

## サイコロを使ったゲームにおいて場合の数について考察する教材の提案

浅井寛隆<sup>1</sup>, 愛木豊彦<sup>2</sup>

本論文で, サイコロを使って二人で対戦するゲームにおいて, 場合の数に着目し勝敗について考察する授業を提案する。その授業では, 不確定な事象において, 場合の数を表や樹形図を用いて調べ, 物事を判断していけるようになることをねらいとしている。ここでは, その授業の内容と実践結果について報告する。

<キーワード>サイコロ, 場合の数, 樹形図, 表, 正四面体

### 1. はじめに

2012年度から中学校で本格実施となった学習指導要領 [1] において, 「資料の活用」が新たに領域として加わった。

このことを受け, [2] でこの領域に関する教材の開発について報告した。[2] の題材は, ゲームに勝てるようなサイコロ作りである。この教材では, 実際にサイコロを作り, 試行の結果から, 資料となるデータを集め, そのデータから, ゲームに勝てるサイコロの形を追究した。

今回は, ゲームに勝てるかどうかを試行の結果から判断するのではなく, 「表や樹形図を用いて, 順序よく整理して調べること」をもとに考察することを題材とした。このような「順序良く整理して調べること」を活用することで, 場合の数の理解を深められると考えたからである。この授業で扱うゲームにおいて, 2節で詳しく述べるが, 場合の数を調べることで意外と思われる結果が生じる。そのような驚きを経験することで, 場合の数を調べることに對する興味・関心を高めたいと考えたのも, この題材を選んだ理由の一つである。また, ただ場合の数を数えるだけでなく, このゲームが公平であるかどうかを, 場合の数を数えることによって判断する。この活動

を通して, 場合の数を調べることの有用性を伝えたいとも考え, 本授業を開発した。

### 2. 授業の概要

#### 2.1. 題材について

本論文で示す授業の題材は次に示すサイコロを使ったゲームである。「二人でサイコロを振り, 自分の出た目の数字から相手の出た目の数字を引いた値を得点とし, 得点の大きいほうを勝ちとする。ただし, サイコロは正四面体の各面に1から4の数字を合計が10になるように数字を一つずつ(重複を許して)かいたものを使用する。出た目は下になった面の数字とする。」

正四面体のサイコロを使用したのは, どの面も同様に確からしく出る立体であることと, 面が四つであるため場合の数が膨大な数にならないからである。実際, 普通の立方体のサイコロを使うと, 以下の活動において調べる場合の数が中学生には多すぎると判断した。また, 正四面体のサイコロを使用するため, 出た目を上になった面とすると, 面を特定することができないため, 下になった面の数字を出た目とすることにした。

問題の条件を満たすような正四面体の各面に書く数字の組み合わせは, 1144, 1234, 1333, 2224, 2233 の五種類である。

<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>日本女子大学理学部

それぞれのサイコロを組み合わせたときの勝敗について考える。

以下の表では、左のサイコロからみた勝敗を勝ち、負けは×、引き分けは△として表した。

(1)1144 と 1234 を使用した場合

	1	2	3	4
1	△	×	×	×
1	△	×	×	×
4	○	○	○	△
4	○	○	○	△

1144 が勝つのは6通り、1234 が勝つのは6通り、引き分けるのが4通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、このゲームは公平である。

(2)1144 と 1333 を使用した場合

	1	3	3	3
1	△	×	×	×
1	△	×	×	×
4	○	○	○	○
4	○	○	○	○

1144 が勝つのは8通り、1333 が勝つのは6通り、引き分けるのが2通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合は、1144 が勝ちやすい。

(3)1144 と 2224 を使用した場合

	2	2	2	4
1	×	×	×	×
1	×	×	×	×
4	○	○	○	△
4	○	○	○	△

1144 が勝つのは6通り、2224 が勝つのは8通り、引き分けるのが2通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、2224 が勝ちやすい。

(4)1144 と 2233 を使用した場合

	2	2	3	3
1	×	×	×	×
1	×	×	×	×
4	○	○	○	○
4	○	○	○	○

1144 が勝つのは8通り、2233 が勝つのは8通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、このゲームは公平である。

(5)1234 と 1333 を使用した場合

	1	3	3	3
1	△	×	×	×
2	○	×	×	×
3	○	△	△	△
4	○	○	○	○

1234 が勝つのは6通り、1333 が勝つのは6通り、引き分けるのが4通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、このゲームは公平である。

(6)1234 と 2224 を使用した場合

	2	2	2	4
1	×	×	×	×
2	△	△	△	×
3	○	○	○	×
4	○	○	○	△

1234 が勝つのは6通り、2224 が勝つのは6通り、引き分けるのが4通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、このゲームは公平である。

(7)1234 と 2233 を使用した場合

	2	2	3	3
1	×	×	×	×
2	△	△	×	×
3	○	○	△	△
4	○	○	○	○

1234 が勝つのは6通り、2233 が勝つのは6通り、引き分けるのが4通りである。よって、こ

の二つのサイコロを使用した場合、このゲームは公平である。

(8)1333 と 2224 を使用した場合

	2	2	2	4
1	×	×	×	×
3	○	○	○	×
3	○	○	○	×
3	○	○	○	×

1333 が勝つのは9通り、2224 が勝つのは7通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、1333 が勝ちやすい。

(9)1333 と 2233 を使用した場合

	2	2	3	3
1	×	×	×	×
3	○	○	△	△
3	○	○	△	△
3	○	○	△	△

1333 が勝つのは6通り、2233 が勝つのは4通り、引き分けるのが6通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、1333 が勝ちやすい。

(10)2224 と 2233 を使用した場合

	2	2	3	3
2	△	△	×	×
2	△	△	×	×
2	△	△	×	×
4	○	○	○	○

2224 が勝つのは4通り、2233 が勝つのは6通り、引き分けるのが6通りである。よって、この二つのサイコロを使用した場合、2233 が勝ちやすい。

以上の結果を左のサイコロからみて、勝ちやすいときを ⊙、負けやすいときを ●、公平であるときを △ としてまとめたものが、次の表である。

	1144	1234	1333	2224	2233
1144	△	△	⊙	●	△
1234	△	△	△	△	△
1333	●	△	△	⊙	⊙
2224	⊙	△	●	△	●
2233	△	△	●	⊙	△

