

## 結び目を用いた中学生向け数学教材の実践

酒井道宏<sup>1</sup>, 田中利史<sup>2</sup>, 中坊滋一<sup>3</sup>

空間図形の中学生向けの教材として「結び目」を取り上げる。小学校・中学校における算数・数学の授業では立方体などの空間図形を考察する場合、投影図等により平面の図形として扱うことが重要である。結び目も平面への投影図としてとらえることが可能であり、また容易に作成することができるため、そのような有用性を用いて、生徒が数学の楽しさを感じられるのではないかと考えた。本論文では、結び目を用いた数学教材開発及び実践について述べる。

<キーワード> 結び目, 空間図形, 投影図, 3彩色可能性

### 1. 序文

平成20年に告示された現行の中学校学習指導要領において、数学の各学年における学習目標として「図形について論理的に考察し表現する能力を伸ばす」ことが挙げられている。また、図形領域においては「観察、操作や実験などの活動を通して、見通しをもって作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を培う。」とあり、観察や操作が重要視されている。本論文では、数学者らによって研究が盛んに行われている空間図形である結び目を、図形の数学的な考察方法を与える教材として新たに用いることを提案する。結び目を観察し、また動かすなどの操作を通して生徒が図形に実際に触れることにより、空間を認識し学習を進めることができるような授業の開発を行うことにした。また、本論文で紹介する授業案は久留米工業高等専門学校「一日体験入学」における体験授業として実践する。

### 中学校学習指導要領の中学校数学科の改善

<sup>1</sup>久留米工業高等専門学校

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部

<sup>3</sup>久留米工業高等専門学校

の具体的事項において、「体験に基づく実感的な理解をもとに、身の回りにあるものを図形としてとらえその性質や関係などを明らかにすることや、図形の性質などを根拠を明らかにして筋道を立てて説明したり、その説明から新たな性質や関係を読み取ったりすることを重視する。」とある。また、第2章の図形領域における目標及び内容の部分に、「空間図形の考察に当たって、目的に応じて空間図形の一部として平面図形をとらえたり、空間図形を平面図形に帰着させてとらえたりすることは、平面図形の運動によって空間図形をとらえる見方と同様に、空間図形を理解するための重要な側面である。」とあるように空間図形の平面への投影図から性質を読み取ることが重要視されている。したがって、身の回りにあるものを空間図形としてとらえ、空間図形の平面への投影図を通して、空間図形の性質を理解できることをねらいとした授業を開発することにした。

2. 結び目について

1本のロープを用意し、自由に絡め両端を繋いだものを結び目と呼ぶことにする(図1)。

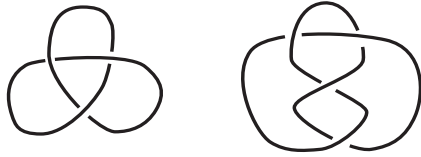


図1

結び目がほどけて、平面上に平坦に置ける一つの輪となるとき、この結び目は自明であるという。結び目が自明でない場合はほどけない結び目ということにする。

結び目が自明な結び目であることを示す場合は、それを実際にほどけばよいが、結び目がほどけない結び目であることを示すことは容易ではない。しばらく結び目を動かしても一つの輪にならないから、ほどけない結び目であるとは言えない。このように「絡まった結び目が自明な結び目になるか、または、ほどけない結び目であるか」ということが、結び目の図形としての性質を調べる上での重要な問題となる。結び目がほどけないことを示すには、結び目を数理モデルとしてとらえ、定式化または数量化することが必要となる。結び目の違いを示すには、不変量という考え方をを用いる。結び目のある方法で(一意的に)定式化または数量化することができた場合、その式や数量の違いを求めることで、結び目がほどけないかを調べることができる。このような式または数量が不変量である。特に結び目に対しある条件を与えて、それを満たす結び目とそうでない結び目を区別することができる。(例えば、条件を満たす結び目には1を、満たさない結び目には0を対応させるとよい。)本論文では、3彩色可能という条件を結び目に対し与えることで、結び目の違いを考察する。

3. 結び目とその図式

本節において、結び目の厳密な定義を述べる。この論文では結び目とは空間の中の端のない折れ線として考える(図2)。



図2

ここで結び目の定義を示す。

<定義> ([4])

