岐阜数学教育研究
2012， Vol. 11， 113-142

合わせ鏡を題材とした教材の開発

中牧卓也[1]，愛木豊彦[2]

本稿では，合わせ鏡とそれを応用した身近な事象である万華鏡を用いた小学生用の授業を提案する。その授業では，2 枚の鏡を向かい合わせた合わせ鏡について色々な性質を見つけ，そしてそれを活用して，万華鏡の中の模様がどのように見えるのかについて考察する。この授業のねらいは，既習の内容を活用して，新たなことを学ぶ数学の楽しさを実感することである。授業内容を示した後，実践の結果を報告する。

〈キーワード〉線対称，合わせ鏡，万華鏡，光の反射，正多角形，規則性の発見

1. はじめに

昨年度から実施されている小学校学習指導要領算数科[1]において，次のように算数科の目標を定めている。「算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理の良さに気づき，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。」さらに，算数的活動については「具体物を用いて数量や図形についての意味を理解する活動，知識・技能を実際の場面で活用する活動，問題解決の方法を考え説明する活動を具体的に示し」とある。これらを踏まえて，児童にとって身近な鏡と，鏡を合わせて作られたおもちゃである万華鏡を題材とし，具体物を操作しながら規則性を見つけたり，既習の内容を活用して新たな学びを獲得する活動を通して，数学的な表現力を高め，問題解決の方法を身につけられるような教材を開発した。

2．授業の概要

2.1 題材について

合わせ鏡とは，鏡を何枚も合わせたものである。今回の題材では下の図のように鏡を 2 枚合わせたものについて考える。

合わせ鏡

この合わせ鏡は，鏡のなす角を調節することによって，映し出す対象物の見え方が変わる。ここで，下の図 1 のように 2 枚の鏡にはさまれた角を，鏡のなす角と呼ぶことにする。

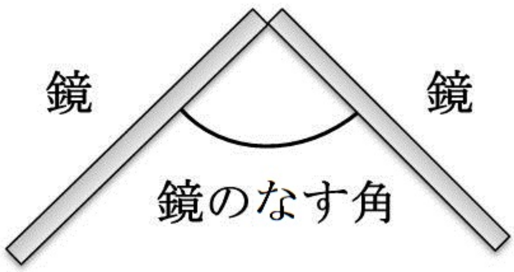


図 1

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]日本女子大学理学部

合わせ鏡と，下の図 2 を用いて，次のことを観察する。

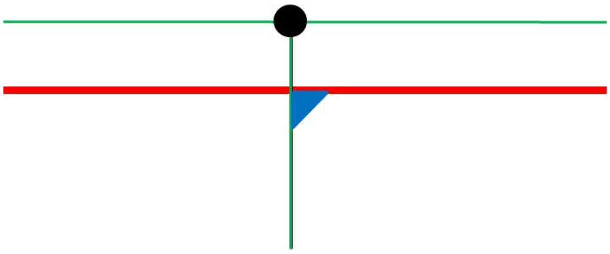
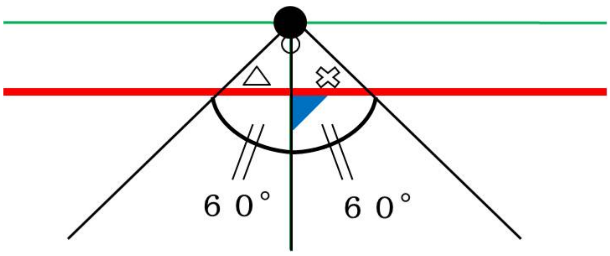


図 2

1. 真ん中にある縦向きの直線の両側に，大きさの等しい角を描く。
2. 1 で描いた直線と太い直線で囲まれた三角形の内部に，好きな形や模様を描く。
3. 1 で描いた 2 直線上に，鏡を 1 枚ずつ置き，鏡に映る太い直線で囲まれた図形を観察する。



例　鏡のなす角が 120 °のとき

実際に観察した様子が下の図 3，4，5，6 である。鏡のなす角は図 3 では 120 °，図 4 では 90 °，図 5 では 80 °，図 6 では 100 °である。

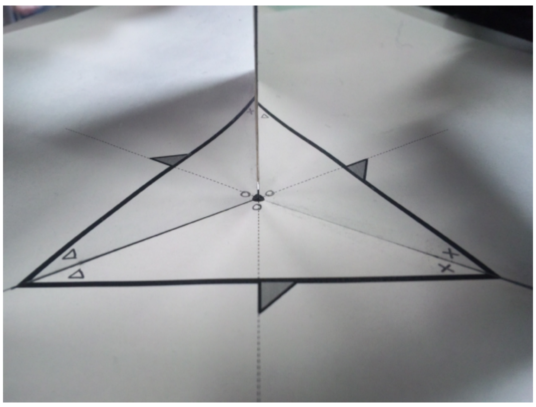


図 3

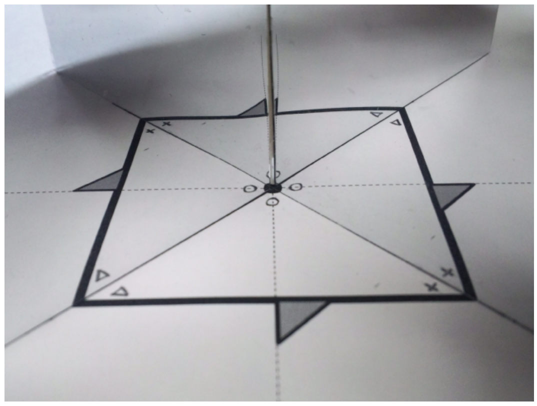


図 4

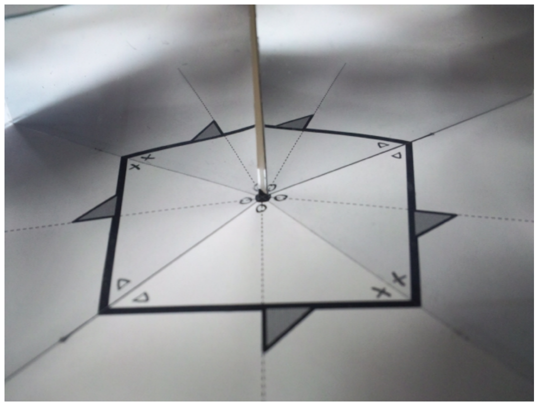


図 5

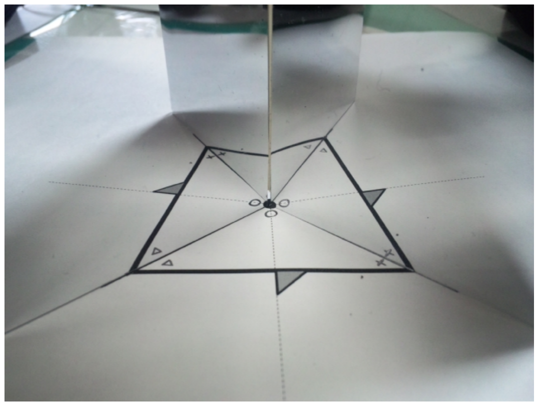


図 6

これらの写真では，太い直線で囲まれた図形は，次のように見える。

- 120 °のとき，正三角形
- 90 °のとき，正方形
- 80 °のとき，凸五角形
- 100 °のとき，凹五角形

このように，鏡のなす角を変えることによって見える図形が変わる。

どのような角度のときにどんな図形に見えるのかを述べる前に，図 3～図 6 のような図形に見える理由を説明する。次の図 7 は，鏡のなす角が 90° のときに見える図形を，模様も合わせて描いたものである。

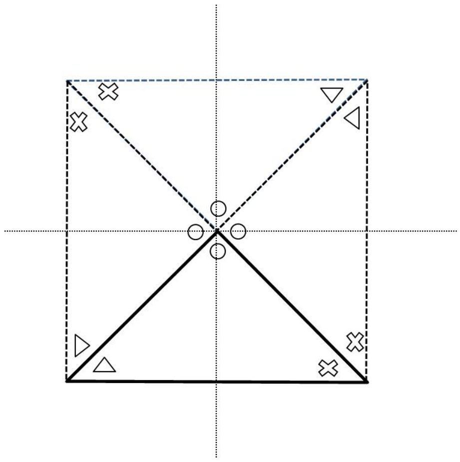


図 7

このとき，点線で描かれているところは，実際には存在しないが，鏡に映り，存在するように見える像である。これを見かけの像と呼ぶ。人間は，あるものが鏡に反射して見えた場合，そのものが，本物の位置と鏡に関して，対称な位置にあるものと錯覚してしまう。(図 8) これが見かけの像が見える根拠である。

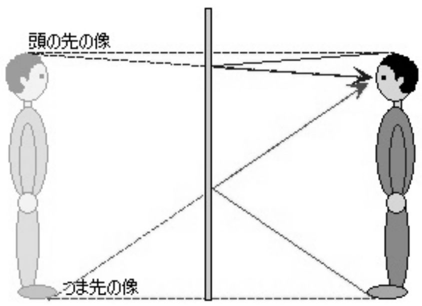


図 8

以下，なぜ図 7 のように見えるのかを説明する。まず，図 9 のように各点を記号で表す。

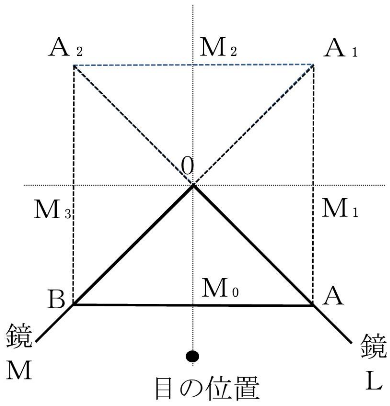


図 9

線分 AM_1 は，線分 AM_0 が鏡 L に 1 回映ったもの (図 10)，線分 A_1M_1 は，線分 BM_0 が鏡 L に 1 回映ったものである。(図 11)

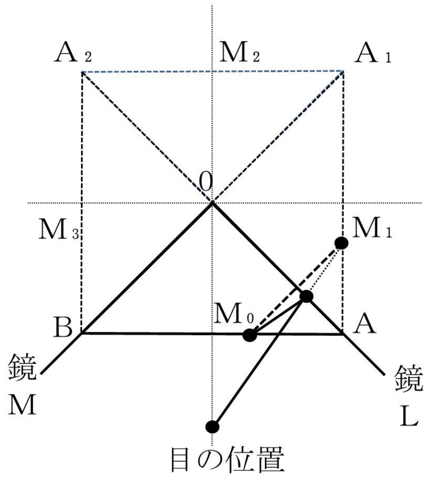


図 10

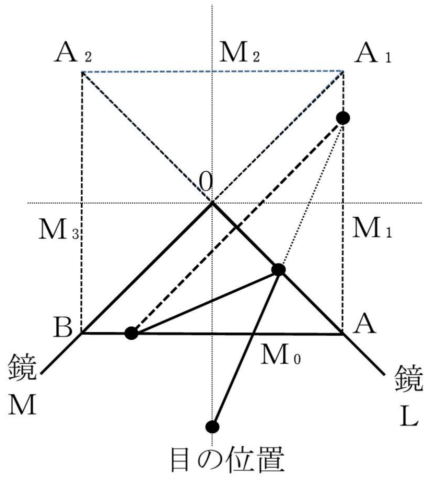


図 11

線分 A_1M_2 は，図 12 のように線分 BM を，順に鏡 M，鏡 L に映したものである。

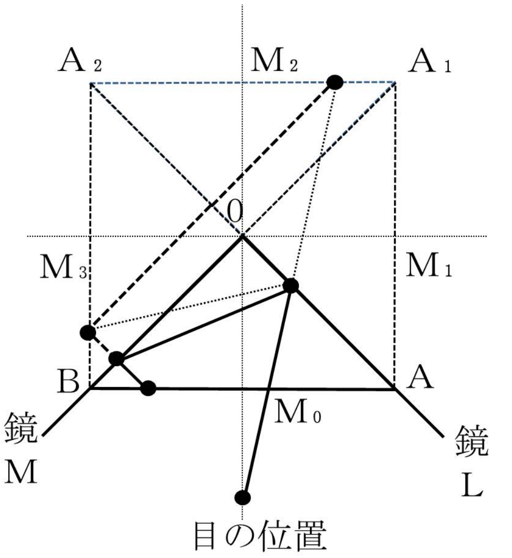


図 12

次に，なぜ図 5 のように見えるのかを説明する。まず，図 13 のように各点を記号で表す。

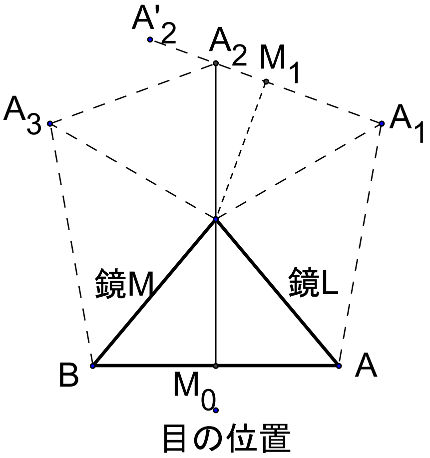


図 13

ただし，M_0 は AB の中点であり，M_1 は $A_1M_1 = AM_0$，A'_2 は $A_1A'_2 = AB$ となるように直線 A_1A_2 上にとった点である。