(表1)

この結果から、出る目の期待値はどのサイコロにおいても2.5であるが、サイコロの組み合わせによって、このゲームは公平であったり、不公平であったりする。また、どちらか一方が1234のサイコロを使用したときには、このゲームは公平である。

ここで、どちらか一方が1234のサイコロを使用すると、ゲームが公平であることを式を用いて説明する。

サイコロAについて、1の目の個数を  $a$ 、2の目の個数を  $b$ 、3の目の個数を  $c$ 、4の目の個数を  $d$  とする。目の個数は4つより、

$$a + b + c + d = 4 \tag{1}$$

目の和が10より、

$$a + 2b + 3c + 4d = 10 \tag{2}$$

(2)-(1)より、

$$b + 2c + 3d = 6 \tag{3}$$

1234のサイコロに対して、サイコロAの1の目が勝てるのは0通り、2の目が勝てるのは1通り、3の目が勝てるのは2通り、4の目が勝てるのは3通りである。つまり、(3)の左辺はサイコロAが1234のサイコロに勝つ場合の数を表している。次に引き分ける場合の数を求める。サイコロAが1234のサイコロの1の目と引き分けるのは  $a$  通り、2の目と引き分けるのは  $b$  通り、3の面が引き分けるのは  $c$  通り、4の目と引き分けるのは  $d$  通りである。(1)より引き分けとなる場合の数は4通りであ

る。従って、すべての場合の数は16通りなので、どちらか一方が1234のサイコロを使用したときには、勝つ場合が6通り、負ける場合が6通り、引き分けの場合が4通りとなり、このゲームは公平であるといえる。

また、このことはサイコロが六面や八面などになってもいえる。そのために、どちらか一方が $12 \cdots n$ の目のサイコロを使用すると、ゲームが公平であることを式を用いて説明する。

#### 定理1

一方が $12 \cdots n$ のサイコロを使用し、もう一方が使用するサイコロAの目を $x_1, \dots, x_n$ とする。ただし、 $\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n x_k$ である。このとき、このゲームは公平である。

(証明) サイコロAの1の目の個数を $a_1$ 、2の目の個数を $a_2, \dots, n$ の目の個数を $a_n$ とする。

目の個数は $n$ なので、

$$\sum_{k=1}^n a_k = n \quad (4)$$

仮定より、目の和は、

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5)$$

(5)-(4)より、

$$\sum_{k=1}^n (k-1)a_k = \frac{n(n-1)}{2} \quad (6)$$

$12 \cdots n$ の目のサイコロに対して、サイコロAの1の目が勝てるのは0通り、2の目が勝てるのは1通り、 $\dots, n$ の目が勝てるのは $n-1$ 通りである。つまり、(6)の左辺はサイコロAが $12 \cdots n$ のサイコロに勝つ場合の数を表している。次に引き分ける場合の数を求める。サイコロAが $12 \cdots n$ の目のサイコロの1の

目と引き分けるのは $a_1$ 通り、2の目と引き分けるのは $a_2$ 通り、 $\dots, n$ の目と引き分けるのは $a_n$ 通りである。(4)より引き分けとなる場合の数は $n$ 通りである。すべての場合の数は $n^2$ 通りなので、サイコロAが負ける場合の数は

$$n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

よってサイコロAが、 $12 \cdots n$ の目のサイコロに対して、勝つ場合の数と負ける場合の数が等しくなる。

以上より、このゲームは公平であるといえる。(証明終)

どちらも1234のサイコロを使用しなくても公平になる場合や、その他のサイコロで不公平になる場合の考察は今後の研究課題である。

次に、ゲームのルールを「まず、二人でサイコロを振り、自分の出た目の数字から相手の出た目の数字を引いた値を得点とする。そして、お互いがもう一度サイコロを振り、同じように得点を定める。そして、二回の合計得点の大きいほうを勝ちとする。ただし、サイコロは正四面体の各面に1から4の数字を合計が10になるように数字を一つの面に一つずつかいたものを使用する。出た目は下になった面の数字とする。」と変えた場合について考察する。

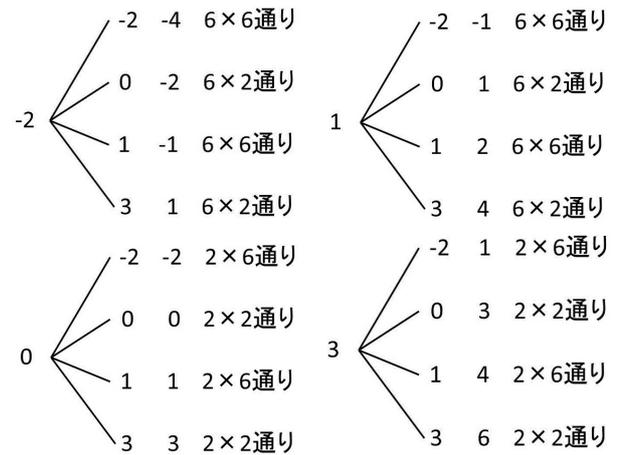
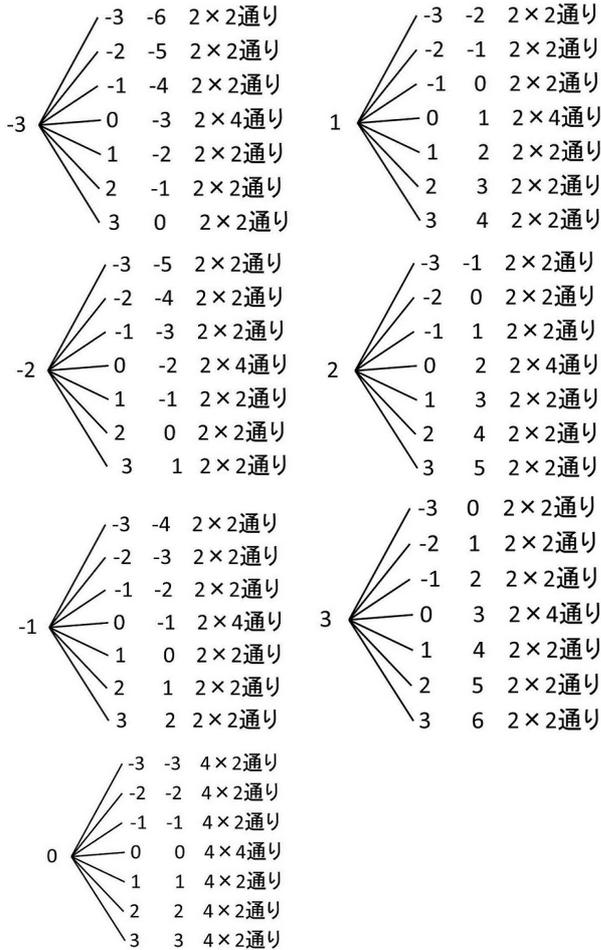
ここでも、いろいろなサイコロを組み合わせたときの勝敗について考察する。