空間の有限個の点  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$  について、線分

$$\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \dots, \overline{v_{n-1}v_n}$$

から成る図形

$$\overline{v_0v_1} \cup \overline{v_1v_2} \cup \overline{v_2v_3} \cup \dots \cup \overline{v_{n-1}v_n}$$

を折線という。特に  $v_0 = v_n$  のとき、これを閉折線という。また、閉折線がどの二つの線分も、それらの共通の端点以外には、共有点を持たないとき単純であるという。単純閉折線のことを多边形という。

空間内の多边形のことを結び目という。

結び目の平面への投影図を考える。このとき、辺を少し移動することで、結び目が重なる点は必ず図3のような2重点のみとする。

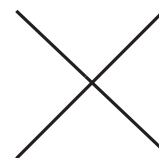


図3

投影図の各2重点に対して図4のように、交点に結び目の線分の上下の情報と考えて投影図を描くとき、これを結び目の図式といい、

そのような2重点のことを図式の交点という。

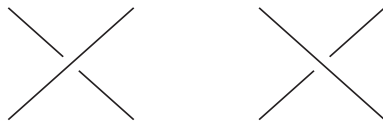


図4

#### 4. 結び目のライデマイスター移動

<定義> ([6])

結び目の図式において、次の変形(図5)をライデマイスター移動と呼ぶ。

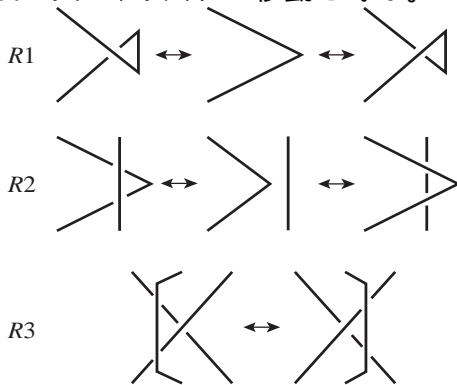


図5

2つの結び目の図式がライデマイスター移動の有限回の操作で移りあうとき、それらの結び目は同じであるという。

#### 5. 3彩色可能性

<定義>

結び目のある投影図の、各連続して繋がっている部分に対し、次のように色を塗ることが出来るとき、その結び目は3彩色可能であるという。

- (a) 全体で2色以上使う。
- (b) 2色以上現れる交差点のまわりでは3色すべてが現れる。

<定理> ([5])

結び目の3彩色可能性はライデマイスター移動で変わらない。

<定理>

自明な結び目は3彩色可能でない。

(証明)

交点のない投影図は自明な結び目の投影図である。この投影図に色を塗るときは3色のうち1色しか使えない。したがって、自明な結び目は3彩色可能でない。

#### 6. 授業の概要

##### (1) 教材について

本論文で紹介する授業の教材は、結び目である。結び目は学習指導要領では扱われていない空間図形であるが、結び目を題材として扱う理由を以下に示す。

1. 日常生活の中でひもを結んだり、結んだひもをほどこうとすることはよくあることであり、身近に感じられ数学の有用性が生徒に伝わりやすい。
2. 結び目は変形が容易であり、多様な活動ができる。
3. 最先端の研究対象であり、活発に研究がされているため、教材として多面的に利用可能である。
4. 予備知識をあまり必要としない。

##### (2) 授業の構成

5節で述べたことを考えられるよう授業の流れは次のように設定した。

1. (導入) 針金を用いて作成した結び目を提示し、結び目について紹介する。
2. 針金入りシリコンチューブ(太さ4ミリメートル、長さ25センチメートル)(写真1)を用いて作成した結び目を一人に一つずつ配布し、その投影図(立面図と平面図)を描く。(ここで、立面図、平面図とは空間図形を真正面から見た図、真上から見た図のことである。)



写真 1

3. 2つの投影図を比べ、その特徴を上げ、交点数などを比べることで違いがあることに気付く。
4. (展開) 図6の3つの結び目がほどけるかという問題を提示する。針金入りシリコンチューブを配布し、生徒が図6の結び目を作成し、ほどけるかを考える。

