定義１

一本のひもの端を自由に動かし，絡めて，最後に端と端をつないだものを結び目という。

3. (展開)　課題を設定し，課題追究に向かう。
   次の図の結び目がほどけるかという問題を提示する。



課題

これらの結び目はほどくことができるか？

4. 道具（針金入りシリコンチューブ[9]）を配って実際に投影図を生徒がかく。

【練習１】

結び目を実際に作って，その投影図をかこう。

5. 交点の定義を確認する。

定義２

結び目の影同士が点で交わっている部分について，上下に区別してかいたものを交点という。

6. 図式の確認をする。

定義３

結び目の投影図で，影同士が交わっている部分がすべて交点になっているもの（練習１でかいたもの）を結び目の図式という。

7. ほどける結び目の定義を確認する。

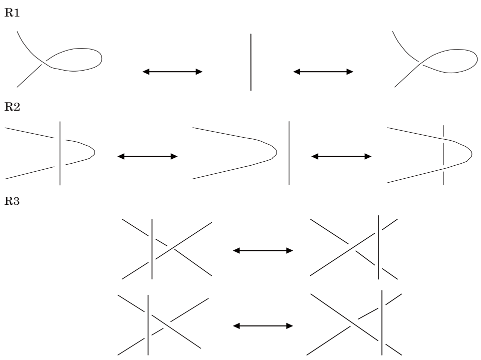
定義４

交点のない図式をもつ結び目をほどける結び目という。

8. ライデマイスター移動の定義を確認する。

定義５

結び目の図式において，次の変形をライデマイスター移動という。



２つの結び目の図式が何回かのライデマイスター移動で移り合うとき，それらの結び目は同じであるという。

9. ほどけない結び目 (自明でない結び目) の定義を確認する。

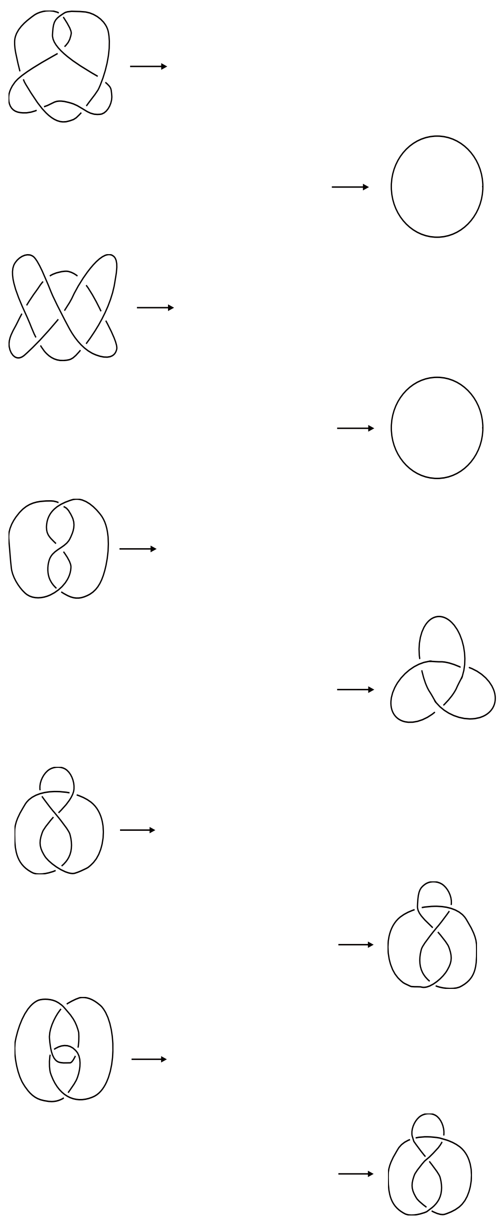
定義６

ほどける結び目でない結び目のことをほどけない結び目という。

10. ライデマイスター移動を使って図式の変形をかく。

【練習２】

次の結び目の図式をライデマイスター移動で移り合わせよう。



11. 不変量について確認する。

定義７

ある物の集まりに対し，同じものに対しては，ただ一つ同じ数量を与えるものをある物の集まりの不変量という。

12. 命題の対偶の説明を行い，演習問題に取り組む。

定義８

命題 p に対して,「p でない」という命題を命題 p の否定といい，$\overline{p}$ とかく。

定義９

命題 $p \Rightarrow q$ に対して，$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を $p \Rightarrow q$ の対偶という。