ここで，$\angle COM_0 = 20°$ となるように，点 C を AM_0 上にとる。線分 CM_0 上の点 P_2 を直線 M' に関して対称移動した点 P_1 を，さらに直線 L に関して対称移動させ，その点を Y とする。(図 14)

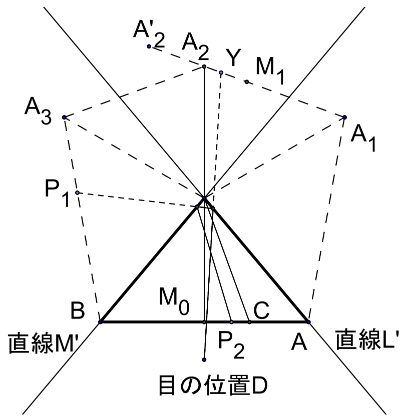


図 14

このとき，図 14 からわかるように，線分 A_2M_1 は，線分 CM_0 を鏡 M，鏡 L の順に映したものである。

また，それは目の位置から見ると，点 Y にあるように見える。さらに，図 15 のように，この点 Y を，直線 L_1 に関して対称移動させ，その点を P'_1 とする。さらに直線 L に関して点 P'_1 を対称移動させ，その点を P'_2 とすると，点 P_2 と点 P'_2 は一致する。

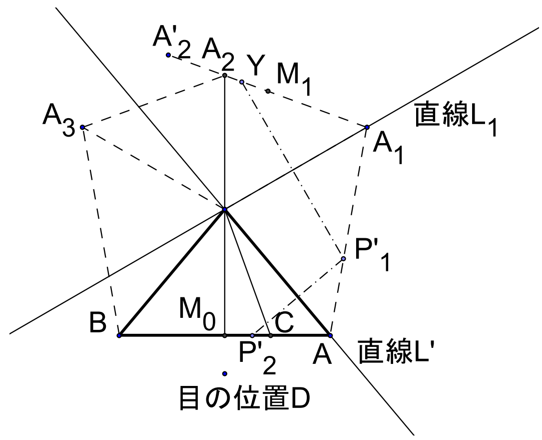


図 15

次に，線分 $A_2A'_2$ 上の点について説明する。線分 $A_2A'_2$ 上の点を Y' とする。(図 16) このとき，DY' と半直線 OB は交点をもつ。よって，Y を直線 M' に関して対称移動させ，その点を P_1 とし，P_1 を直線 L' に関して対称移動した点を P_2 とする。また Y' を直線 L_1 に関して対称移動させた点を P'_1，点 P'_1 を直線 L' に関して対称移動した点を P'_2 とする。

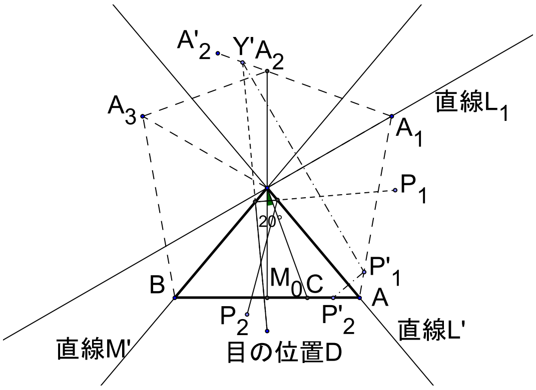


図 16

このとき，図 16 からわかるように点 P_2 と点 P'_2 は一致していない。また，図 5 からも，この Y' に該当する点は見えないことがわかる。

以上の観察から,「見かけの位置にある」ことを以下の定義 1 のように定義する。これを,直交座標 xy 平面上で表現するために，改めて次のように記号を準備する。(図 17)

- 鏡 L と鏡Mをそれぞれ原点Oを始点とする半直線 L，Mで表す。
- 半直線 L 上の点を L_1，半直線M上の点を M_1 とし，$\angle\theta = \angle L_1OM_1$ とおく。また，L' と M' をそれぞれ半直線 L，M を含む直線とする。
- $\angle L_1OM_1$ の内部に反射させる対象 X をおき，目の位置を点 $A(a, 0)(a > 0)$ とする。また，図にある太い線分を CD で表す。
- x 軸が $\angle L_1OM_1$ の二等分線となるようにする。
- 点 $P(x, y)$ の極座標を $[r,\theta]$ という表記で表す。つまり，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ である。
- $\tau = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，L^*_τ で，原点を通り，x 軸となす角が $\dfrac{\theta}{2} + \tau\theta$ となる直線を表す。また，$L_{*\tau}$ で原点を通り，x 軸となす角が $-\dfrac{\theta}{2} - \tau\theta$ となる直線を表す。

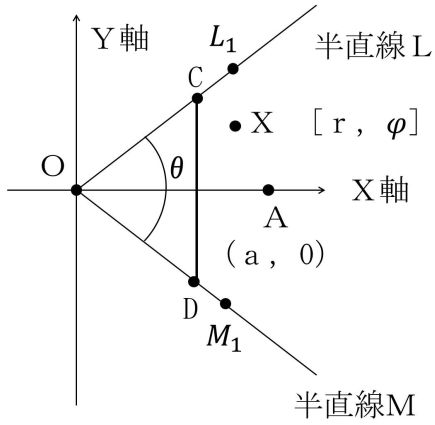


図 17

これらの記号を用いて,「見かけの位置にある」ということを次のように定義する。

定義 1

$\angle L_1OM_1$ の外部にある点 $Y[r,\sigma]$ が，次の (i)(ii) を満たすとき，点 Y は点 X の見かけの位置にあるという。ただし，$0 < \sigma < \pi$, $\pi < \sigma < 2\pi$ とする。

(i)X を直線 L' に関して対称移動した点を X_1，点 X_1 を直線 L^*_1 に関して対称移動した点を X_2 とする。以下，$k = 2, 3, \cdots$ に対し，X_k を直線 L^*_k に関して対称移動した点を X_{k+1} とする。

また，X を直線 M' に関して対称移動した点を X'_1，点 X'_1 を直線 L_{*1} に関して対称移動した点を X'_2 とする。以下，$k = 2, 3, \cdots$ に対し，X'_k を直線 L_{*k} に関して対称移動した点を X'_{k+1} とする。

このとき，ある k に対し，

$$Y{=}X_k \text{ または } Y{=}X'_k$$

(ii) 線分 AY は半直線 L，または半直線 M のいずれか一方のみと交点をもつ。半直線 L と交点をもつ場合，P_1 を Y と直線 L' に関して対称な点，P_2 を P_1 と直線 M' に関して対称な点とする。以下，$k \geq 2$ に対し，

- k が偶数のとき，P_{k+1} を P_k と直線 L' に関して対称な点,

- k が奇数のとき，P_{k+1} を P_k と直線M’ に関して対称な点

とする。

また，半直線Mと交点をもつ場合，P_1 をYと直線M’ に関して対称な点，P_2 を P_1 と直線L’ に関して対称な点とする。以下，$k=2,3$，⋯ に対し，

- k が偶数のとき，P_{k+1} を P_k と直線M’ に関して対称な点,
- k が奇数のとき，P_{k+1} を P_k と直線L’ に関して対称な点

とする。

このとき，(i) と同じ k に対し，P_k= X

この定義を用いて，次の定理を証明する。

定理 1　鏡のなす角を θ とすると，合わせ鏡に映された太い直線で囲まれた図形，つまり，線分CDとその見かけの位置にある図形でつくられる図形は，次の通りである。

(1)$\dfrac{2\pi}{2n}<\theta<\dfrac{2\pi}{2n-1}$ のとき，凹 $2n+1$ 角形

(2)$\theta=\dfrac{2\pi}{2n}$ のとき，正 $2n$ 角形

(3)$\dfrac{2\pi}{2n+1}<\theta<\dfrac{2\pi}{2n}$ のとき，凸 $2n+1$ 角形

(4)$\theta=\dfrac{2\pi}{2n+1}$ のとき，正 $2n+1$ 角形

ここで n は，$\dfrac{\theta}{2}+n\theta\geq\pi$ を満たす，最小の自然数である。

定理1は次の定理2をもとに証明することができる。

定理 2　Xの極座標を $[r,\varphi](0<\varphi<\dfrac{\theta}{2})$ とする。n を $\dfrac{\theta}{2}+n\theta\geq\pi$ を満たす，最小の自然数とする。そして，$\tau=1,2,$ ⋯ に対し，定義1(i) にあるように X_τ を定める。このとき，次の (1)，(2)，(3) が成り立つ。

(1) $\tau=1,2,\cdots,n-1$ のとき，X_τ はXの見かけの位置にある。

(2) n が偶数のとき，$\varphi<\pi-n\theta$，n が奇数のとき，$\varphi>n\theta-\pi$ ならば，X_n はXの見かけの位置にある。

(3) X_{n+1} はXの見かけの位置にない。また，n が偶数のとき，$\varphi>\pi-n\theta$，n が奇数のとき，$\varphi<n\theta-\pi$ ならば，X_n はXの見かけの位置にない。

この定理1，定理2を証明するために，いくつかの補題を証明する。

補題 1　点Xの極座標を $[r,\varphi](r>0,0\leq\varphi\leq2\pi)$ とする。
(1)Xと直線L’ に関して対称な点 X_1 の極座標を $[r,\varphi_1]$ とすると，$\varphi_1\equiv\theta-\varphi(\mathrm{mod}\quad2\pi)$ である。
(2)Xと直線M’ に関して対称な点 X_2 の極座標を $[r,\varphi_2]$ とすると，$\varphi_2\equiv-\theta-\varphi(\mathrm{mod}\quad2\pi)$ である。

(証明) (1)X_1 の極座標 $[r,\varphi_1]$ を求める。まず，L_1 と原点に関して対称な点を $\mathrm{L'}_1$ とする。
(i)$\dfrac{\theta}{2}\leq\varphi\leq\dfrac{\theta}{2}+\pi$ のとき (図18)