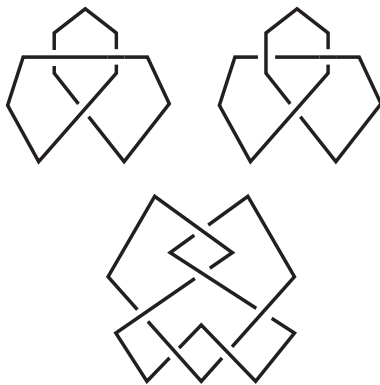


図 6

課題

これらの結び目はほどくことができるか？

5. ライデマイスター移動について説明する。

6. 3彩色可能性について説明する。
7. 生徒が3彩色可能性がライデマイスター移動で変わらないことを具体的な問題で色を塗ってもらうことにより体験する。
8. 針金入りシリコンチューブをそれぞれ一本ずつ配布する。実際に生徒がほどける結び目を自由に作成し、投影図を描く作業を行う。
9. 生徒が8で作成した結び目の投影図(平面図)を描く。
10. 生徒が9で作成した投影図及び三葉結び目の投影図に色を塗る。
11. 生徒が成果を発表する。

気付いたこと

- ・ほどける結び目は3彩色可能でない。
- ・三葉結び目はほどけない。

12. 生徒が追加課題を解く。

(追加課題)

問. 次の結び目(図7)の3彩色可能性を考え、ほどけるかどうかを調べよ。

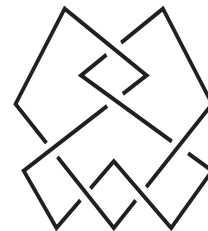


図 7

(解答)

まとめ

空間図形は投影図の特徴を明らかにすることで、その性質を調べることができる。

- 教師の指導・援助
- ・自己紹介。

- ・結び目を配布する。
- ・結び目の説明を行う。
- ・結び目を提示し、その投影図の描き方及び注意点を説明する。
- ・結び目を作るための道具（針金入りシリコンチューブ）を配布する。
- ・平面図を観察することによる、針金入りシリコンチューブを用いた結び目の作成を生徒に指示する。
- ・理解が困難となっている生徒には完成した結び目の例を見せ作成を促す。
- ・結び目の3彩色可能性の調べ方を説明する。
- ・結び目の3彩色可能性がライデマイスター移動で変わらないことを説明する。
- ・三葉結び目が3彩色可能であることを示す。
- ・追加課題の結び目を配布しほどこけないことの確認を行う。

この授業では実際に空間図形を作成する作業を取り入れている。数学においてこのような活動を体験することはあまりなく新鮮であり、生徒の関心を高めることができると考える。

はじめに結び目を観察しながらその投影図（立面図と平面図）を考える。その2つの投影図の違いを考えることを通して、結び目を平面図形としてとらえる場合の多様さを感じることができると考える。

本作業における操作活動とは、平面図より針金入りシリコンチューブを用いて結び目を作ること、実物を見てその投影図を描くこと、自明な結び目を自由に作成すること、及び図式に色を塗ることである。

実物を用いて作業をする時間を十分にとり、3彩色可能であることがほどこけないことの根拠となっていることに気付くことを目標としている。授業の最後に3彩色可能性の追加問題を提示し、3彩色可能性から結び目がほどこけないことを示す活動を加えた。これは、3彩色可能性を用いて、自分で問題を解決するこ

とで、授業に対する達成感を生徒が味わえることを意図している。

## 7. 実践結果

以下のとおりに実践を行った。

場所：久留米工業高等専門学校

日時：平成24年8月20日、21日

参加生徒：中学生1～3年生47名

補助学生：2名

### (1) 活動の様子

授業計画は6節で述べたとおりである。針金入りシリコンチューブをそれぞれ一本ずつ配布した。個々に結び目の投影図から結び目を作成した。（写真2, 3, 4）



写真2



写真3



写真4

(操作活動について)

平面図を見て針金入りシリコンチューブを使って結び目を作り，ほどけるか調べてもらったが，生徒は実際に図式を立体化することでほどけるかどうかの実験を行い，楽しんでいたように感じられた。

(課題設定及び作業について)