(1)1144と1234を使用した場合

1144からみた得点表は以下ようになる。

	1	2	3	4
1	0	-1	-2	-3
1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0
4	3	2	1	0

得点に着目し、樹形図をかくと



1144 が勝つ場合は 120 通り，1234 が勝つ場合は 132 通り，引き分ける場合は 4 通りである。よって，1144 と 1234 のサイコロを使用した場合，このゲームは 1234 が勝ちやすい。

(3)1144 と 2224 を使用した場合

1144 からみた得点表は以下ようになる。

	2	2	2	4
1	-1	-1	-1	-3
1	-1	-1	-1	-3
4	2	2	2	0
4	2	2	2	0

1144 が勝つ場合は 108 通り，1234 が勝つ場合は 108 通り，引き分ける場合は 40 通りである。よって，1144 と 1234 のサイコロを使用した場合，このゲームは公平である。

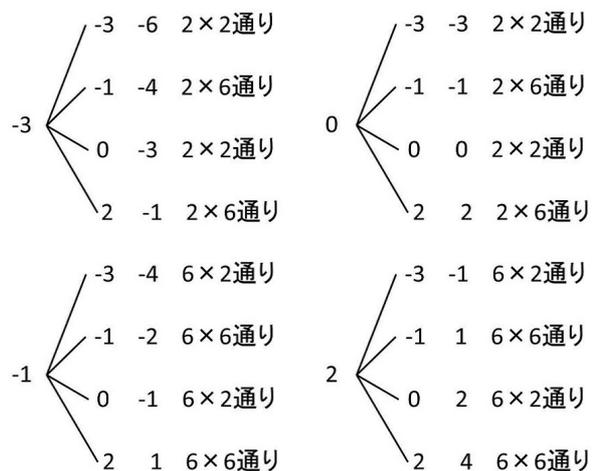
(2)1144 と 1333 を使用した場合

1144 からみた得点表は以下ようになる。

	1	3	3	3
1	0	-2	-2	-2
1	0	-2	-2	-2
4	3	1	1	1
4	3	1	1	1

得点に着目し，樹形図をかくと

得点に着目し，樹形図をかくと



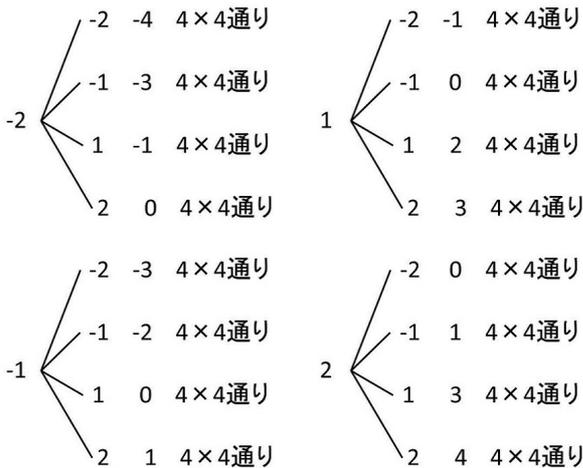
1144 が勝つ場合は 132 通り，2224 が勝つ場合は 120 通り，引き分ける場合は 4 通りである。よって，1144 と 2224 のサイコロを使用した場合，このゲームは 1144 が勝ちやすい。

(4)1144 と 2233 を使用した場合

1144 からみた得点表は以下のようになる。

	2	2	3	3
1	-1	-1	-2	-2
1	-1	-1	-2	-2
4	2	2	1	1
4	2	2	1	1

得点に着目し，樹形図をかくと



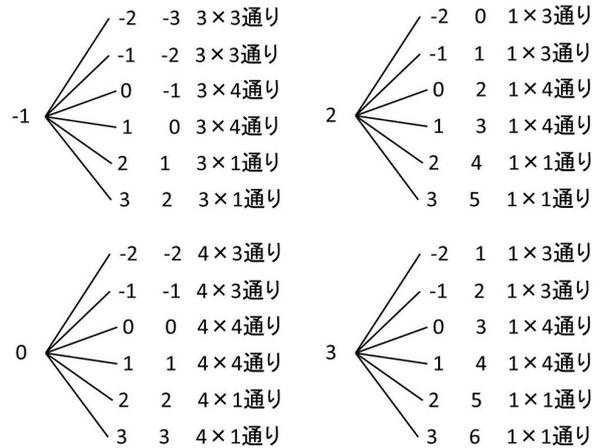
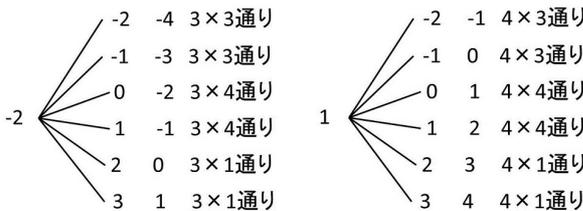
1144 が勝つ場合は 96 通り，2233 が勝つ場合は 96 通り，引き分ける場合は 64 通りである。よって，1144 と 2233 のサイコロを使用した場合，このゲームは公平である。