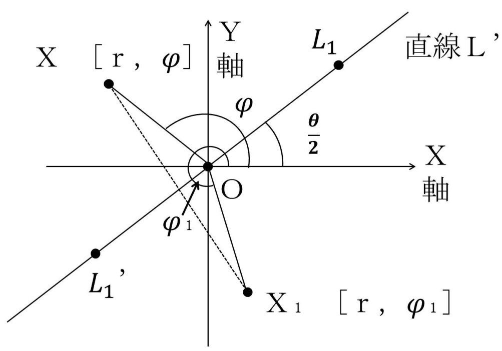


図18

$\angle \mathrm{L_1OX} = \varphi - \dfrac{\theta}{2}$ なので，

$$\angle \mathrm{XOL}_1' = \pi - (\varphi - \frac{\theta}{2}) = \pi - \varphi + \frac{\theta}{2}$$

$\angle \mathrm{XOL}_1' = \angle \mathrm{X_1OL}_1'$なので，

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi + 2(\pi - \varphi + \frac{\theta}{2}) \\ &= \varphi + 2\pi - 2\varphi + \theta \\ &= 2\pi - \varphi + \theta\end{aligned}$$

よって $\varphi_1 \equiv \theta - \varphi (\mathrm{mod} \quad 2\pi)$ である。

(ii)$0 < \varphi < \dfrac{\theta}{2}$ のとき (図 19)

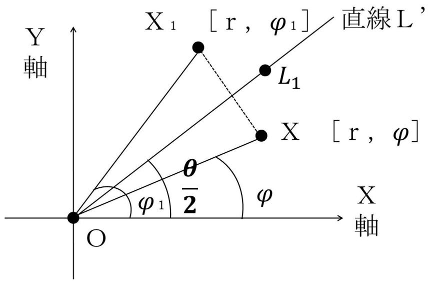


図 19

$\angle \mathrm{L_1OX} = \dfrac{\theta}{2} - \varphi$ なので，

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi + 2(\frac{\theta}{2} - \varphi) \\ &= \varphi + \theta - 2\varphi \\ &= \theta - \varphi\end{aligned}$$

よって $\varphi_1 \equiv \theta - \varphi (\mathrm{mod} \quad 2\pi)$ である。

(iii)$\dfrac{\theta}{2} + \pi < \varphi$ のとき (図 20)

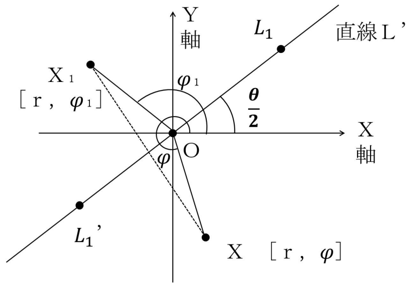


図 20

$\angle \mathrm{L}_1'\mathrm{OX} = \varphi - (\dfrac{\theta}{2} + \pi)$ なので，

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi - 2\varphi - (\frac{\theta}{2} + \pi) \\ &= \varphi - 2\varphi + \theta - 2\pi \\ &= -2\pi + \theta - \varphi\end{aligned}$$

よって $\varphi_1 \equiv \theta - \varphi (\mathrm{mod} \quad 2\pi)$ である。ゆえに，(i)(ii)(iii) より，(1) は正しい。

(2)$\mathrm{X_2}$ の極座標 $[r,\varphi_2]$ を求める。まず，$\mathrm{M_1}$ と原点に関して対称な点を M’$_1$ とする。

(i)$0 \leq \varphi \leq \pi - \dfrac{\theta}{2}$ のとき (図 21)

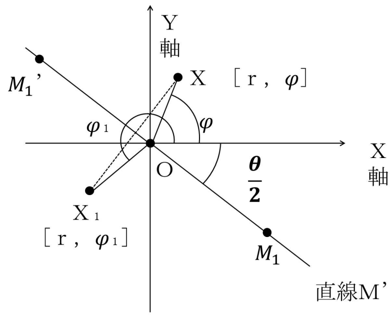


図 21

∠M’$_1$OX=$\pi - (\varphi + \dfrac{\theta}{2})$ なので，

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi + 2\pi - (\varphi + \frac{\theta}{2}) \\ &= \varphi + 2\pi - 2\varphi - \theta \\ &= 2\pi - \varphi - \theta\end{aligned}$$

よって $\varphi_2 \equiv -\theta - \varphi (\mathrm{mod} \quad 2\pi)$ である。

(ii)$\pi - \dfrac{\theta}{2} < \varphi \leq 2\pi - \dfrac{\theta}{2}$ のとき (図 22)

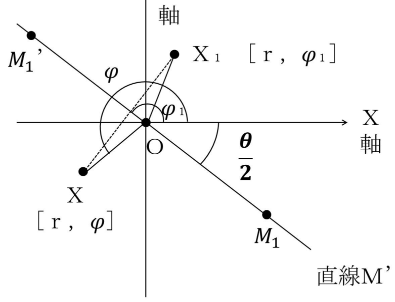


図 22

∠M’$_1$OX=$\varphi-(\pi-\dfrac{\theta}{2})$ なので，

$$\begin{aligned}\varphi_2&=\varphi-2(\varphi-\pi+\frac{\theta}{2})\\&=\varphi-2\varphi+2\pi-\theta\\&=2\pi-\varphi-\theta\end{aligned}$$

よって $\varphi_2\equiv-\theta-\varphi(\mathrm{mod}\quad 2\pi)$ である。
(iii)$2\pi-\dfrac{\theta}{2}<\varphi\leq 2\pi$ のとき (図 23)

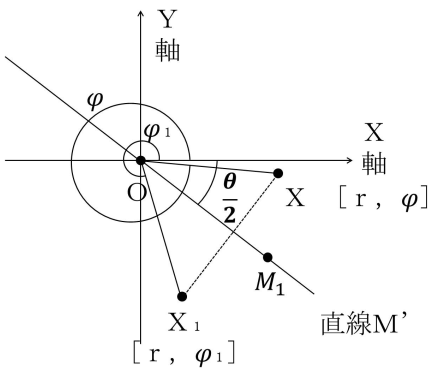


図 23

∠M$_1$OX=$\varphi-(2\pi-\dfrac{\theta}{2})$ なので，

$$\begin{aligned}\varphi_2&=\varphi-2(\varphi-2\pi+\frac{\theta}{2})\\&=\varphi-2\varphi+4\pi-\theta\\&=4\pi-\varphi-\theta\end{aligned}$$

よって $\varphi_2\equiv-\theta-\varphi(\mathrm{mod}\quad 2\pi)$ である。ゆえに，(i)，(ii)，(iii) より，(2) は正しい。
よって，補題 1 が成り立つ。(証明終)

ここで，座標平面上の点 Y の極座標を $[r,\psi]$ とする。Y を L’ に関して対称移動した点を P$_1$，P$_1$ を M’ に関して対称移動した点を P$_2$ とする。そして，$k=2,3,\cdots,n$ に対し，
(i)k が偶数のとき，P$_k$ を直線 L’ に関して対称移動した点を P$_{k+1}$ とする。
(ii)k が奇数のとき，P$_k$ を直線 M’ に関して対称移動した点を P$_{k+1}$ とする。

また，Y を M’ に関して対称移動した点を P’$_1$，P’$_1$ を L’ に関して対称移動した点を P’$_2$ とする。そして，$k=2,3,\cdots,n$ に対し，
(i’)k が偶数のとき，P’$_k$ を直線 M’ に関して対称移動した点を P’$_{k+1}$ とする。
(ii’)k が奇数のとき，P’$_k$ を直線 L’ に関して対称移動した点を P’$_{k+1}$ とする。

このとき，次の補題が成り立つ。

補題 2　点 Y$[r,\psi]$ に対し，上のように点列 P$_1$，P$_2$，…，と，P’$_1$，P’$_2$，…を定める。このとき，P$_k$ の極座標を $[r,\alpha_k]$，P’$_k$ の極座標を $[r,\alpha'_k]$ とすると，

$$\alpha_k=\begin{cases}-k\theta+\psi & (k\text{ が偶数のとき}),\\ k\theta-\psi & (k\text{ が奇数のとき}),\end{cases}\qquad (*)$$

$$\alpha'_k=\begin{cases}k\theta+\psi & (k\text{ が偶数のとき}),\\ -k\theta-\psi & (k\text{ が奇数のとき}),\end{cases}\qquad (**)$$

となる。
(証明)
補題 1 より，点 Y を直線 L’ に関して対称移動した点が P$_1[r,\alpha_1]$ なので，

$$\alpha_1=\theta-\psi$$

同様に，点 P$_1$ を直線 M’ に関して対称移動した点が P$_2[r,\alpha_2]$ なので，

$$\begin{aligned}\alpha_2&=-\theta-\alpha_1\\&=-\theta-(\theta-\psi)\\&=-2\theta+\psi\end{aligned}$$

以下，$k=\gamma$ のとき, $(*)$ が成り立つと仮定して, $k=\gamma+1$ のときも, $(*)$ が成り立つことを示す。
(i)γ が偶数のとき，点 P$_\gamma[r,\alpha_\gamma]$ において，

$$\alpha_\gamma=-\gamma\theta+\psi$$

よって，点 P_γ を直線 L’ に関して対称移動した点が $P_{\gamma+1}[r,\alpha_{\gamma+1}]$ なので，補題 1 より，

$$\begin{aligned}\alpha_{\gamma+1} &= \theta - \alpha_\gamma \\ &= \theta - (-\gamma\theta + \psi) \\ &= (\gamma+1)\theta - \psi\end{aligned}$$

(ii)γ が奇数のとき，点 $P_\gamma[r,\alpha_\gamma]$ において，

$$\alpha_\gamma = \gamma\theta - \psi$$

よって，点 P_γ を直線 M’ に関して対称移動した点が $P_{\gamma+1}[r,\alpha_{\gamma+1}]$ なので，補題 1 より，

$$\begin{aligned}\alpha_{\gamma+1} &= -\theta - \alpha_\gamma \\ &= -\theta - (\gamma\theta - \psi) \\ &= -(\gamma+1)\theta + \psi\end{aligned}$$

よって (*) は正しい。また，(**) に関しても (*) と同様に証明できるので，証明を省略する。

よって補題 2 は正しい。(証明終)

さらに，定義 1(i) で定めた点列 X_1，X_2，…，X'_1，X'_2，…に対して次の補題が成り立つ。

補題 3 X の極座標を $[r,\sigma]$ とする。τ = 1，2，…，に対し，X_τ の極座標を $[r,\sigma_\tau]$，X'_τ の極座標を $[r,\sigma'_\tau]$ とすると，

$$(1)\sigma_\tau = \begin{cases}\tau\theta + \sigma & (\tau\text{が偶数のとき}),\\ \tau\theta - \sigma & (\tau\text{が奇数のとき}),\end{cases}$$

$$(2)\sigma'_\tau = \begin{cases}-\tau\theta + \sigma & (\tau\text{が偶数のとき}),\\ -\tau\theta - \sigma & (\tau\text{が奇数のとき}),\end{cases}$$

となる。

(証明)

(1) を数学的帰納法を用いて示す。補題 1 より，$\sigma_1 = \theta - \sigma$ が成り立つ。これを L_1^* に関して対称移動させると，L_1^* と x 軸のなす角が，

$$\frac{\theta}{2} + \theta = \frac{3\theta}{2}$$

なので，補題 1 より，

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= 3\theta - (\theta - \sigma) \\ &= 2\theta + \sigma\end{aligned}$$

(i)τ が偶数のとき，(1) が成り立つとする。つまり，

$$\sigma_\tau = \tau\theta + \sigma$$

つぎにこの点を L_τ^* に関して対称移動させると，L_τ^* と x 軸のなす角が，

$$\frac{\theta}{2} + \tau\theta = \frac{\theta + 2\tau\theta}{2}$$

なので，補題 1 より，

$$\begin{aligned}\sigma_{\tau+1} &= (\theta + 2\tau\theta) - \sigma_\tau \\ &= \theta + 2\tau\theta - (\tau\theta + \sigma) \\ &= (\tau+1)\theta - \sigma\end{aligned}$$