結び目の図をいくつか描き，その違い等を自由に記述してもらう課題では，答えが複数出てくるようなオープンエンドの問題を意識した出題を行った。答えを一意的に求める問題に慣れた生徒にとっては，若干戸惑いが感じられ，解答するのに時間がかかったが，様々な興味深い解答が得られた。(写真5)

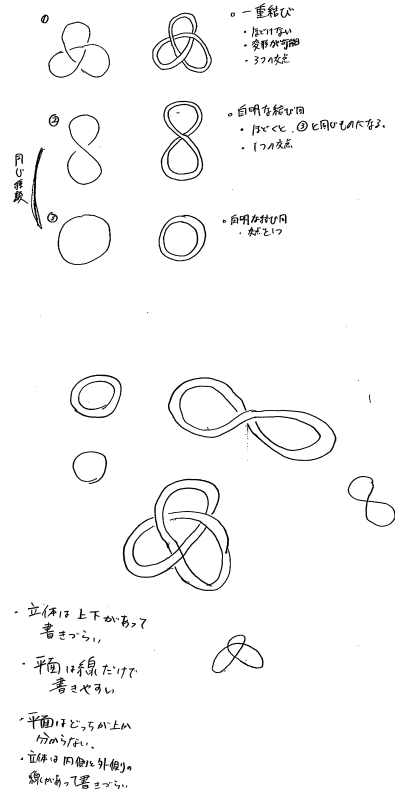
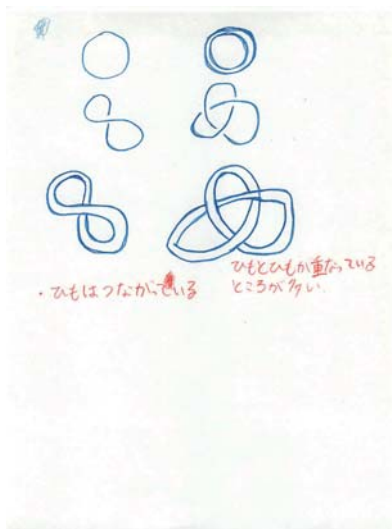


写真5

また，具体的な課題を与えて，ライデマイスター移動により3彩色可能性が変わらないことを体験してもらった。複数回の変形を必要としたため，十分な理解を得られない生徒もいたが，正答を導いた生徒は追加課題に取り組むなど，意欲的な姿勢がみられた。発展的な学習として，高校の内容である対偶の説明を行い，「ほどける結び目は3彩色不可能」の対偶である「3彩色可能な結び目はほどけない」の導出を行った。そのことを用いて，「三葉結び目はほどけない」ことを説明した。3彩色不可能な結び目は，ほどけるものとほどけないものがあり，この方法ではほどけるかどうか分からない場合があることを説明した。

## 8. 実践結果と考察

授業後にアンケートを実施した。その回答をもとに本授業のねらいの達成度，及びその考察を行う。

### (1) 生徒の感想

以下，生徒からの感想をまとめておく。

・結び目がほどけるかどうか見分ける方法が分かりました。

・今まで結び目が数学に関係するとは知らなかったのでおどろきました。とてもおもしろかったです。

・結び目についての話がよく分かりました。

・初めてする内容だったけど，楽しくできた。

・難しかったけど最後まで取り組めたのでよかったです。

・あまりきにしていなかった物が，こうして，ちょっと考えるだけでおもしろくなってよかったです。

・普段，結び目は気にしないが，これを機会に少し気にしながら結び目をつくろうと思いました。

・どんなにねじれ方が難しくても，規則を使えば，ほどけることが分かった。

・今までは結び目はほどけるか，ほどけないかは，よく考えてみないと分からなかったけど，3彩色のことが分かるようになると，ほどけるか，ほどけないかがすぐ分かるようになったのですごかったです。