(5)1234 と 1333 を使用した場合

1234 からみた得点表は以下のようになる。

	1	3	3	3
1	0	-2	-2	-2
2	1	-1	-1	-1
3	2	0	0	0
4	3	1	1	1

得点に着目し，樹形図をかくと



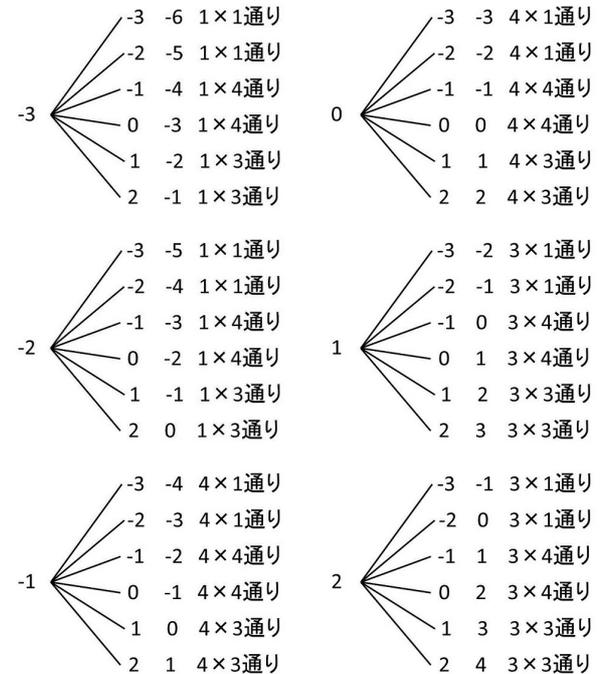
1234 が勝つ場合は 102 通り，1333 が勝つ場合は 108 通り，引き分ける場合は 46 通りである。よって，1234 と 1333 のサイコロを使用した場合，このゲームは 1333 が勝ちやすい。

(6)1234 と 2224 を使用した場合

1234 からみた得点表は以下のようになる。

	2	2	2	4
1	-1	-1	-1	-3
2	0	0	0	-2
3	1	1	1	-1
4	2	2	2	0

得点に着目し，樹形図をかくと



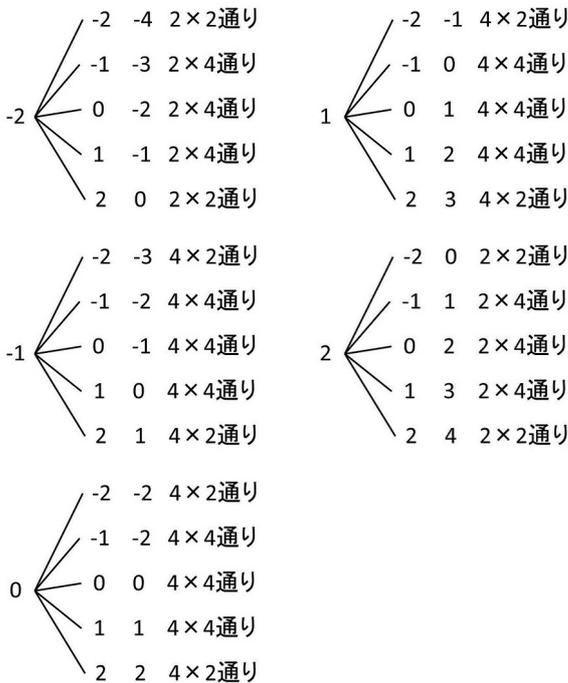
1234 が勝つ場合は 108 通り，2224 が勝つ場合は 102 通り，引き分ける場合は 46 通りである。よって，1234 と 2224 のサイコロを使用した場合，このゲームは 1234 が勝ちやすい。

(7)1234 と 2233 を使用した場合

1234 からみた得点表は以下ようになる。

	2	2	3	3
1	-1	-1	-2	-2
2	0	0	-1	-1
3	1	1	0	0
4	2	2	1	1

得点に着目し，樹形図をかくと



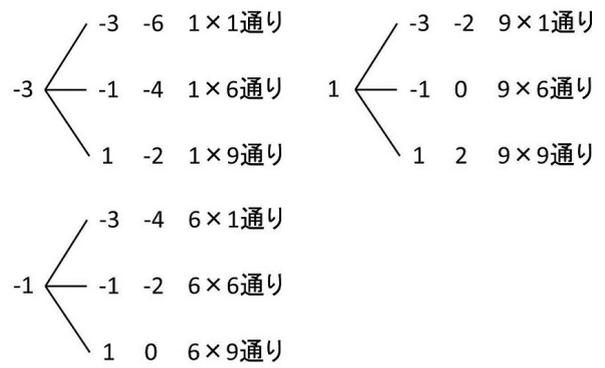
1234 が勝つ場合は 100 通り，2233 が勝つ場合は 100 通り，引き分ける場合は 56 通りである。よって，1234 と 2233 のサイコロを使用した場合，このゲームは公平である。

(8)1333 と 2224 を使用した場合

1333 からみた得点表は以下ようになる。

	2	2	2	4
1	-1	-1	-1	-3
3	1	1	1	-1
3	1	1	1	-1
3	1	1	1	-1

得点に着目し，樹形図をかくと



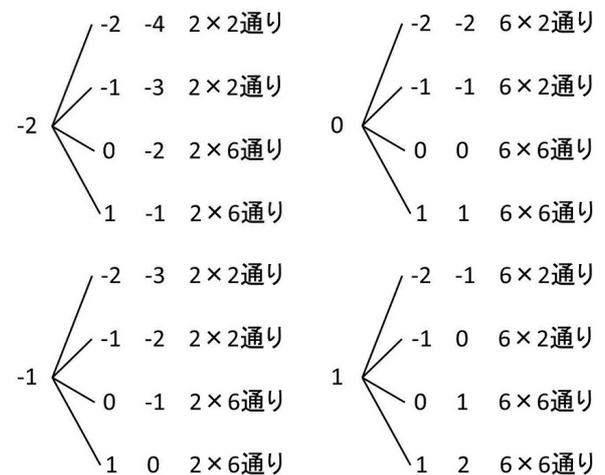
1333 が勝つ場合は 81 通り，2224 が勝つ場合は 67 通り，引き分ける場合は 108 通りである。よって，1333 と 2224 のサイコロを使用した場合，このゲームは 1333 が勝ちやすい。