【練習３】

x, y を実数とする。次の命題の真偽を調べよう。また，その対偶の真偽を調べよう。

(1) $x+y=-3$ ならば，$x<0$ または $y<0$ である。

(2) $x+y=5$ ならば，$x=2$　かつ　$y=3$ である。

定理１

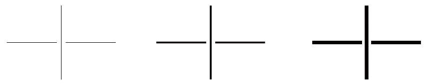
命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。

13. ３彩色数の説明を聞き，実際に３彩色数がどうなるか練習問題に取り組む。

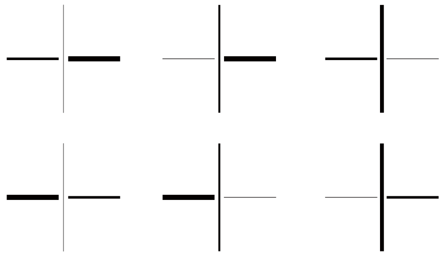
定義１０

結び目の図式の各折れ線に三色のどれかを次のように塗る。
各交点のまわりの塗り方が

（１）全て同じ色である



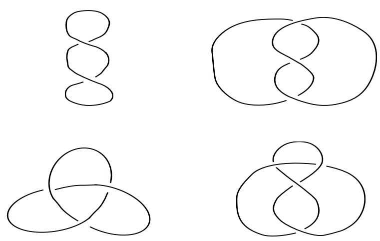
（２）すべて違う色である



結び目の図式に対して，この条件を満たす塗り分け方の場合の数のことをその図式の３彩色数という。

【練習４】

次の結び目の図式の３彩色数を調べよう。



定理２

３彩色数は結び目の不変量である。

14. ライデマイスター移動や３彩色数を使い，課題に取り組む。

まとめ

３彩色数が異なる二つの結び目は同じではない。

（二日目）

15. 前日の復習をする。結び目，ライデマイスター移動，３彩色数の復習を全体でする。

16. 絡み目の例を知る。ホップリンク，チェーン，オリンピックのマークの例を紹介する。

17. 絡み目の定義を確認する。

定義１１

いくつかの結び目の集まりを絡み目という。

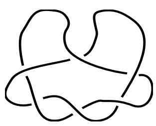
18. ほどける絡み目について確認する。

定義１２

ライデマイスター移動によって，交点のない図式をもつ絡み目にできるとき，その絡み目をほどける絡み目という。

【練習５】

次の絡み目がほどける絡み目か（実際に作って）調べよう。



19. 絡み目の向きについて確認する。

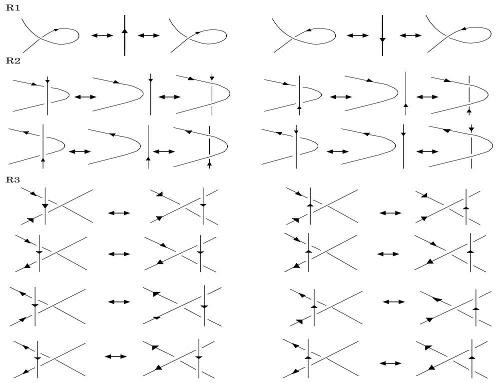
定義１３

絡み目を構成するそれぞれの結び目にそって一周する方向を決める。このとき，矢印をつけて向きを表す。

20. 向きのついた絡み目の図式に対してライデマイスター移動を確認する。

定義１４

向きのついた絡み目の図式において，次の変形をライデマイスター移動という。



２つの向きのついた絡み目の図式が何回かのライデマイスター移動で移り合うとき，それらの絡み目は同じであるという。

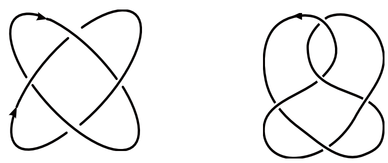
21. コンウェイ多項式について説明する。

（4ページを参照）

22. 与えられた図式から D_L，D_M，D_N を求める図式の練習をする。

【練習６】

与えられた図式から D_L, D_M, D_N をかこう。



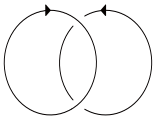
定理３

コンウェイ多項式は結び目の不変量である。