(ii)τ が奇数のとき，(1) が成り立つとする。つまり，

$$\sigma_\tau = \tau\theta - \sigma$$

つぎにこの点を L_τ^* に関して対称移動させると，L_τ^* と x 軸のなす角が，

$$\frac{\theta}{2} + \tau\theta = \frac{\theta + 2\tau\theta}{2}$$

なので，補題 1 より，

$$\begin{aligned}\sigma_{\tau+1} &= (\theta + 2\tau\theta) - \sigma_\tau \\ &= \theta + 2\tau\theta - (\tau\theta - \sigma) \\ &= (\tau+1)\theta + \sigma\end{aligned}$$

よって，数学的帰納法により，(1) が成り立つことがわかる。

また，(2) に関しても同様に，証明できる。よって補題 3 は正しい。(証明終)

補題 1，2，3 を用いて定理 2 を証明する。

(定理 2 の証明) (1)$\tau = 1, 2,$ …, $n-1$ に対して，X_τ が X の見かけの位置にあることを示す。そのためには，$Y=X_\tau$ として，定義 1(ii) にあるように P_1，P_2，…を定め，P_τ=X を示せばよい。ここで，X_τ の極座標を $[r,\varphi_\tau]$ とす

ると，補題 3 より，

$$\varphi_\tau = \begin{cases} \tau\theta + \varphi & (\tau\text{が偶数のとき}), \\ \tau\theta - \varphi & (\tau\text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

である。また $k = 1, 2,\ \cdots$ に対し，P_k の極座標を $[r,\alpha_k]$ とおく。

(a)τ を偶数とする。ここで，$\tau = 1, 2,\ \cdots,$ $n-1$ かつ $0 < \varphi < \dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\varphi_\tau = \tau\theta + \varphi > 0$$

また，$\dfrac{\theta}{2} + (n-1)\theta < \pi$ より，

$$\varphi_\tau \leq (n-1)\theta + \frac{\theta}{2} < \pi$$

よって，$0 < \varphi_\tau < \pi$ なので，線分 AX_τ は半直線 L と交点をもつ。従って，補題 2 より，

$$\alpha_k = \begin{cases} -k\theta + (\tau\theta + \varphi) & (k\text{ が偶数のとき}), \\ k\theta - (\tau\theta + \varphi) & (k\text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

となる。

今，τ は偶数なので，

$$\alpha_\tau = -\tau\theta + (\tau\theta + \varphi) = \varphi$$

よって，P_τ=X である。

(b)τ を奇数とする。ここで，$\tau = 1, 2,\ \cdots,$ $n-1$ かつ $0 < \varphi < \dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\varphi_\tau = \tau\theta - \varphi \geq \theta - \varphi > 0$$

また，$\dfrac{\theta}{2} + (n-1)\theta < \pi$ より，

$$\varphi_\tau \leq (n-1)\theta + \frac{\theta}{2} < \pi$$

よって，$0 < \varphi_\tau < \pi$ なので，線分 AX_τ は半直線 L と交点をもつ。従って，補題 2 より，

$$\alpha_k = \begin{cases} -k\theta + (\tau\theta - \varphi) & (k\text{ が偶数のとき}), \\ k\theta - (\tau\theta - \varphi) & (k\text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

となる。

今，τ は奇数なので，

$$\alpha_\tau = \tau\theta - (\tau\theta - \varphi) = \varphi$$

よって，P_τ=X である。

ゆえに，$\tau = 1, 2,\ \cdots, n-1$ に対し，X_τ は X の見かけの位置にある。

(2)$\varphi < n\theta - \pi$ とする。Y=X_n として，定義 1(ii) にあるように P_1，P_2，…を定める。ここで，X_n の極座標を $[r,\varphi_n]$ とすると，補題 3 より，

$$\varphi_n = \begin{cases} n\theta + \varphi & (n\text{ が偶数のとき}), \\ n\theta - \varphi & (n\text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

である。

(a)n を偶数とする。このとき，$\theta > 0$,$\varphi > 0$ より，

$$\varphi_n = n\theta + \varphi > 0$$

また，$\varphi + n\theta < \pi$ より，

$$\begin{aligned} \varphi_n &= n\theta + \varphi \\ &< n\theta + \pi - n\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって，$0 < \varphi_n < \pi$ なので，線分 AX_n は半直線 L と交点をもつ。従って，

$$\alpha_k = \begin{cases} -k\theta + (n\theta + \varphi) & (k\text{ が偶数のとき}), \\ k\theta - (n\theta + \varphi) & (k\text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

である。

今，n が偶数なので，

$$\alpha_n = -n\theta + (n\theta + \varphi) = \varphi$$

よって，P_n=X である。

(b)n を奇数とする。このとき，$\varphi < \dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\varphi_n = n\theta - \varphi > 0$$

また，$\varphi > n\theta - \pi$ より，

$$\begin{aligned} \varphi_n &= n\theta - \varphi \\ &< n\theta - n\theta + \pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって (2) が成り立つ。

(3) 補題 3 より,

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} (n+1)\theta + \varphi & (n+1 \text{が偶数のとき}), \\ (n+1)\theta - \varphi & (n+1 \text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

となる。

(a)$n+1$ が偶数のとき, $\dfrac{\theta}{2} + n\theta > \pi$ より,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= (n+1)\theta + \varphi \\ &\geq \pi + \theta - \frac{\theta}{2} + \varphi \\ &= \pi + \varphi + \frac{\theta}{2} \\ &> \pi \end{aligned}$$

よって, AX_{n+1} は半直線 M と交点をもつ。従って, 補題 2 より,

$$\alpha'_k = \begin{cases} k\theta + \varphi_{n+1} & (k \text{が偶数のとき}), \\ -k\theta - \varphi_{n+1} & (k \text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

となる。

今, $(n+1)$ は偶数なので,

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\theta + (n+1)\theta + \varphi$$

よって,

$$\alpha_{n+1} - \varphi_{n+1} = (n+1)\theta \neq 0$$

なので, X_{n+1} は X の見かけの位置にない。

(b)$n+1$ が奇数のとき, $\dfrac{\theta}{2} + n\theta \geq \pi$かつ, $\dfrac{\theta}{2} > \varphi$ より,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= (n+1)\theta - \varphi \\ &\geq \pi + \theta - \frac{\theta}{2} - \varphi \\ &> \pi - \varphi + \frac{\theta}{2} \\ &> \pi \end{aligned}$$

よって, AX_{n+1} は半直線 M と交点をもつ。従って, 補題 2 より,

$$\alpha'_k = \begin{cases} k\theta + \varphi_{n+1} & (k \text{が偶数のとき}), \\ -k\theta - \varphi_{n+1} & (k \text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

となる。

$(n+1)$ は奇数なので,

$$\alpha_{n+1} = -(n+1)\theta - (n+1)\theta - \varphi$$

よって,

$$\alpha_{n+1} - \varphi_{n+1} = -3(n+1)\theta \neq 0$$

よって, X_{n+1} は X の見かけの位置にない。

次に, n が偶数のとき, $\varphi > \pi - n\theta$, また, n が奇数のとき, $\varphi < n\theta - \pi$ ならば, X_n は X の見かけの位置にないことを示す。

(c)n が偶数のとき, 補題 3 より,

$$\varphi_n = n\theta + \varphi$$

ここで, $\varphi > \pi - n\theta$ なので,

$$\begin{aligned} \varphi_n &= n\theta + \varphi \\ &> n\theta + \pi - n\theta \\ &> \pi \end{aligned}$$

よって線分 AX_n は半直線 M と交点をもつので, 補題 2 より,

$$\alpha'_k = \begin{cases} k\theta + \varphi_n & (k \text{が偶数のとき}), \\ -k\theta - \varphi_n & (k \text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

となる。

n は偶数なので,

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= n\theta + \varphi_n \\ &= n\theta + n\theta + \varphi \\ &= 2n\theta + \varphi \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha'_n - \varphi_n = \theta \neq 0$$

よって, X_n は X の見かけの位置にない。

(d)n が奇数のとき, 補題 3 より,

$$\varphi_n = n\theta - \varphi$$

ここで, $\varphi < n\theta - \pi$ なので,

$$\begin{aligned} \varphi_n &= n\theta - \varphi \\ &> n\theta - n\theta + \pi \\ &> \pi \end{aligned}$$

よって線分 AX_n は半直線 M と交点をもつので，補題 2 より，

$$\alpha'_k = \begin{cases} k\theta + \varphi_n & (k \text{が偶数のとき}), \\ -k\theta - \varphi_n & (k \text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

である。

n は奇数なので，

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= -n\theta - \varphi_n \\ &= -n\theta - n\theta + \varphi \\ &= -2n\theta + \varphi \end{aligned}$$

よって，

$$\alpha'_n - \varphi_n = -3\theta \neq 0$$

なので，X_n は X の見かけの位置にない。

ゆえに，(3) も成り立つ。

(1)，(2)，(3) より，定理 2 が成り立つ。(証明終)

次に，点 Y が点 X の見かけの位置にあるとき，実際に見えているのかということについて説明する。

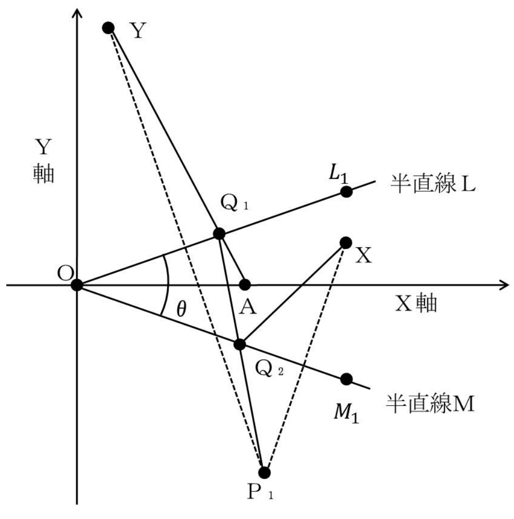


図 24

図 24 では，X と P_1 が直線 M’ に関して対称であり，P_1 と Y が直線 L’ に関して対称であるとする。また，AY と L’ の交点を Q_1，P_1Q_1 と M’ の交点を Q_2 とする。このとき，A の位置から点 X が，折れ線 AQ_1Q_2X を通って，点 Y にあるように見えている。ここで大事なことは，

$$\angle AQ_1L_1 = \angle OQ_1Q_2,\ \angle Q_1Q_2M_1 = \angle XQ_2O$$

のように，折れ線が光の性質である「入射角と反射角が等しい」ことを満たしていることである。これをふまえて，見かけの位置にある点が見えていることを示すために，次の性質を証明する。

性質　Y が X の見かけの位置にあるとすると，定義 1(ii) で定まる P_1，P_2，…に対し，P_τ=X となる τ が存在する。ここで，線分 AY は半直線 L，または半直線 M のいずれか一方のみと交点をもつ。このとき，次の (I) または (II) が成り立つ。

(I) 線分 AY が半直線 L と交点をもつとき，その交点を Q_1 とする。そして $i = 1, 2,$ …, $\tau - 1$ に対し，

(a)i が奇数のとき，線分 P_iQ_i は半直線 M と交点 Q_{i+1} をもち，$\angle Q_iQ_{i+1}M_1 = \angle P_{i+1}Q_{i+1}O$

(b)i が偶数のとき，線分 P_iQ_i は半直線 L と交点 Q_{i+1} をもち，$\angle Q_iQ_{i+1}L_1 = \angle P_{i+1}Q_{i+1}O$

(II) 線分 AY が半直線 M と交点をもつとき，その交点を Q_1 とする。そして $i = 1, 2,$ …, $\tau - 1$ に対し，

(a’)i が奇数のとき，線分 P_iQ_i は半直線 L と交点 Q_{i+1} をもち，$\angle Q_iQ_{i+1}M_1 = \angle P_{i+1}Q_{i+1}O$