(9)1333 と 2233 を使用した場合

1333 からみた得点表は以下ようになる。

	2	2	3	3
1	-1	-1	-2	-2
3	1	1	0	0
3	1	1	0	0
3	1	1	0	0

得点に着目し，樹形図をかくと



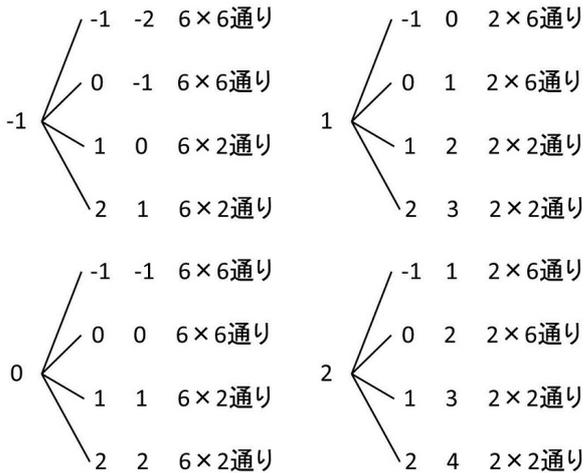
1333 が勝つ場合は 108 通り，2233 が勝つ場合は 88 通り，引き分ける場合は 60 通りである。よって，1333 と 2233 のサイコロを使用した場合，このゲームは 1333 が勝ちやすい。

(10)2224 と 2233 を使用した場合

2224 からみた得点表は以下のようになる。

	2	2	3	3
2	0	0	-1	-1
2	0	0	-1	-1
2	0	0	-1	-1
4	2	2	1	1

得点に着目し，樹形図をかくと



2224 が勝つ場合は 88 通り，2233 が勝つ場合は 108 通り，引き分ける場合は 60 通りである。よって，2224 と 2233 のサイコロを使用した場合，このゲームは 2233 が勝ちやすい。

以上の結果をまとめたものが，次の表である。

	1144	1234	1333	2224	2233
1144	△	△	●	◎	△
1234	△	△	●	◎	△
1333	◎	◎	△	◎	◎
2224	●	●	●	△	●
2233	△	△	●	◎	△

(表 2)

表 1 と表 2 から，一回の得点で勝ち負けを決めるときと，二回の合計得点で勝ち負けを決めるときでは勝ちやすい場合，負けやすい場合，引き分けやすい場合が変わることがわかる。このことを，生徒は意外と

感じ，驚くことで，この題材に興味・関心をもつと考えた。

### 2.2 題目の設定理由と授業のねらい

前節で示したゲームは，表や樹形図を使って，起こり得る場合の数を考えることで公平であるかどうかを考察することができる。場合の数の学習で取り扱われる題材において，起こり得る場合のすべての数は工夫をしなくても求められる程度に少ないものがほとんどである。教科書 [3] では，確率の求め方の工夫として場合の数を調べる場面をみると，最も多い場合でもサイコロを 2 つ振る場合の 36 通りである。このゲームでは，起こり得るすべての場合の数は多く，表や樹形図などを使い，効率よくかつもれなく調べることが大切となってくる。また，調べる過程の中で，樹形図や表のそれぞれのよさを感じられる。そして，出る目の平均が同じであるにも関わらず，公平であるとはいえない場合があることは，期待値を学習していない中学生にとっても面白いのではないかと考える。さらに，ルールが変わると判断が異なる場合があるということを学習することで，場合の数を一つ一つ調べることの必要性を感じられるのではないかと考える。

以上の理由により，サイコロを用いるゲームを題材とする授業を実践することとした。そして，授業のねらいを次のように設定した。

- (1) 図や表を用いて，起こり得る場合をもれなく数えることができる。
- (2) 確率の考えかたを用いて，公平であるかどうかを判断することができる。
- (3) 不確定な事象の考察を通して，確率の考え方の有用性がわかる。

### 2.3 授業の流れ

この授業は 2 時間構成である。

< 1 時間目 >

(1) ゲーム・課題設定

まず、ゲームの内容とルールを紹介する。「二人でサイコロを振り、自分の出た目の数字から相手の出た目の数字を引いた値を得点とし、得点の大きいほうを勝ちとする。ただし、サイコロは正四面体の各面に1から4の数字を合計が10になるように数字を一つずつかいたものを使用する。出た目は下になった面の数字とする。」

まず、ゲームが公平であるといえるかどうかを考えながら、ペアになって実際にゲームを行うとともに記録をとる。ここでは、授業者が事前に工作用紙で作った1234と2224の正四面体のサイコロを使用する。ゲームを終えた生徒から、班で記録をまとめ、それを総合して、クラス全体としての1234と2224の勝ち数を示す。実際にゲームをするだけでは公平であるかどうか判断することができないことと、ルールに適した他のサイコロがあるかもしれないことを確認し、課題として「どの二つのサイコロを使っても、このゲームが公平であるといえるかどうか考えよう。」を提示する。

(2) 個人追究

学習プリントに、樹形図や表などをかいて調べていく。5×5の表(表3)を用意しておく、生徒が自由に使用できるようにする。すべての場合を調べられるようにする。

フェア-? アンフェア-? 学習記録


(表3)