23. 各自がコンウェイ多項式を計算する。ホップリンクとほどける絡み目のコンウェイ多項式がどうなるか調べる。

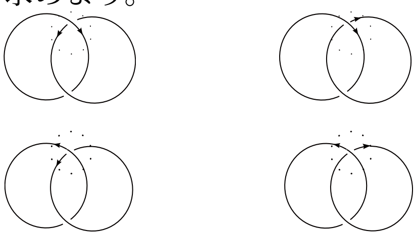
【練習７】

　この絡み目のコンウェイ多項式を求めよう。



【練習８】

　この絡み目のコンウェイ多項式を求めよう。



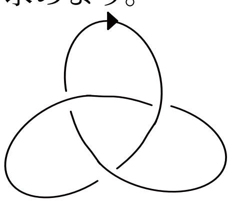
まとめ

　コンウェイ多項式を用いるとホップリンクとほどける絡み目の違いがわかる。

24. コンウェイ多項式に関する練習問題を取り組む。

【練習９】

　この絡み目のコンウェイ多項式を求めよう。



25. 課題を解くために課題の結び目のコンウェイ多項式を計算する。

まとめ

　コンウェイ多項式を計算することで結び目の違いがわかる。

まとめ

　結び目や絡み目のような自由に変形することのできる空間図形であっても，場合の数や漸化式を用いて調べることで，その違いを明らかにすることができる。

　教師の指導・援助

（一日目）

・自己紹介。

・結び目を配布し,（スライドを用いて）結び目の例を紹介する。

・結び目の定義をした後，実際に授業者が実演する。

・ほどける結び目を口頭で説明する。

・与えられた結び目が，ほどける結び目と区別できるか考えさせる。

・全体で投影図をかくときに，二重点などのかき方について指導する。

・図式の変形ということを理解させる。

・スライドを用いて動画などで，図式の変形を示す。

・不変量について身近な具体例（身長，誕生日）などで説明する。

・高校数学の論理（命題，逆，裏，対偶など）の復習をする。

・課題の結び目がほどける結び目と同じであるかという設定に対し，３彩色数がほどける結び目のものと同じだからといって，結び目がほどけるとは限らないことを理解させる。

（二日目）

・結び目，ライデマイスター移動，３彩色数の復習を全体でする。

・絡み目の例として，ホップリンク，チェーン，オリンピックのマークを紹介する。

・ほどけない絡み目の例を挙げる。

・結び目については，向きは二種類，二つの結び目からなる絡み目については，向きは四種類あることを確認する。

・ほどける結び目≠ほどける絡み目をおさえ

る。
・D_L，D_M，D_N についてどの図式が簡単であるか確認させる。
・向きを変えたもの，定義の漸化式の適用場所を変えたものなどのコンウェイ多項式を計算させる。
・結び目のコンウェイ多項式は向きによらないことや漸化式の適用場所によらないことを全体で確認する。
（本授業では実際に空間図形を針金入りシリコンチューブを用いて，結び目や絡み目を各自が作成する作業をいくつか取り入れている。このような活動を体験することで，生徒の授業内容への関心が高まると考える。）

8. 実践結果

以下のとおりに実践を行った。
授業名：結び目の数学〜どれがほどける？どれがからんでる？〜
場所：岐阜大学教育学部
日時：平成 25 年 8 月 10 日，11 日
対象：岐阜県内の中学 2,3 年生，高校 1,2 年生 (41 名)
指導補助：岐阜大学教育学部数学教育講座大学院生・学部生（15 名）
(1) 授業の流れ（教師の指導・援助）