(b’)i が偶数のとき，線分 P_iQ_i は半直線 M と交点 Q_{i+1} をもち，$\angle Q_iQ_{i+1}L_1 = \angle P_{i+1}Q_{i+1}O$

(証明)

(I) を示す。

X，Y の極座標をそれぞれ $[r,\varphi]$, $[r,\psi]$(ただし, $0 < \varphi < \dfrac{\theta}{2}$, $0 < \psi < \pi$とする。)

補題 3 より，

$$\psi = \begin{cases} \tau\theta + \varphi & (\tau\text{が偶数のとき}), \\ \tau\theta - \varphi & (\tau\text{が奇数のとき}), \end{cases}$$

である。

線分 AY と半直線 L との交点を Q_1 とする。

また，定義 1(ii) で定まる点列 P_1，P_2，$\cdots$，P_τ をとる。

まず $\tau = 1, 2,\ \cdots, n-1$ のときを考える。

このとき，$1 \leq k \leq \tau - 1$ に対し，k が奇数のとき，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ と半直線 M が交わり，k が偶数のとき，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ と半直線 L が交わることを示せばよい。

(ア)τ が偶数，k が偶数のとき

補題 2 より，P_k の極座標を $[r, \alpha_k]$ とすると，

$$\alpha_k = \begin{cases} -k\theta + \psi & (k \text{ が偶数のとき}), \\ k\theta - \psi & (k \text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

であり，τ は偶数，k は偶数なので，

$$\begin{aligned} \psi &= \tau\theta + \varphi, \\ \alpha_k &= -k\theta + \psi \\ &= (\tau - k)\theta + \varphi \end{aligned}$$

と表せる。このとき，

$$\frac{\theta}{2} < (\tau - k)\theta + \varphi < \pi - \frac{\theta}{2}$$

である。なぜならば，$k \geq 1, \tau \leq n-1, \dfrac{\theta}{2} < \pi$ より，

$$\begin{aligned} &(\tau - k)\theta + \varphi - (\pi - \frac{\theta}{2}) \\ &\leq (n-2)\theta + \varphi - (\pi - \frac{\theta}{2}) \\ &\leq \pi - \frac{\theta}{2} - \theta + \varphi - \pi + \frac{\theta}{2} \\ &= \varphi - \theta \\ &< 0 \end{aligned}$$

また，$k \leq \tau - 1$ より，

$$\begin{aligned} &(\tau - k)\theta + \varphi - \frac{\theta}{2} \\ &\geq \theta + \varphi - \frac{\theta}{2} \\ &= \varphi + \frac{\theta}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

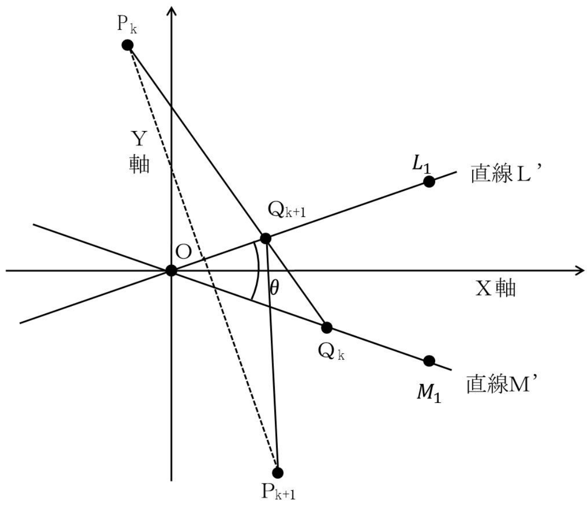


図 25

よって，帰納法の仮定より，Q_k が半直線 M 上にあり，

$$\frac{\theta}{2} < \alpha_k < \pi - \frac{\theta}{2}$$

なので，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ と半直線 L は交点をもつ。(図 25) ここで，P_k と P_{k+1} は直線 L' に関して対称であるので，

$$\angle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{O} = \angle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{O}$$

対頂角より，

$$\angle \mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{L}_1 = \angle \mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{L}_1$$

よって，

$$\angle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{O} = \angle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{O}$$

(イ)τ が偶数，k が奇数のとき

(ア) と同様に，P_k の極座標は $[r, (k-\tau)\theta - \varphi]$ と表せる。このとき，

$$-\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) < (k - \tau)\theta - \varphi < -\frac{\theta}{2}$$

である。なぜならば,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\theta}{2}-\{-(\tau-k)\theta-\varphi\}\\
&=-\frac{\theta}{2}+\tau\theta-k\theta+\varphi\\
&=(\tau-k)\theta+\varphi-\frac{\theta}{2}\\
&>\theta+\varphi-\frac{\theta}{2}\\
&>0
\end{aligned}
$$

また, $\tau \leq n-1, \dfrac{\theta}{2}+(n-1)\theta<\pi, \varphi<\dfrac{\theta}{2}$ より

$$
\begin{aligned}
&(k-\tau)\theta-\varphi-\{-\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\}\\
&=\pi+(k-\tau)\theta-\varphi-\frac{\theta}{2}\\
&>(n-1)\theta+\frac{\theta}{2}+k\theta-(n-1)\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\\
&>k\theta-\frac{\theta}{2}\\
&>0
\end{aligned}
$$

よって,

$$-\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)<\alpha_k<-\frac{\theta}{2}$$

なので, (ア) と同様に線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ と半直線 M は交点をもち, $\angle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{O}=\angle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{O}$ が成り立つ。

(ウ)τ が奇数, k が偶数のとき

(ア) と同様に, P_k の極座標は $[r,(\tau-k)\theta-\varphi]$ と表せる。このとき,

$$\frac{\theta}{2}<(\tau-k)\theta-\varphi<\pi-\frac{\theta}{2}$$

である。証明は (ア), (イ) と同様なので省略する。

(エ)τ が奇数, k が奇数のとき

(ア) と同様に, P_k の極座標は $[r,(k-\tau)\theta+\varphi]$ と表せる。このとき,

$$-\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)<(k-\tau)\theta+\varphi<-\frac{\theta}{2}$$

である。これについても証明は省略する。

(II) についても (I) と同様に証明できるので, 省略する。(証明終)

定理 2 を用いて, 定理 1 を証明する。

(定理 1 の証明)

今までと同様に, k=1, 2, …に対し, 半直線 L を原点を中心に $k\theta$ 回転させた半直線を L_k^* とし, 半直線 M を原点を中心に $-k\theta$ 回転させた半直線を L_{*k} とする。

(1) を示す。

$\dfrac{2\pi}{2n}<\theta<\dfrac{2\pi}{2n-1}$ とすると,

$$n\theta-\frac{\theta}{2}<\pi<n\theta$$

ここで, C と D を原点を中心に $k\theta$ 回転させた点と $-k\theta$ 回転させた点を, それぞれ C_k と D_k とする。ただし, k=1, 2, …である。このとき, $(n-1)\theta+\dfrac{\theta}{2}<\pi<n\theta+\dfrac{\theta}{2}$ なので, C_{n-1} は第 2 象限に, C_n は第 3 象限にあり, 線分 $\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{C}_n$ は x 軸と交点 Z をもつ。このとき, Z は線分 $\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{D}_n$ と x 軸の交点でもある。(図 26)

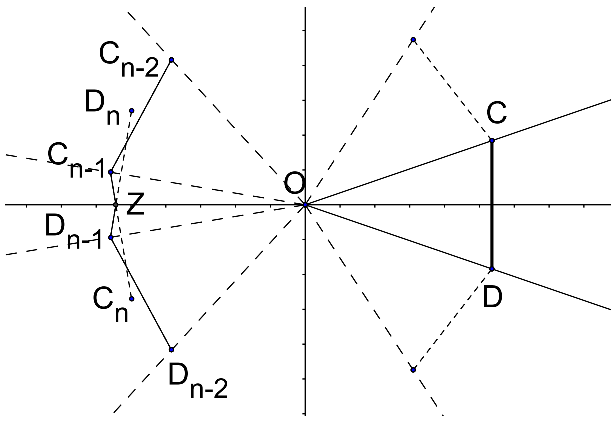


図 26

ここで,

$$\angle \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{OZ}=\pi-\{\frac{\theta}{2}+(n-1)\theta\},$$

$$\angle \mathrm{ZC}_{n-1}\mathrm{O}=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$$

よって

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{ZO} &= \pi - \angle \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{OZ} - \angle \mathrm{ZC}_{n-1}\mathrm{O} \\ &= -\frac{\pi}{2} + n\theta \\ &> -\frac{\pi}{2} + \pi \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって, 多角形 $\mathrm{CC}_1 \cdots \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{ZD}_{n-1} \cdots \mathrm{D}_1\mathrm{D}$ の Z における内角は π より大きくなるので，これは凹 $2n+1$ 角形である。

(2) を示す。

$\theta = \dfrac{2\pi}{2n}$ とすると, $n\theta = \pi$ である。よって, $\mathrm{L}^*_{(n-1)}$ と x 軸のなす角は

$$\frac{\theta}{2} + (n-1)\theta = \pi - \frac{\theta}{2}$$

また，$\mathrm{L}_{*(n-1)}$ と x 軸のなす角は

$$-\frac{\theta}{2} - (n-1)\theta = -\pi + \frac{\theta}{2}$$

よって，定理 2 より，線分 CD の見かけの位置は線分 CD を半直線 L^*_k や L_{*k} に関して対称移動したものなので，それらを合わせて図形は正 $2n$ 角形になる。

(3) を示す。

$\dfrac{2\pi}{2n+1} < \theta < \dfrac{2\pi}{2n}$ とすると,

$$n\theta < \pi < n\theta + \frac{\theta}{2}$$

ここで，(1) と同様に C_k と D_k を定める。よって同様に考えると,

$$\angle \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{OZ} = \pi - \{\frac{\theta}{2} + (n-1)\theta\}$$
$$\angle \mathrm{ZC}_{n-1}\mathrm{O} = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$$

である。(図 27)

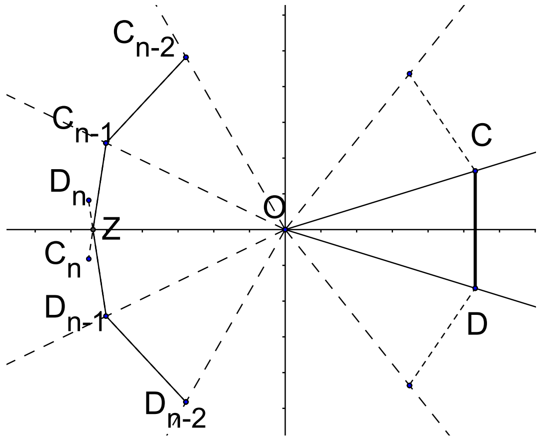


図 27

よって,

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{ZO} &= \pi - \angle \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{OZ} - \angle \mathrm{ZC}_{n-1}\mathrm{O} \\ &= -\frac{\pi}{2} + n\theta \\ &< -\frac{\pi}{2} + \pi \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって, 多角形 $\mathrm{CC}_1 \cdots \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{ZD}_{n-1} \cdots \mathrm{D}_1\mathrm{D}$ の Z における内角は π より小さくなるので，これは凸 $2n+1$ 角形である。

(4) を示す。

$\theta = \dfrac{2\pi}{2n+1}$ とすると, $(2n+1)\theta = 2\pi$ である。L^*_n と x 軸のなす角は,

$$\frac{\theta}{2} + n\theta = \frac{1}{2}(2n+1)\theta = \pi$$

同様に L_{*n} と x 軸のなす角は $-\pi$ となり，L_{*n} と x 軸は一致する。

よって定理 1 が成り立つ。(証明終)