(3) 交流・次回の説明

調べたことをグループ内で交流する。その際、必ず一人一回は発言するようにする。グループでの交流が終わったら、授業者が全体に対し、サイコロが何種類あるか、どの二つを使っても公平であるといえるかを問いかけながら確認し、それぞれのサイコロの組み合わせの勝敗をまとめた表を示す。不公平な場合があるから、「どの二つを使っても公平である」とはいえないことを改めて確認する。「図や表を用い、すべての場合を調べ、確率を考えることで、公平であるかどうかを判断することができる。」ということの本時のまとめとし、次回はゲームのルールを変えたらどうなるかを考えるということ伝え、本時の授業を終える。

< 2 時間目 >

(1) ゲーム・課題設定

まず、ゲームの内容とルールを紹介する。「二人でサイコロを振り、自分の出た目の数字から相手の出た目の数字を引いた値を得点とし、二回の合計得点の大きいほうを勝ちとする。ただし、サイコロは正四面体の各面に1から4の数字を合計が10になるように数字を一つずつかいたものを使用する。出た目は下になった面の数字とする。」今回のルールでは、二回の合計得点という部分が変わったということを確認し、前時の学習から公平であるといえるかどうか、不公平であるならどちらが勝てそうかを予想させる。この二つのサイコロを使用した場合に、ゲームが公平であるといえるかどうかを考えながら、ペアになって実際にゲームを行う。ここでは、授業者が事前に工作用紙で作った1144と1333の正四面体のサイコロを使用する。実際にゲームをするだけでは公平であるかどうか判断することができないことと、ルールに適した他のサイコロがあるかもしれないことを確認し、課題として「どの二つのサイコロを使っても、このゲームが公平であるといえるかどうか考えよう。」を提示する。

## (2) 個人追究

まずは、1144 と 1333 のサイコロを使用した場合について考察する。班ごとになり、考察を始める。17 × 17 の表を記入したプリントを用意し、生徒が使用できるようにする。また、自分で考えを進められなくなった生徒には、ヒントプリントを渡す。このヒントプリントには、一回目が0点のときの樹形図の例がかかれており、生徒が樹形図を使って考察する手がかりを示した。早く終わった生徒は、他のサイコロの組み合わせを考察するよう指示する。

## (3) 交流・まとめ

調べたことをグループ内で交流する。その際、必ず一人一回は発言するようにする。全体として、前回のルールでは1144が勝ちやすかったが、今回は1333が勝ちやすくなったということを確認し、ルールが変わると判断が異なる場合があるということ伝える。その後、それぞれのサイコロの組み合わせを考えたときをまとめた表を示す。ルールによって判断が異なる場合があるが、「図や表を用い、すべての場合を調べ、確率を考えることで、公平であるかどうかを判断することができる。」ということ伝え、このことを今回の授業のまとめとする。

## 3 実践結果

講座名：「フェア・アンフェア」

場所：岐阜大学教育学部附属中学校

対象：中学3年生

1時間目 実施日：平成24年2月29日（水）  
第6校時

2時間目 実施日：平成24年3月1日（木）  
第4校時

1時間目 実施日：平成24年3月1日（木）  
第5校時

2時間目 実施日：平成24年3月6日（火）  
第1校時

## 3.1 活動の様子

## 1時間目

## (1) ゲーム・課題設定

ゲームの内容とルールを提示し、実際にゲームを行った。どの生徒もゲームの内容とルールを理解し、楽しくゲームを行うことができていた。そして、実際にゲームをするだけでは、公平であるかどうかを判断できないことが理解できていた。

## (2) 個人追究

樹形図や表で考えることができていた。全部で10通り調べることになるので、表で調べる生徒が多かった。樹形図を使って調べていた生徒の中には、途中から樹形図よりも表のほうが調べやすいと表で調べることに切り替えていた。どの生徒も不公平な場合があることを見つけることができていた。

## (3) 交流・まとめ

ほとんどの生徒が不公平であるサイコロの組み合わせを発見できていた。次回はルールを変えたらどうなるかを考えるということ伝え、本時を終えた。

## 2時間目

## (1) 課題設定

ゲームの内容とルール、ルールの変更点を確認した。公平でないと予想している生徒がほとんどであった。どちらが勝ちそうかを尋ねると、前時の結果から1144が勝ちやすいと予想する生徒が多かった。

## (2) 個人追究

表で調べている生徒が多かった。樹形図で調べている生徒の中には、同じ樹形図ができている部分に気づき、場合の数の積の法則を利用していった。また、分からない生徒はグループ内で相談しながら追究をしていた。

## (3) まとめ

場合の数が多いため、結論を導くところまでいかなかった生徒がいた。不公平であると分かった生徒の中には、前時と逆転していることに気づき驚いている生徒もいた。

4. 考察

授業後に確認問題とアンケートを実施した。出題した確認問題とは以下である。

「二人でサイコロを振り、大きい目が出たほうが勝ちとします。ただし、サイコロは立方体の六面に1から6の数字を合計が21になるように数字を一つずつかいたものとする。このとき、どちらのサイコロを使いますか。」

112566 サイコロ ・ 224445 サイコロ

- 112566 サイコロ 46名
- 224445 サイコロ 8名
- どちらも同じ 1名
- 無回答 4名

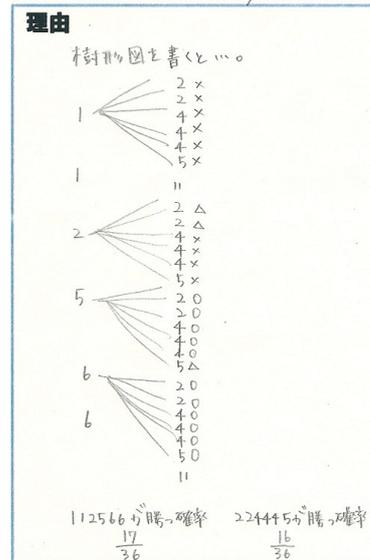
112566 を選んだ理由

- 大きい数字の目がある
- $\frac{1}{3}$  の確率で6が出る

理由

	1	1	2	5	6	6
2	0	0	△	x	x	x
2	0	0	△	x	x	x
4	0	0	0	x	x	x
4	0	0	0	x	x	x
5	0	0	0	△	x	x
5	0	0	0	△	x	x