以下のような流れで授業を行った。

- 一日目午前
  1) 教材を使って実演を交えながら結び目の説明をする。（図１１）

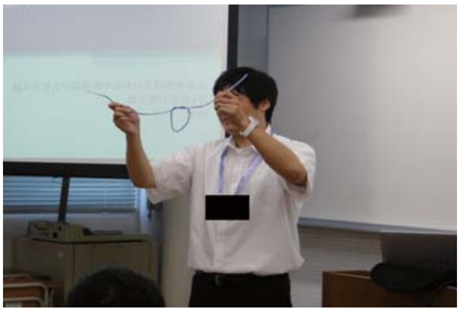


図１１

2) 結び目を定義し，問題の提示をする。
3) 生徒が道具を使って投影図をかく。
針金入りシリコンチューブを用いて作成した結び目を，各自に一つずつ配布し，その投影図をテキストに描く。（図１２，図１３）

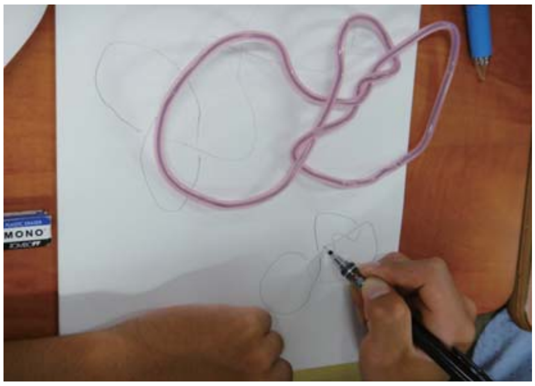


図１２

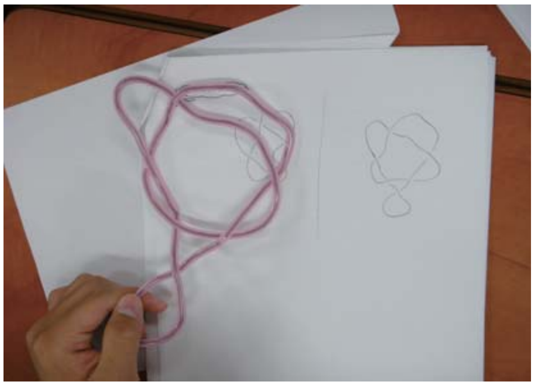


図１３

その後，結び目の図式，交点の説明をする。さらに，ほどける結び目を説明する。
4) ライデマイスター移動による結び目の変形を生徒が描く。
はじめにライデマイスター移動の定義をする。その後，テキストにしたがって結び目が同じであるといことを問題演習しながら理解する。（図１４，図１５）