・数学に対して見方や考え方を変えたら，こんなにおもしろくなるとは思わなかった。

・結び目がほどけるか，ほどけないかで，ここまで考えられる，という事に驚きました。

・結び目が数学と関係あるということが驚きでした。

・「3彩色を使うだけでほどける，ほどけないが分かるというのが分かる」ということを利用したい。

### (2) アンケートの質問項目とその結果

#### 1. 講義の内容はどうでしたか

よく理解できた …………… 16人

だいたい理解できた …………… 22人

少しだけ理解できた …………… 9人

ほとんど理解できなかった …… 0人

2. 計算や実習のレベルはどうでしたか  
かなり難しかった …………… 8人

少し難しかった …………… 21人

普通 …………… 14人

少し簡単だった …………… 3人

かなり簡単だった …………… 1人

3. 数学講座の内容はどうでしたか

たいへん有意義だった …………… 19人

有意義だった …………… 25人

あまり役に立たなかった …………… 1人

わからない …………… 2人

4. 数学講座を受講しての満足度を教えて下さい

十分満足した …………… 26人

おおむね満足した …………… 15人

普通 …………… 5人

あまり満足できなかった …………… 1人

全く満足できなかった …………… 0人

### (3) ねらいの達成度

今回の授業におけるねらいである「身の回りにあるものを空間図形としてとらえ，空間図形の平面への投影図を通して，空間図形の性質を理解できる」について達成できたかどうか考察する。

題材が結び目という身近なものであったため，生徒はすぐにこの教材に興味・関心を持ち，積極的に活動した。結び目をいろいろな角度から観察し，投影図を描き違いを見出す姿が見られた。また，「3彩色のことが分かるようになると，ほどけるか，ほどけないかがすぐ分かるようになったのですごかったです」という生徒の言葉があったことから，このね

らいについて達成できたと考える。

### 9. これまでの実践例

結び目を用いた教育研究プロジェクトが2005年より5年間、大阪で行われている。(参考文献 [1], [2], [3]) その中での実践例について簡単に述べる。特に参考文献 [2] においては3彩色可能性を用いた高等学校での実践例がある。プロジェクトにおける実践例においては、モールやひもを用いて生徒は結び目を作っているが、本授業では、生徒が結び目及び投影図の作成をよりしやすくするため、針金入りシリコンチューブを考案し、それを用いた結び目の作成を提案した。

また、参考文献 [7] においても3彩色可能性に関する説明を行っているが短時間であったため、本授業では3彩色可能性に内容を絞り、授業の構成を行った。

### 10. 今後の課題

補助学生の感想として、以下のようなものがあつた。

- ・最後のまとめをもっと詳しくやったほうが良いのではと思った。

- ・班に一つずつ配ってた結び目の見本は、もう少し大きい方がいいと思った。

今回の授業は1時間しかなかったこともあり、まとめや追加課題を行う時間を十分に取ることができず、学んだことの有用性を確認することがあまり出来なかった。そのことから、生徒が授業で学んだことを生かせるような授業の開発(3時間程度の構成)を行いたいと考える。また、授業において使用する道具についても、生徒の学習にとって効果的になるように工夫をしていきたいと考える。

### 11. 謝辞

実践授業を行う上で補助をして頂いた、久留米工業高等専門学校、材料工学科5年 森彩奈さんと生物応用化学科4年 平山 亜理沙さんに感謝する。

### 12. 参考文献

[1] 河内明夫・柳本朋子編, 2005年, 「結び目の数学教育」への導入 小学生・中学生・高校生を対象として, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成(大阪市立大学)」における教育活動 研究報告書 第1号.

[2] 河内明夫・柳本朋子編, 2007年, 「結び目の数学教育」への導入 小学生・中学生・高校生を対象として, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成(大阪市立大学)」における教育活動 研究報告書 第2号.

[3] 河内明夫・柳本朋子編, 2009年, 「結び目の数学教育」への導入 小学生・中学生・高校生を対象として, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成(大阪市立大学)」における教育活動 研究報告書 第3号.

[4] 鈴木晋一, 1991年, 結び目理論入門, サイエンス社.

[5] 村上順, 2000年, 結び目と量子群(すうがくの風景), 朝倉書店.

[6] 村上斉, 1990年, 結び目のはなし, 遊星社.

[7] 宮地俊彦, 中坊滋一, 酒井道宏, 2010年, 久留米高専における中学生向け数学公開講座の取り組みと今後の課題, 久留米高専紀要第25巻第2号, pp. 19-24.