$\frac{16}{36} = \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$   
224445 の勝つ確率  $\frac{4}{9}$   
よって 112566



224445 を選んだ理由

- 4が多いから
- 場合の数の数え間違い

どちらも同じを選んだ理由

- 場合の数の数え間違い

感想の一部を紹介する。

- 確率は苦手。
- 面倒くさい。
- 分からないところがたくさんあった。
- 自分で実際に考えて調べることができた。
- 表や樹形図を使うことで、膨大な数を扱うときも誤りなく処理できると分かった。
- 一回の得点のときと二回の合計得点とで結果が変わることにびっくりした。
- かいてある目によって、勝敗がそれぞれ違うことが分かった。

- 方法や条件を変えるだけで結果が変わってしまふことにびっくりした。
- 意外性があった。
- 地道な作業だったが、分かったときの達成感が味わえて、数学の面白さを感じた。
- 確率を利用することで、どちらが勝ちやすいかが分かった。このことを使っていきたい。
- 確率がいろいろな場面で応用できることが分かった。
- 一見公平そうでも、実は有利・不利があることが分かった。
- 日常でも、同じような確率に見せかけておいて異なる場合がいくつがあるかもしれない。
- 詐欺に遭わないように有効に利用していきたい。

本授業のねらい(1)(2)(3)の達成度について考察する。

#### (1) について

表や樹形図を使って場合の数を調べることができていた。しかし、場合の数が多い二時間目の内容では、粘り強く調べている生徒がいたが、数えるのを途中であきらめてしまう生徒もいた。起こり得る場合の数えもれがある生徒もいた。それでも、樹形図や表を使うことが、起こり得る場合をもれなく数える上で重要であるということに生徒が気づけたのではないかと考えられる。

#### (2) について

表や樹形図を使い、起こり得る場合を調べ、勝つ場合の数や負ける場合の数の大小をもとに、公平であるかどうかを判断することがで

きていた。中には、起こり得る場合の数をもとに、勝つ確率や負ける確率を求め、それをもとに公平であるかどうかを判断する生徒もいた。ほとんどの生徒が、勝つ場合の数と負ける場合の数が同じになれば公平といえることや、どちらかの勝つ場合の数が多いときは不公平であることを理解することができていた。

#### (3) について

実際にゲームをするだけでは公平であるかどうか分からないが、確率の学習をもとに考えることで公平であるかどうかを判断することができるということを多くの生徒が理解できたと考えられる。感想にもあったように、見た目や直感ではなく、確率の考え方を根拠に物事を判断していくことはいろいろな場面に応用できるというように、生徒が確率の有用性を多少なりとも感じられたのではないかと考えられる。

#### 5. 今後の課題

一つ目は、授業の改善である。二時間目の内容を面倒に感じている生徒が多くいた。そのことを踏まえ、教材の提示の仕方を工夫したり、個人ではなくグループで追究したりするなどの工夫が必要であると感じた。もう一度、今回の教材を見直し、生徒にとってより良いものにしていきたい。

二つ目は、教材についてである。一回の得点のときと、二回の合計得点のときとで結果が逆転したように、これを三回の合計得点、四回の合計得点、五回の合計得点とすると結果が変わることがあることは分かった。これをさらに六回の合計得点、七回の合計得点と増やしていったときにどうなるのか、そこに規則性はあるのかを考えていきたい。また、今回は樹形図や表を用いて考えたが、回数が増えたと起こり得る場合の数はより多くなっていく。樹形図や表を使うのではなく、計算で求めることができないか、一般的に表すことが

できないかを考えていきたい。

#### 引用文献

- [1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版株式会社.
- [2] 浅井寛隆, 愛木豊彦, 2012, サイコロゲームを題材とした教材開発と実践, 岐阜数学教育研究, 第11号, p.1-21.
- [3] 赤堀也ほか17名, 2012, 数学の世界2年, 大日本図書株式会社.