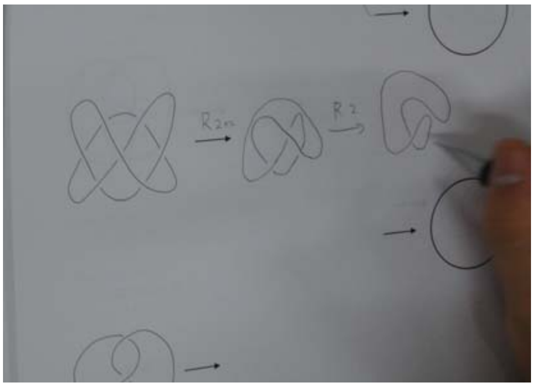


図１４

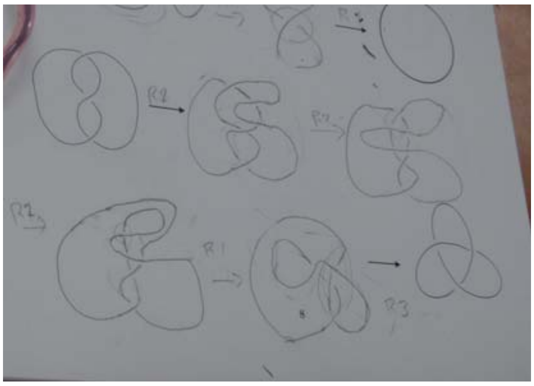


図１５

前半の二つの結び目について全体で確認する。

- 一日目午後
  5)（午前中に続いて）結び目の図式の，ライデマイスター移動による変形を生徒が描く。
  6) 不変量を説明する。
  その後，高校で既習事項の論理と命題の一部を説明する。
  7) ３彩色数を定義し, それによって結び目がほどけるか，区別できるかを調べる。
  ほどける結び目 $\Longrightarrow$ ３彩色数 $=3$ がわかるのでこの対偶を確認し，課題問題を考察していく。（図１６，図１７）

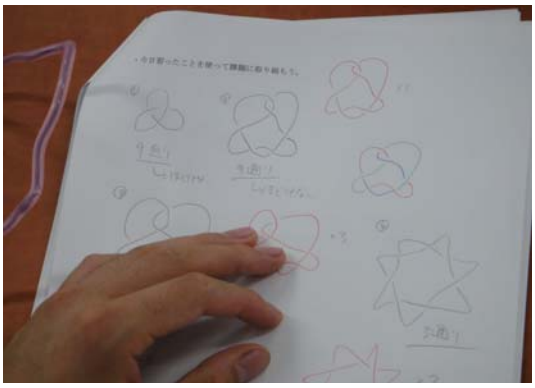


図１６

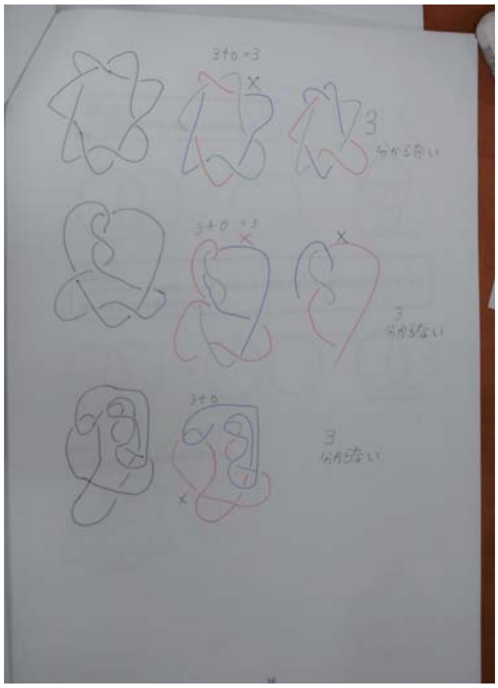


図１７

- 二日目午前
  8) 絡み目，絡み目の向きを説明する。
  向きについて説明した後，向きのついたライデマイスター移動を説明する。さらに，向きを含めて絡み目が同じであることを説明する。
  9) コンウェイ多項式の定義をする。
  コンウェイ多項式を定義した後で，与えられた絡み目から，問題演習で定義の関係式に必要な図式をかく。（図１８）