実践対象は小学生なので，定理 1 で示したことの発見を題材とする授業を計画した。

3. 授業計画

3.1 授業のねらい

本教材のねらいを以下の (a)，(b) とした。

(a) 実験などの活動を通して規則性や性質を見つけ，それを算数の言葉を用いて説明することができる。

(b) わかったことや気づいたことを別の事象に活用して考えることができる。

今回の授業では，具体物を操作して規則性を見つけ，さらにその見つけた規則性を活用して新たな問題を考える。よって全体を通して，どのような場面で発見した規則性を活用すべきなのかを考える機会が多い。また，学校で学習した算数の言葉を使う機会も多い。新たなことを学びつつ，既習の内容を活用して考察できることを重視するために，ねらいをこの 2 つにした。

3.2 展開

この実践は全 4 時間を 1 日で終える構成であり，以下の通りである。

(1 時間目)

1. 全体導入 1
2. 学習プリント 1 に取り組む（考察 1）

(2 時間目)

1. 全体導入 2
2. 合わせ鏡の実験と考察（考察 2）
3. 班での交流 1
4. 全体でのまとめ 1
5. 確認問題

(3 時間目と 4 時間目)

1. 全体での導入 3
2. 正三角形の万華鏡の製作
3. 自由な形の万華鏡の計画・予想・製作・交流
4. 全体でのまとめ 2

以下，授業について詳しく説明する。

1 時間目

(1) 全体導入 1

1 日を通して，光と鏡の関係について考えることを伝える。その導入として，ものが見える仕組みや入射角と反射角の性質，鏡の性質について説明する。そして，学習プリント 1(資料 2) を配布し，光と鏡の性質についての問題に取り組む。この取り組みを通して，入射角と反射角が等しい性質があることで，物は鏡に関して対称の位置にあるように見えることを理解する。この内容を理解することで，鏡が 2 枚になったときの学習にも，物は鏡に対して対称に映る性質を活用できるようにすることがねらいである。

2 時間目

(1) 全体導入 2

合わせ鏡とその実験の仕方について説明をする。ここでは 2 節で述べた 2 枚の合わせ鏡に図形を映したらどのように見えるかを実験する。

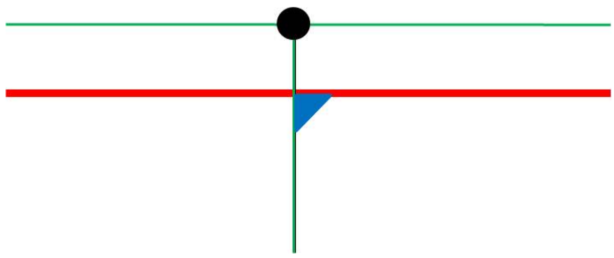


図 2

実験の手順

1. 真ん中にある縦向きの直線の両側に，等しい角を描く。

2. 1 で描いた直線と太い直線で囲まれた三角形の内部に，好きな形や模様を描く。

3. 1 で描いた 2 直線上に，鏡を 1 枚ずつ置き，鏡に映る太い直線で囲まれた図形を観察する。

ここではまず，2 枚の合わせ鏡の角度が 120 °，90 °，60 °のときを調べる。その後，自分の調べたい角度で実験を行うことを全体で確認する。この時間の課題は「合わせ鏡はどのように見えるかを考えよう」である。

(2) 考察 2

合わせ鏡の実験を行い，結果を学習プリント 2（資料 3）の表にまとめる。合わせ鏡の角度についての規則性や，合わせ鏡がどのように見えているのか考察したことも学習プリント 2 にまとめる。この実験を通して,「合わせ鏡の角度が 360 の約数のとき，太線で囲まれた図形が正多角形になる」ということに気づくことがねらいである。

(3) 交流 1

実験で気づいたことや，考察したことを班の中で交流する。この交流では，児童が算数の言葉を使えるように援助を行う。例えば，360 の約数や正多角形，また，小学 6 年生では線対称という言葉を学習している。このような学校で学んだ算数の言葉を，できるだけ多く活用することがこの交流のねらいである。

(4) まとめ

児童が合わせ鏡に関して気づいたことを，授業者が全員に提示する。そして「合わせ鏡の角度が 360 の約数のとき，太線で囲まれた図形が正多角形になる」ことについて，なぜそのように見えるのかを説明する。ここでは，2 節のようには説明できないので，像が鏡に対して対称に映ることをもとに，図 28 を用いて次のように説明する。

まず，鏡 A に対して，対称に映る見かけの像がある。この見かけの像には合わせ鏡の間に書かれている図形だけでなく，鏡 B も映っている。この見かけの像に映っている鏡 B に対しても，さらに図形が映って見える。つまり，鏡に対して図形が対称になるようになるように図形を敷き詰める。すると，合わせ鏡の角度が 360 °になる。このとき，太い直線の長さはすべて等しいので正方形になる。

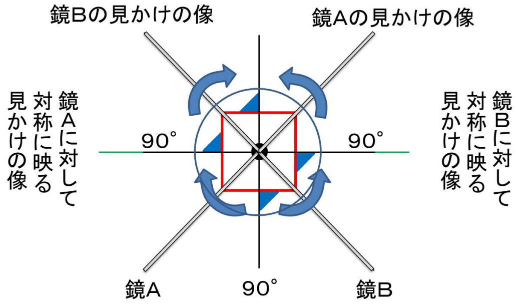


図 28

このように全体への説明を行ったあと，問題プリント（資料 4）を配布し，合わせ鏡についての問題を解く。問題は次のような問題である。

問題

次のような場合，合わせ鏡にはどのように映るのかを，実験を行わずにかいてみよう。

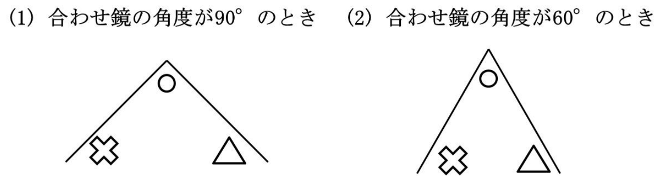


図 29

この問題を通して，合わせ鏡は鏡に関して図形が左右対称に映っていることを再確認することがねらいである。

3 時間目と 4 時間目

(1) 全体導入 3

一般的な万華鏡は鏡を 3 枚合わせて作られていることや，鏡を 3 枚合わせた正三角形の万華鏡の作り方を説明する。そして 3 時間目と 4 時間目を合わせた 2 時間を通しての問題を提示する。

問題 1 正三角形の万華鏡はどのように見えるのだろうか。

問題２　鏡の合わせ方を変えると，どのように見えるのだろうか。

この２つをこの２時間の問題として提示する。この２時間を通しての課題は「色々な形の万華鏡から万華鏡の性質を考えよう。」である。

問題１を通して，一般的な３枚の鏡でつくられている万華鏡がどのように見えるのかを観察する。実際に正三角形の万華鏡をのぞいてみる様子が図 30 である。

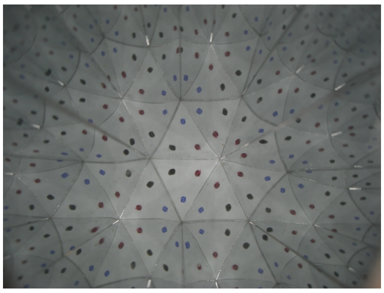


図 30

そして，これを図として表したのが図 31 である。

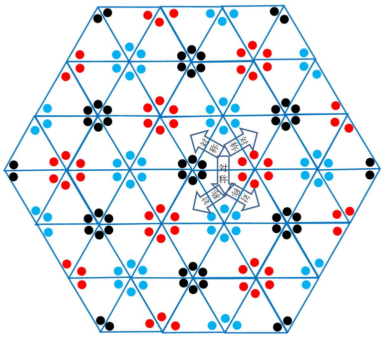


図 31

鏡の枚数が増えても，２枚のときと同様に，図 31 のように隣り合った鏡に関して対称に映っている。このことに気づくことで，鏡の合わせ方を変えても，２枚のときと同様に，工作する前にどのように見えるのか予想できるようにすることがねらいである。

そしてそれを活用して，問題２では鏡の合わせ方を変えることで，どのように図形が見えるのかについて考える。ここで大切にしたいことは，好きな形の万華鏡を作る前に，その万華鏡ではどのように見えるのかを予想させることである。この予想においても，２枚の合わせ鏡や正三角形の万華鏡での見え方を活用して考える。また，万華鏡の形を変えることで，のぞいたときに見える図形がすべて同じではないときもある。このような万華鏡をこの授業では「きれいに見えない万華鏡」と呼ぶ。例えば，正三角形の万華鏡をのぞくと，図 30 のように，すべて同じ図形が敷き詰められている。しかし，直角三角形の万華鏡をのぞくと図 32 のように，すべてが同じ図形ではない。

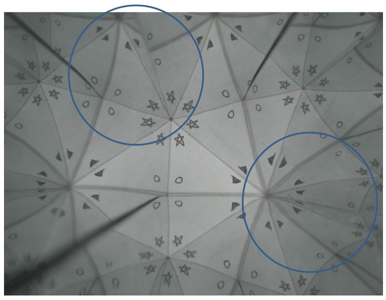


図 32

問題２を通して，鏡を合わせる図形によってはきれいに見えない万華鏡もあることに気づくこともねらいとしている。

(2)　活動

問題１を考えるときには，実際に正三角形の万華鏡を工作する。万華鏡を次の手順で作る。

材料

- 塩化ビニル板（１人１枚）
- 板目表紙（１人１枚）
- 両面テープ
- はさみ，またはカッターナイフ
- 定規
- コンパス
- 三角定規
- 分度器
- カッター板

手順

1. 厚紙と塩ビ板を縦 15 ｃm，横 3 ｃmに切る。
2. 切った厚紙に両面テープを貼って，切った塩ビ板を貼る。（これをミラー板と呼ぶ。) これと同じものを全部で 3 つ作る。
3. 3 つを正三角形になるように組み合わせて，ビニールテープで固定する。(図 33)

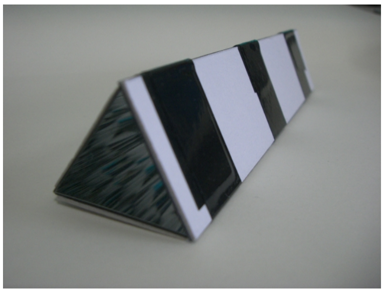


図 33

そして実際にのぞいてどのように見えたのかを学習プリント 3（資料 5）に記入する。

問題 2 では，正三角形の万華鏡の見え方を参考にし，のぞいてみるとどのように見えるのかを予想させる。また，色々な形の万華鏡をいくつ作ってもよいことにした。

4. 活動の様子

3 節で示した授業案を以下のように実践した。
題材名 「ミラークル万華鏡 !! 」
実践日 平成 24 年 2 月 4 日（土）
場所　 大垣市スイトピアセンター学習館 2 階スイトピアホール
対象　 大垣市内の小学 5，6 年生 34 人
時間数 全 4 時間

1 時間目

(1) 個人追究

全体導入で説明したことを基に，学習プリント 1 にある光と鏡に関する問題に取り組んだ。多くの児童が説明したことを活用し，問題に取り組んでいたが，何人かの児童は問題 3 で手が止まっていた。その理由として，全体説明だけでは，見かけの位置や，対象が鏡に対して対称に映ることなどが，まだ把握できていなかったことが考えられる。そのような児童には，各班についている大学生が，言葉の説明を繰り返し行ったり,「鏡に対して対象がどこにあるように見えるだろうか」という助言などの支援を行った。その結果，すべての児童が学習プリント 1 の問題を解決することができた。

2 時間目

(1) 実験と個人追究

児童 1 人 1 人に合わせ鏡を配り，合わせ鏡の実験に取りかかった。まずプリントに指定されている角度で実験を行った。初めは実験の手順に慣れず時間がかかったが，実験に慣れてくると積極的に実験を行う姿が多く見られた。また，120 °，90 °，60 °の実験を行っただけで，規則性を発見する児童がいた。また，ある児童は合わせ鏡の角度を 72 °として，観察をしていた。その児童に「なぜ 72 °にしたのか？」と質問すると,「赤い線で囲まれた図形が正五角形に見えるから」と答えていた。