本時のねらい

図や表を用いて、すべての場合を調べ、確率を考えることで、公平であるかどうかを判断できる。

	学習活動と予想される生徒の姿	指導・援助の工夫																																																													
導入	<p>○本時の問題を提示し、課題づくりをする。</p> <p>二人でサイコロを振り、自分の出た目の数字から相手の出た目の数字を引いた値を得点とし、得点の大きいほうを勝ちとする。ただし、サイコロは正四面体の四面に1から4の数字を合計が10になるように数字を1つつかいたものを使用する。出た目は下になった面の数字とする。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・今回は1回勝負のゲームとする。</li> <li>・2人ペアを作り、10試合ゲームを行う。(2224と1234を与える)</li> <li>・グループごとに勝ち数を集計し、全体の勝ち数を提示する。</li> <li>・他のサイコロを与えられたとしても、公平なゲームであるといえるかを考える。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・異なる二つの正四面体サイコロを与える。</li> <li>・目の和が一定であることを強調する。</li> <li>・公平であるかどうかを考えながら、ゲームを行うように指示する。</li> <li>・全体として、どちらが何回勝ったかをまとめる。</li> </ul>																																																													
展開	<p>○課題を設定する。</p> <p>どの二つのサイコロを使っても、このゲームが公平であるといえるかどうか考えよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・サイコロのパターンを明らかにする。 ①(1144), ②(1234), ③(1333), ④(2224), ⑤(2233)</li> <li>・それぞれの組み合わせにして考える。 ①と②の場合</li> </ul> <p>すべてのパターンをかき出して考える</p> <p>(11)△ (12)× (13)× (14)×  (11)△ (12)× (13)× (14)×  (41)○ (42)○ (43)○ (44)△  (41)○ (42)○ (43)○ (44)△</p> <p>樹形図で考える</p> <p>表で考える</p> <table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>△</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td></tr> <tr><td>1</td><td>△</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td></tr> <tr><td>4</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>△</td></tr> <tr><td>4</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>△</td></tr> </table> <p>表にまとめる</p> <table border="1"> <tr><td></td><td>①</td><td>②</td><td>③</td><td>④</td><td>⑤</td></tr> <tr><td>①</td><td>△</td><td>△</td><td>○</td><td>×</td><td>△</td></tr> <tr><td>②</td><td>△</td><td>△</td><td>△</td><td>△</td><td>△</td></tr> <tr><td>③</td><td>×</td><td>△</td><td>△</td><td>○</td><td>○</td></tr> <tr><td>④</td><td>○</td><td>△</td><td>×</td><td>△</td><td>×</td></tr> <tr><td>⑤</td><td>△</td><td>△</td><td>×</td><td>○</td><td>△</td></tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>・公平であるかどうか考察する。</li> <li>・③と④では、③が勝つ確率が高い。</li> <li>・①と③では、①が勝つ確率が高い。よって公平でない</li> <li>・②を使うと、勝つ確率と負ける確率がすべて等しい。このときは公平といえる</li> </ul> <p>○班で交流する。</p>		1	2	3	4	1	△	×	×	×	1	△	×	×	×	4	○	○	○	△	4	○	○	○	△		①	②	③	④	⑤	①	△	△	○	×	△	②	△	△	△	△	△	③	×	△	△	○	○	④	○	△	×	△	×	⑤	△	△	×	○	△	<ul style="list-style-type: none"> <li>・表の用紙を用意しておく。</li> <li>・最初の段階で手が止まっている子には、サイコロの数字の組み合わせを考えさせる。</li> <li>・すべての組み合わせをかき出して考えている子に対しては、「起こり得る場合を調べるにはどんな工夫ができたか」などと問い、樹形図や表で考えられるように促す。</li> <li>・すべての組み合わせについて考えられるように指導する。</li> <li>・早く終わった子には、公平かどうか説明も書くように指導する。また、「どちらかが②を使うとしたら、公平といえるか、いえないか」など条件を変えた場合や他のサイコロの組み合わせの場合を考えさせる。</li> <li>・班交流では一人一回、必ず意見をいうように指導する。</li> </ul>
	1	2	3	4																																																											
1	△	×	×	×																																																											
1	△	×	×	×																																																											
4	○	○	○	△																																																											
4	○	○	○	△																																																											
	①	②	③	④	⑤																																																										
①	△	△	○	×	△																																																										
②	△	△	△	△	△																																																										
③	×	△	△	○	○																																																										
④	○	△	×	△	×																																																										
⑤	△	△	×	○	△																																																										
まとめ	<p>○まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・図や表を用い、すべての場合を調べ、確率を考えることで、公平であるかどうかを判断することができる。</li> <li>・次回はゲームのルールを変えたときにどうなるかを考えるということを伝え、2時間目につなげる。</li> </ul>	<p>【評価基準】</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・既習の内容を基にして、根拠を明確にして答えを導き出すとしたかをプリントから評価する。</li> </ul>																																																													

本時のねらい

図や表を使いすべての場合を調べ、確率を考えることで、公平であるかどうか判断できる。

	学習活動と予想される生徒の姿	指導・援助の工夫																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
導入	<p>○本時の問題を提示し、課題づくりをする。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>二人でサイコロを振り、自分の出た目の数字から相手の出た目の数字を引いた値を得点とする。二回の合計得点が高いほうを勝ちとする。</p> <p>ただし、サイコロは正四面体の四面に 1 から 4 の数字を合計が 10 になるように数字を 1 つずつかいたものを使用する。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 2人ペアを作り、ゲームを行う。(1144 と 1333 を与える)</li> <li>・ 全体でゲームを行い、公平であるといえそうか考える。</li> <li>・ 今回は 1144 と 1333 を使った場合を考える。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 前回とのルールの違いを強調する。</li> <li>・ 前回の結果表を見せる。</li> <li>・ 前回不公平とわかった二つの正四面体サイコロを与える。</li> <li>・ 得点の横に○×をかかせる。</li> <li>・ ○×でも引き分けにならない場合があることを確認する。</li> </ul>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
展開	<p>○課題を設定する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>どの二つのサイコロを使っても、このゲームが公平であるといえるかどうか考えよう。</p> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">得点表</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">樹形図で考える</p> </div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p style="text-align: center;">表で考える</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table> </div>		1	3	3	3	1	0	-2	-2	-2	1	0	-2	-2	-2	4	3	1	1	1	4	3	1	1	1		0	0	3	3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	3	3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	3	3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1	3	3	3	6	6	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	3	3	3	6	6	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 前回の学習で調べた得点の表を黒板に貼っておく。</li> <li>・ 前回の学習を思い出し、樹形図や表を用いて考えることができるように指導する。</li> <li>・ 手が止まっている生徒に対しては、ヒントカードを与える。</li> <li>・ 場合の数にもれがある生徒には、すべての場合の数(16×16=256)を考えさせ、気付かせる。</li> <li>・ 公平であるかどうか、その理由を学習プリントに書かせる。</li> <li>・ 早くできた生徒に対しては、「公平だった組み合わせは、今回も公平になるのか。1234 と 1333 を調べてみて。」などと声をかけ、他のサイコロの組み合わせの場合を考えさせる。</li> <li>・ 班交流では一人一回は意見を言えるようにする。 (「ここまでは考えた」などでもよいとする)</li> </ul>
	1	3	3	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
1	0	-2	-2	-2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
1	0	-2	-2	-2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	3	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	3	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
	0	0	3	3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
0	0	0	3	3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
0	0	0	3	3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
3	3	3	6	6	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
3	3	3	6	6	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-2	-2	-2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
1	1	1	4	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
まとめ	<p>○樹形図や表から 1144 が勝つのは 120通り、1333 が勝つのは 132通り よって、不公平である。</p> <p>○班で交流する</p> <p>○まとめ ルールや条件によって判断が異なる場合がある。 図や表を用い、すべての場合を調べ、確率を考えることで、公平であるかどうかを判断できる。</p> <p>○アンケート記入</p>	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">【評価基準】</p> <p>公平であるかどうかについて、確率を用いて説明できたかをプリントから評価する。</p> </div>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										