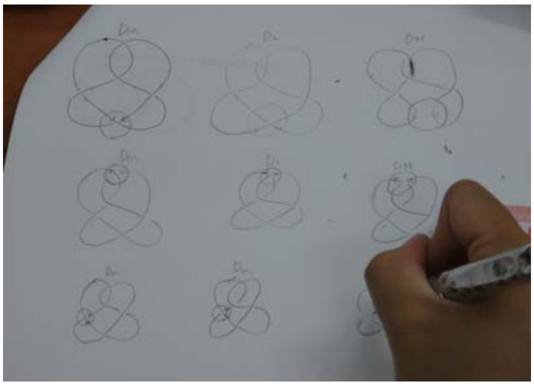


図１８

実際に，結び目を多項式で表せられるか問題演習で確認する。（図１９）

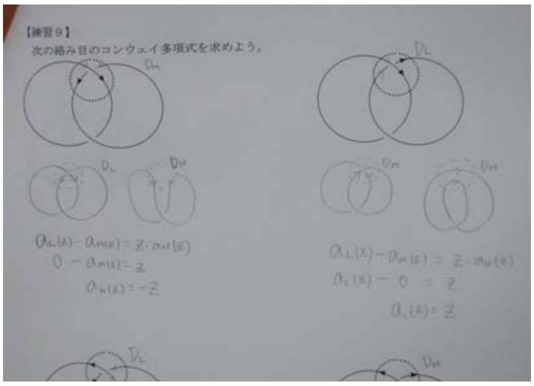


図１９

- 二日目午後

10) 8)〜9) をもとに，課題問題に取り組む。（図２０）

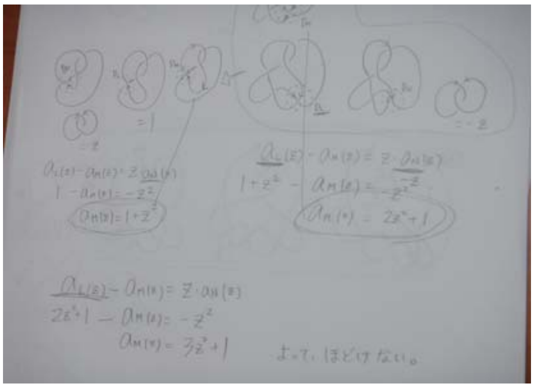


図２０

(2) 実践結果とその考察

授業後にアンケートを実施した。その回答をもとに，本授業のねらいの達成度の考察を行う。

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

結び目を平面図形として考えることができましたか

できた ………………… 22 人
ややできた ………… 14 人
どちらともいえない ‥ 2 人
あまりできなかった ‥ 0 人
できなかった ………. 0 人

３彩色数または多項式を使うことで，結び目がほどけないかを調べられることが分かりましたか

わかった ………………… 21 人
ややわかった ………… 12 人
どちらともいえない …… 5 人
あまりわからなかった ‥ 0 人
わからなかった ………. 0 人

結び目を多項式で表せることが分かりましたか

わかった ………………… 21 人
ややわかった ………… 14 人
どちらともいえない …… 3 人
あまりわからなかった ‥ 0 人
わからなかった ………. 0 人

現代数学である結び目理論に興味が持てましたか

そう思う ………………… 12 人
ややそう思う ………… 20 人
どちらともいえない …… 6 人
あまりそう思わない ……. 0 人
そう思わない ……………. 0 人

結び目理論だけでなく，他の現代数学のことをもっとよく知りたいですか

そう思う ………………… 16 人
ややそう思う ………… 18 人
どちらともいえない …… 4 人
あまりそう思わない ……. 0 人

そう思わない ・・・・・・・・・・・・・・ 0 人
以下に生徒の感想を紹介する。
・結び目を数式で表す作業は難しく思えたけど面白かった。
・順番にいろいろな方法で結び目をほどけるかどうかを確かめて，ためになった。
・結び目について学んで，結び目を多項式で表したりとても面白かったです。
・数学の楽しさに気付けた。
・結び目のことがよく分かった。式を使って解く方法を知ってすごいと思った。
・今回のセミナーで数学について改めて興味が湧きました。
・図形を3彩色数や多項式を使うことで結び目がほどけるかを調べられるのは，すごいなぁと思いました。とても興味深かったです。
・結び目を数や多項式に変換してできるのが楽しかった。
・数学を身近に感じることができ，想像しにくい部分も物を使って考えることができてよかった。