3 時間目と 4 時間目

(1) 工作と個人追究

子ども達は正三角形の形に鏡を組み合わされた万華鏡を積極的に製作していた。初めて触れる塩化ビニル板の扱いに苦戦している児童もいたが，多くの生徒が正三角形の万華鏡を製作することができていた。そして，製作した万華鏡がどのように見えるのかを学習プリント 3 にかいていた。

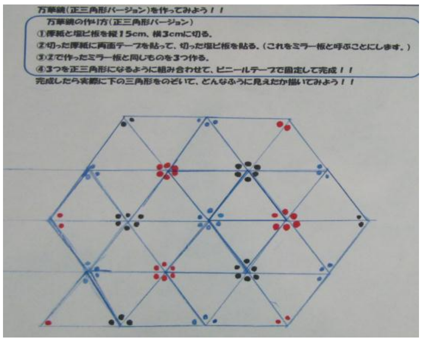


図 34

ある児童は，図 34 のように，万華鏡をのぞくと各鏡に関して図形が対称に映っている，という規則を発見していた。

子ども達は，学習プリント 4（資料 6）をもとに，どのような形に鏡を組み合わせるかを考えていた。そして，正六角形や正方形などの正多角形に合わせたり，台形や星の形に合わせてみようと考える児童もいた。そして，のぞく前にどのように見えそうかを，2 枚の合わせ鏡や，正三角形の万華鏡の考え方を活用して予想していた。

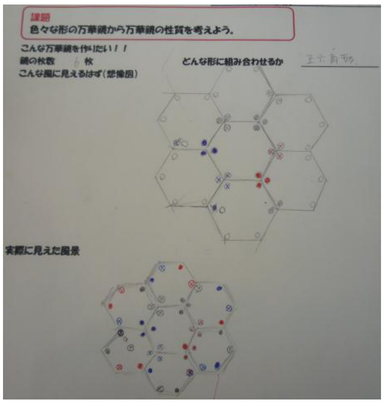


図 35

そして作った万華鏡をのぞいたとき，予想通りに見えた児童も，予想した部分がすべて同じではない児童もいた。予想と違った児童の万華鏡の形は，先に述べたきれいに見えない万華鏡の図形が多かった。班の中には，難しい形で組み合わせようとしている児童に対して，班の仲間が協力して一緒に作っている姿もあった。交流の場面では，すべての児童が班内で自分の作った万華鏡を紹介していた。

5. 授業に対する考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

（1）正三角形以外の万華鏡を作ることができましたか？

・はい　（33 人）
・いいえ（0 人）

それはどのような形の万華鏡ですか？

(回答の一部)
・正方形
・正五角形
・正六形
・十六角形
・台形
・星型

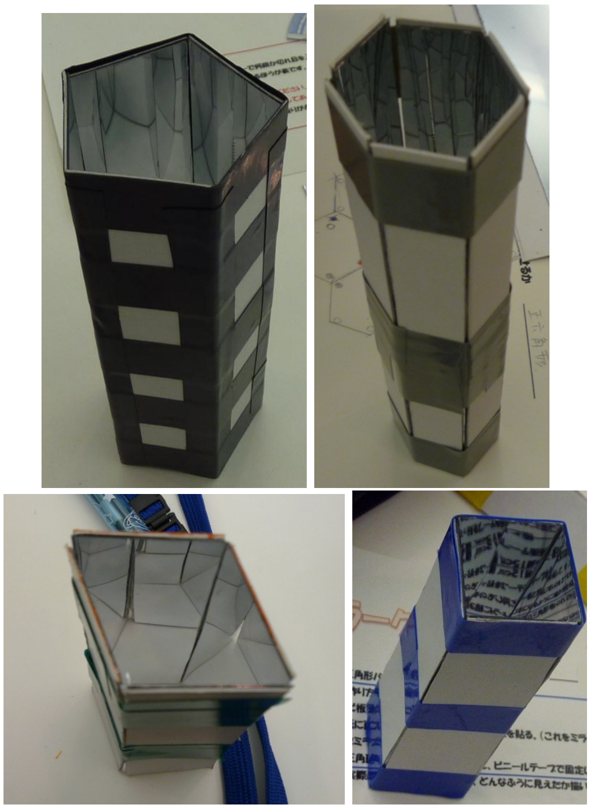


図 36

（2）午前に行った合わせ鏡の実験に関して，太い直線で囲まれた図形が正八角形になるためには，合わせ鏡の角度を何度にすればよいと思いますか？

正答　45°

なぜその角度にすれば良いと思いますか？

(回答の一部)
・360 ÷ (正多角形の辺の数，または正多角形頂点の数) = (合わせ鏡の角度) だから。

正答者　33 人中 24 人

（3）長方形の万華鏡はきれいに見える万華鏡だと思いますか？

・はい　　(26 人)
・いいえ　(7 人)

（4）今日 1 日の感想を書いてください。

・自分で自由な形の万華鏡を作ったり，合わせ鏡で角度を変えながら，鏡に映った模様を観察するのが楽しかったです。また，万華鏡を作ったらどんな模様になるのかなど，きちんと予想できたのでよかったです。
・万華鏡を作るときに，きれいに見れるものと，きれいに見れないものがあるのかと思いました。
・算数だけじゃなくて，理科をやっているようで楽しかった。
・きれいに見える万華鏡が作れました。
・万華鏡づくりで難しいものをいろんな人に手伝ってもらった。
・色々な形があって，何角形がいいのかがよく分かってとても楽しかったです。
・正三角形の万華鏡は今回で 3 回目だけど，ひし形は初めて作ってとっても面白かったです。
・図形が苦手なんだけど，今日やって図形が好きになりました。
・みんなと一緒に考えて，みんなと一緒に色々な形の万華鏡を作ったりして，発表もたくさんして，楽しくみんなと交流できてよかったです。

本授業のねらいの達成度について考察する。
(a) 実験などの活動を通して規則性や性質を見つけ，それを算数の言葉を用いて説明することができる。

子ども達は活動全体を通して，多くの規則や性質を見つけていた。2 枚の合わせ鏡の実験でも規則を見つけ，それを式で表現しようとしていたり，反比例の性質と結び付けてプリントに書いている姿もあった。また班交流では見つけた規則を算数の言葉を使って表現し，交流を通して他の子が使っている算数の言葉を自分のプリントに書いている姿があり，算数の言葉を使おうとする意識が高かった。例えば，交流の中で「きれいな形に見える」というような言葉は使わず,「正多角形に見える」という言葉を使ったり,「正多角形に見えるとき，辺の数と角度をかけると 360 になり，これは反比例の関係に似ている」というように，関数の学習で学んだ言葉を使っている児童もいた。また万華鏡の製作では，アンケートにおいて「どのような形の万華鏡を作りましたか?」という質問に対して,「正六角形」や「台形」,「ひし形」,「正方形」など図形の勉強で学習した言葉を多くの児童が書いていた。よってこのねらいは達成できたと考える。

(b) わかったことや気づいたことを別の事象に活用して考えることができる。

前述の通り，子ども達は多くの規則や性質を見つけていた。合わせ鏡の実験において，120 °，90 °，60 °の実験を行った後に 72 °で実験したり，120 °の実験などから気づいたことを活用したりしている姿があった。気づくことができなかった児童も，班交流を通して合わせ鏡の性質を理解することができていた。アンケートの問題では「午前に行った合

わせ鏡の実験において，赤い線で囲まれた図形が正八角形になるためには，合わせ鏡の角度を何度にすればよいと思いますか？」という問題に対して，33 人中 23 人が「45 °」と回答しており，その理由も「360 ÷ 8 を行えばよい。」や「360 ÷（正多角形の辺）＝（合わせ鏡の角度）だから。」と実験から気づいたことや，交流を通して学んだことを活用していた。

午後の万華鏡づくりにおいても，正三角形の万華鏡の見え方を活用して，自由な形の万華鏡はどのように見えそうかを多くの児童が予想できていた。また，アンケートの問題 (3) においても，長方形の万華鏡がきれいに見えるかどうかを，約 8 割の児童が正しく判断できていた。よってこのねらいも達成できたと考える。

6. 今後の課題

今回の実践では，授業の流れを大きく 3 つに分けた。1 つ目は光の反射や鏡についての基礎の学習，2 つ目は鏡が 2 枚のときの合わせ鏡について，3 つ目は万華鏡について，である。今回の授業は学んだことを活用する場面が多かった。具体的には，1時間目では鏡が 1 枚のときに，ものがどのように見えるのかを学び，それを活用して，2 時間目では鏡が 2 枚のときにどのように図形が見えるか，そして 3 時間目ではそれを身近な事象である万華鏡に活用し，児童自身が考えた万華鏡を製作した。特に今回の実践では,「物体は鏡に対して対称に映る」という内容を最も活用した。しかし 1 時間目で学習した内容はそれだけでなく，どのように光が反射しているのかについても学習した。今回の実践では，この内容を活用する場面が少なかった。この光の反射の内容は，合わせ鏡や万華鏡についてより深く考えるときに必要な学習である。授業の中にこの内容を活用する場面があれば，合わせ鏡などについても,「合わせ鏡の角度が 360 の約数のとき，正多角形に見える」だけでなく，2 節にも述べたような凹多角形などに見えることについても，深く追究できたのではないかと考える。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，小学校学習指導要領 解説算数編.

[2] 三浦　登ほか 44 名，2003，新しい科学 1 分野上，東京書籍株式会社.

（資料１）

	ねらい	学習活動	指導と援助
導入		問題の説明 ・光と鏡の性質を学んでいくとともに，最後には万華鏡について考えていくことを伝える。	・説明はプレゼンテーションを使って行う。
展開 午前	・光の反射の性質や、鏡の性質について理解する。 ・合わせ鏡の実験を通して，規則性や性質を見つけ，合わせ鏡がどのように見えるかを実験を行わなくても推測することができる。	全体導入１ 光と鏡についての説明 ・ものが見えるとはどういうことなのか ・光の反射について ・鏡の性質について **課題**　光の進み方や鏡の見え方について理解しよう。 学習プリント１にある光と鏡の問題を解く。 ・答え合わせは，班ごとで行う。 全体導入２ 合わせ鏡についての説明 ・合わせ鏡について ・実験の方法について **課題**　合わせ鏡はどのように見えるかを考えよう。 合わせ鏡の実験 ・合わせ鏡の実験を行い，結果を学習プリント２の表にまとめる。 ・合わせ鏡の角度についての規則性や，合わせ鏡がどのように見えているかを考察する。 ・実験で気づいたことを班の中で交流する。 ・子ども達が気づいたことを授業者が全員に紹介する。 午前のまとめ ・合わせ鏡の性質の１つである「合わせ鏡の角度が 360 の約数のとき，赤線で囲まれた図形が正多角形になる。」ということについての説明 合わせ鏡についての問題を解く。 ・合わせ鏡の角度が 60 °，90 °のとき、合わせ鏡で見るとどのように見えるかを実験を行わずに描く。 ・合わせ鏡を利用して，模様や形をつくる。	・光と鏡の性質は難しいので，わからない子には，大学生が繰り返し説明する。 ・子ども達の学習プリントをスキャンして全体に紹介するので，学習プリントに多くの意見を書くように，大学生が援助する。 ・約数や対称などの算数の言葉を使って説明できるように援助する。 ・問題の答えは実際に合わせ鏡を置いて確かめる。答えを出す前に実験をさせないようにする。 ・合わせ鏡を利用した模様や形も全体に紹介する。

展開 午後	・万華鏡の見え方を，合わせ鏡の性質や一般的な万華鏡の見え方から推測し，ほかの形の万華鏡の見え方を考えることができる。	万華鏡についての説明 ・午後の活動についての説明 ・一般的な万華鏡に関するクイズ ・万華鏡に関する疑問 ・正三角形の万華鏡の作り方 **課題**　色々な形の万華鏡から万華鏡の性質を考えよう。 正三角形の万華鏡の製作 ・説明したように万華鏡を作り，学習プリントにある模様を実際にのぞき，どのように見えたかを描く。 ほかの形の万華鏡の製作 ・鏡の枚数や，鏡の組み合わせ方をどのように変えるかを計画する。 ・製作する前にのぞいたらどのように見えるかを予想させて描く。 ・実際にのぞいて見えた風景を描き，予想したものと比べる。 ・どのような万華鏡を作ったか，どのように見えたかを班の中で交流する。また万華鏡の性質について考えている子がいたら，それについても発表してもらう。	・けがのないように，大学生は十分に注意を払う。 ・正三角形の万華鏡は学習プリント3に，形を変える万華鏡については学習プリント 4 を用いて考える。 ・正三角形の万華鏡は同じ形が敷き詰められていることを意識させる。 ・ほかの形の万華鏡は，何個でも作ってよい。
まとめ		全体でのまとめ 万華鏡の性質についての説明 ・正三角形の万華鏡と正方形の万華鏡の見え方の説明 ・平面充填図形についての説明 ・万華鏡と平面充填図形の関係についての説明 ・まだある万華鏡の疑問を紹介する。 ・アンケートに回答する。	

（資料 2）

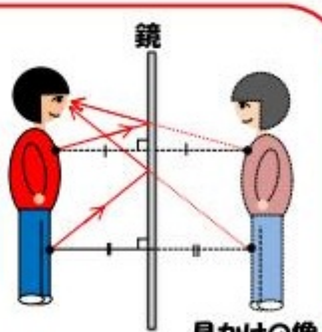
ミラークル万華鏡！！

ものが見える仕組み
光がリンゴに反射して、その反射した光が目に入ることでリンゴだと認識します！！

また、光の反射には次のような性質があります！！

入射角と反射角は等しい！！

鏡に自分の姿が見える仕組み
自分の体に反射した光が、さらに鏡に反射して、その反射した光が目に入ることで、自分の姿を見ることができます。しかし頭の中ではその反射した光が、まるで**直進してきて自分の目に入ってきた**と錯覚を起こすことで、鏡の向こうに自分の姿があるように見えるのです！！
この鏡の向こうに見える像を**見かけの像**と呼ぶことにします。



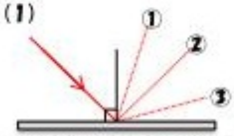
学習プリント 1

班　名前

課題
光の進み方や鏡の見え方について理解しよう。

1. 次のうち正しい光の進む道はどれでしょう？

（1）



答え ＿＿＿＿

（2）

答え ＿＿＿＿

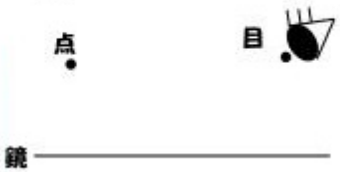
2. 下の光はどのように反射して進むか、かいてみましょう。

（1）

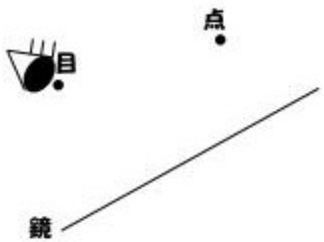
（2）

3. 下の図において、点の見かけの像はどこにあるでしょうか？
また、実際はどのように光は進んで目に入ってくるか光の進む道を書いてみましょう。

（1）



（2）

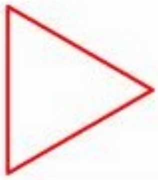


（資料 3）

ミラークル万華鏡！！

課題
合わせ鏡はどのように見えるかを考えよう。

合わせ鏡の実験結果を表にまとめてみよう！！

角度	120°	90°	60°
▲の個数	3		
赤線で囲まれた形			

角度			
▲の個数			
赤線で囲まれた形			

学習プリント 2

班　名前

角度			
▲の個数			
赤線で囲まれた形			

気づいたこと

交流でわかったこと

（資料４）

ミラークル万華鏡！！

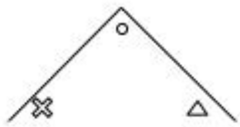
問題プリント

班　名前

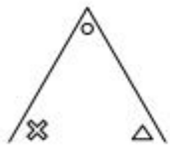
問題

次のような場合、合わせ鏡にはどのように映るのかを、実験を行わずに描いてみよう。

（１）合わせ鏡の角度が90°のとき

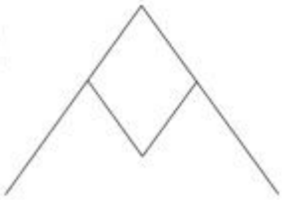


（２）合わせ鏡の角度が60°のとき



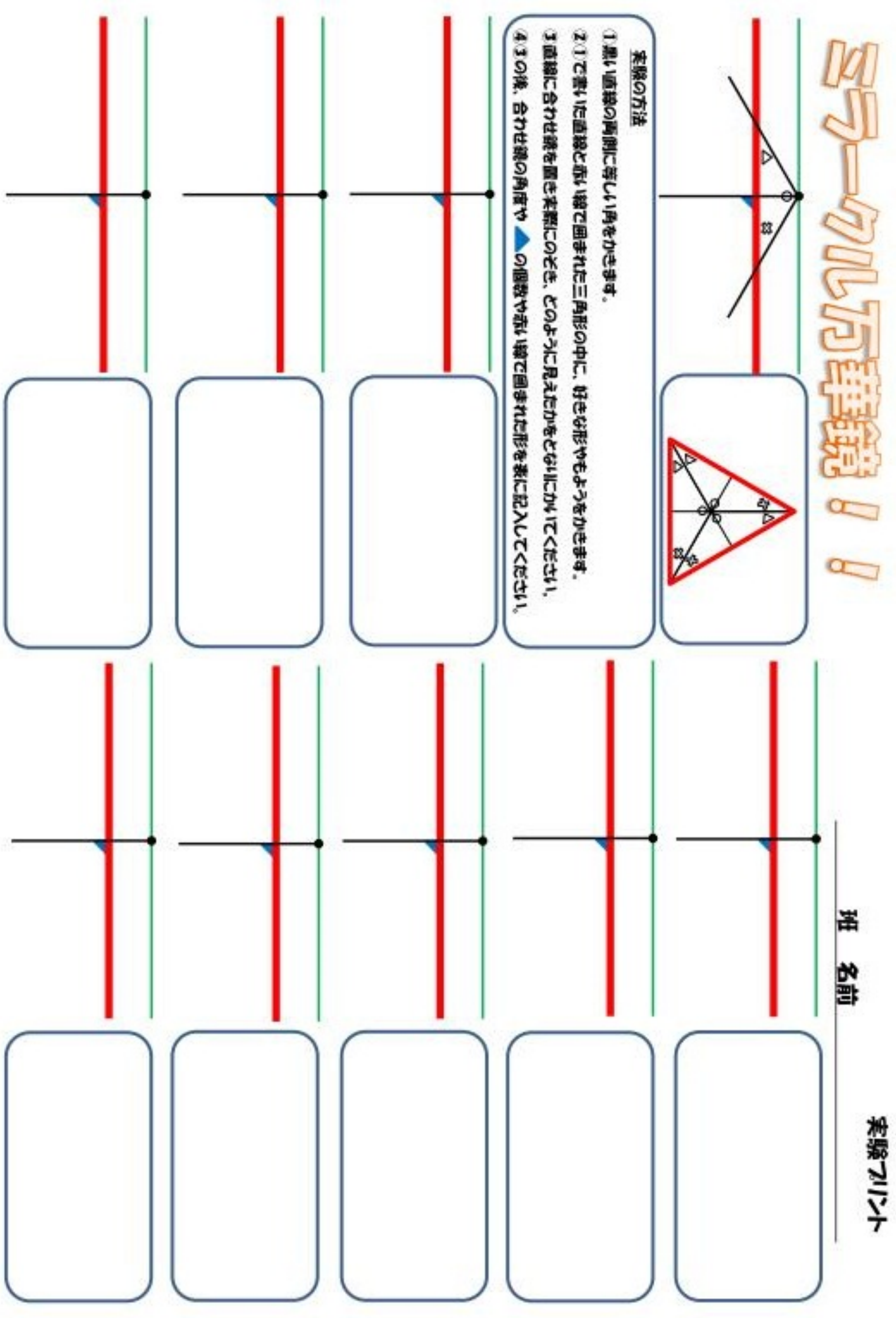
合わせ鏡を利用して色々なもようや形をつくってみよう！！

例



実際に合わせ鏡をしてみると、どう見えるかな？

（資料 5）


ミラークル万華鏡！！
実験の方法
①黒い直線の両側に等しい角をかきます。
②①で書いた直線と赤い線で囲まれた三角形の中に，好きな形やもようをかきます。
③直線に合わせ鏡を置き実際にのぞき，どのように見えたかをとなりにかいてください。
④③の後，合わせ鏡の角度や▲の個数や赤い線で囲まれた形を表に記入してください。
班　名前
実験プリント

（資料 6）

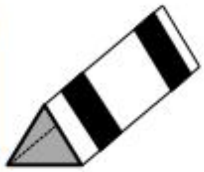
ミラークル万華鏡！！

学習プリント 3

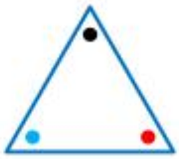
班　名前

万華鏡（正三角形バージョン）を作ってみよう！！

万華鏡の作り方（正三角形バージョン）
①厚紙と塩ビ板を縦15cm、横3cmに切る。
②切った厚紙に両面テープを貼って、切った塩ビ板を貼る。（これをミラー板と呼ぶことにします。）
③②で作ったミラー板と同じものを3つ作る。
④3つを正三角形になるように組み合わせて、ビニールテープで固定して完成！！



完成したら実際に下の三角形をのぞいて、どんなふうに見えたか描いてみよう！！



万華鏡づくりにおける注意
・塩ビ板はとても切りづらいです。カッターで何回か切れ目を入れて、折るときれいに切れます。
・塩ビ板は表と裏があります。保護シールが付いているほうが表です。手順③が終わった後にシールをはがすと、面がきれいな状態のまま使えます。
・カッターやはさみを使うのでけがをしないようにしてください。
・塩ビ板は燃えないので、捨てるときには別の袋が用意してあるので、そこに捨てるようにしてください。
・万華鏡は何個でも作ってもいいですが、塩ビ板には限りがあります。前に余りがありますが、必ず自分たちが使っていた塩ビ板がなくなったらもらってください。

（資料 7）

ミラークル万華鏡！！

学習プリント 4

班　名前

課題
色々な形の万華鏡から万華鏡の性質を考えよう。

こんな万華鏡を作りたい！！

鏡の枚数　　　枚　　　　どんな形に組み合わせるか ________

こんな風に見えるはず（想像図）

実際に見えた風景

万華鏡づくりにおける注意

・塩ビ板はカッターでは切りづらいです。カッターで何回か切れ目を入れて、折るときれいに切れます。

・塩ビ板は表と裏があり、保護シールが付いているほうが表です。手順③が終わった後にシールをはがすと、面がきれいな状態のまま使えます。

・カッターやはさみを使うのでけがをしないようにしてください。

・塩ビ板は燃えないので、捨てるときには別の袋が用意してあるので、そこに捨てるようにしてください。

・万華鏡は何個でも作ってもいいですが、塩ビ板には限りがあります。前に余りがありますが、必ず自分たちが使っていた塩ビ板がなくなったらもらってください。