本授業のねらい (1)，(2)，(3) について考察する。
(1) 空間図形の位置関係を投影図を用いて認識できる。
結び目を平面図形として考えることができましたか?というアンケートに対して，38 人中 36 人ができた，ややできたと回答していたり，生徒が投影図をかく活動の中で，投影図をかけている生徒が多かったことから，このねらいは達成できたと考える。
(2) 漸化式を用いて空間図形を多項式で表すことに意欲をもって取り組むことができる。
「結び目について結び目を多項式で表したり面白かったです。」,「結び目を数や多項式に変換してできるのが楽しかったです。」などのアンケートの感想が得られたことから，このねらいは達成できたと考える。
(3) 場合の数や多項式を用いることで，いろいろな空間図形を区別したりすることが理解できる。
3 彩色数または多項式を使うことで，結び目がほどけないかを調べられることが分かりましたか?というアンケートに対して，38 人中 33 人が分かった，やや分かったと回答していたり,「図形を３彩色数や多項式を使うことで結び目がほどけるかを調べられるのはすごいなぁと思った。」などのアンケートの感想から，このねらいは達成できたと考える。

9. これまでの実践例

結び目の数学を教材とした教育研究プロジェクトが，2005 年より 5 年間，大阪で行われている。(参考文献 [4], [5], [6]) 参考文献 [5], [6] において，３彩色可能性や多項式不変量を用いた高等学校での実践例がある。また，参考文献 [7], [9] においては，高等専門学校生を対象とした p 彩色可能性に関する実践授業を行っている。[8] では，絡み目の絡み具合を表す不変量である，絡み数を用いた授業の提案を行っている。[10] においては，行列に関する結び目の不変量を教材とした，実践授業を行っている。本研究の特色としては，二日間かけて３彩色数とあわせて，高校生向けの教材として用いられることが少ないコンウェイ多項式を実践授業において用いたところであるといえる。

10. 今後の課題

実践を終えて，本教材の見直しが課題となった。まずは，課題問題の結び目を交点数が少ない結び目のみに変更することである。今回の実践ではコンウェイ多項式を用いたが，課題問題において，交点数が多い結び目のコンウェイ多項式まで求めることができない生徒が多く見られた。そこで，交点数が少ない結び目に焦点を絞り，ほとんどの生徒が課題問題のコンウェイ多項式まで，求めることができるようにしたい。

次に，生徒の個人追究の時間があまり多くとれなかったことが挙げられる。その原因としては，定義で使われている用語や記号が高校生にとり馴染みがなく，説明するのに時間がかかってしまったことが考えられる。そこで，定義で用いた記号などを高校生にとってわかりやすいものに変更し，生徒が個人追究できる時間をより多くとれるようにしたいと考える。

11. 謝辞

実践授業にあたり，岐阜県教育委員会をはじめ，指導補助の大学生及び大学院生を含めて，多大なご協力をいただいた関係者の皆様に心より感謝する。

12. 参考文献

[1] 村上斉，1990 年，結び目のはなし，遊星社.
[2] 鈴木晋一，1991 年，結び目理論入門，サイエンス社.
[3] 村上順，2000 年，結び目と量子群 (すうがくの風景)，朝倉書店.
[4] 河内明夫・柳本朋子編，2005 年,「結び目の数学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー，21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動研究報告書　第 1 号.
[5] 河内明夫・柳本朋子編，2007 年,「結び目の数学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー，21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動研究報告書　第 2 号.
[6] 河内明夫・柳本朋子編，2009 年,「結び目の数学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー，21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動研究報告書　第 3 号.
[7] 宮地俊彦，中坊滋一，酒井道宏,「久留米高専における中学生向け数学公開講座の取り組みと今後の課題」，久留米工業高等専門学校紀要第 25 巻第 2 号，19-24，2010 年 4 月.
[8] 田中利史,「絡み目を教材とした授業の提案」，岐阜数学教育研究 (2011)，vol. 10，113-118.
[9] 酒井道宏，田中利史，中坊滋一,「結び目を用いた中学生向け数学教材の実践」，岐阜数学教育研究 (2012)，vol. 11，76-83.
[10] 酒井道宏，田中利史，中坊滋一 ,「結び目を用いた高専の学生向け数学教材の実践～ゲーリッツ不変量を通して～」，久留米工業高等専門学校紀要第 28 巻第 2 号，24-31，2013 年 4 月.