岐阜数学教育研究
2012， Vol. 11， 35-52

立体の組み合わせを題材にした教材の開発と実践

原田和樹[1]，愛木豊彦[2]

立体について考察するとき，平面を抜き出して平面図形の性質を用いることが重要である。この重要性を生徒に伝えることを目的として，二つの立体を組み合わせて作った立体について考察する授業案を開発した。このような立体と立体を組み合わせた問題は，中学校では体積や表面積を求める場面で扱われるが，三平方の定理を用いる場面では扱われていない。本論文では，この教材の詳細を示し，中学3年生に実践した結果について述べる。

＜キーワード＞正四面体，正四角錐，同一平面上，三平方の定理

1. はじめに

空間図形を苦手とする中学生の割合は高い。例えば，平成22年度全国学力・学習状況調査中学校報告書[１]において，円柱の体積を求める問題の正答率は42.3％だった。さらに，国立教育政策研究所が出している同調査の調査結果のポイント[２]では,「空間図形の性質を考察する際に，見取図，展開図，投影図などの多様な表現を用いる活動を一層重視するとともに，平面上における図表示の特徴の理解を深めることが大切である。」や,「位置関係に注目して観察することで，図形やその要素の関係を見いだし」と述べられている。

そこで，空間図形について考える力を少しでも伸ばしたいと思い，教材開発を進めた。

空間図形を考察するとき，立体から平面図形を抜き出すことが有効である。このことが身につけば，空間図形から直角三角形を見いだし三平方の定理を適用するなど，空間図形を平面図形の性質を用いて考察できるようになる。したがって，この能力を高めることを開発する授業のねらいの一つとした。

また，2012年度から完全実施されている中学校学習指導要領解説数学編[３]の第２章数学科の目標及び内容のB図形において，「観察，操作や実験などの活動を通して，空間図形についての理解を深めるとともに」とあり，また「観察，操作や実験などの活動を通して，三平方の定理を見いだして理解し，それを用いて考察できるようにする。」ともある。

そこで，立体の模型を実際に手にとることで，気づいた性質を証明するという図形領域における問題の作り方，解き方を経験させたいと考えた。さらに，立体の模型を様々な角度から観察することで，平面を見いだす活動にもつながる。

よって，空間図形において観察から気づいたことを証明でき，かつ，目的に応じて空間図形から平面を抜き出して考察できるような教材として，二つの立体を組み合わせた立体について考察することを題材に選んだ。

2. 授業の概要

2.1 題材について

授業の題材は，立体と立体を組み合わせることである。ここでは，次の問題について考察していく。

問題Ⅰ「すべての辺の長さが等しい正四角錐と正四面体がある。図１のように正四角錐の正三角形の１面に，正四面体の１面をぴっ

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]日本女子大学理学部

たりと重ねる。このときできた立体は，何面体だろうか。」

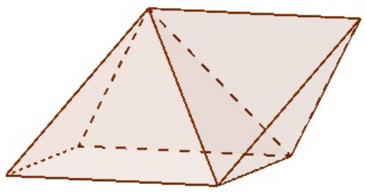


図 1

正四角錐は五面体，正四面体は四面体であるが，この二つの立体を問題 I のように組み合わせると，五面体になる。以下，このことを証明する。

まず，二つの立体を組み合わせた立体を立体 S とし，各頂点に図 2 のように記号を付ける。

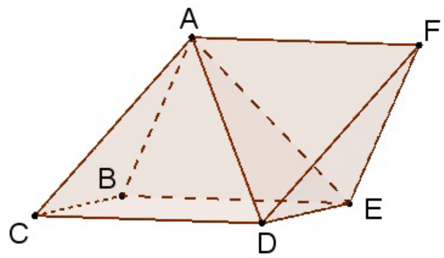


図 2

性質 1

立体 S において，BC の中点を L，ED の中点を M としたとき，4 点 A，F，M，L は同一平面上にある。

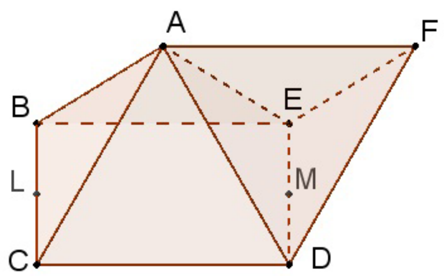


図 3

（証明）

（i）DE ⊥ 面 AFM を示す。

仮定より，

$$AD = AE$$

よって，三角形 ADE は二等辺三角形であり，点 M が DE の中点なので，

$$AM \perp DE$$

三角形 FDE においても同様にして，

$$FM \perp DE$$

よって，面 AFM 内の独立した二直線が DE に直交するので，

$$DE \perp 面\ AFM$$

（ii）DE ⊥ 面 AML を示す。

（i）より，

$$AM \perp DE \qquad (1)$$

仮定より，BC=ED で，L，M はそれぞれ BC，ED の中点なので，

$$BL = EM \qquad (2)$$

また，四角形 BCDE は正方形なので，

$$\angle LBE = \angle MEB = 90^\circ \qquad (3)$$

$$BL \,/\!/\, EM \qquad (4)$$

（2），（4）より，1 組の対辺が平行で長さが等しいので，四角形 BLME は平行四辺形である。また，（3）より，四角形 BLME は長方形である。

よって，

$$LM \perp DE \qquad (5)$$

（1），（5）より，面 AML 内の独立した二直線が DE に直交するので，

$$DE \perp 面\ AML$$

（iii）面 AML と面 AMF は同一平面上にあることを示す。

（i），（ii） より，

$$\mathrm{DE} \perp 面\ \mathrm{AFM},\ \mathrm{DE} \perp 面\ \mathrm{AML}$$

なので，

$$面\ \mathrm{AFM}\ /\!/\ 面\ \mathrm{AML}$$

また，AM が共通しているので，面 AFM と面 AML は同一平面上にある。ゆえに，4 点 A，F，M，L は同一平面上にある。 （証明終）

性質 2

立体 S において，AF // LM

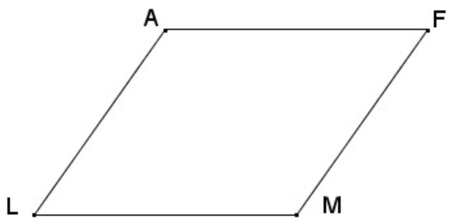


図 4

（証明）

仮定より，

$$\mathrm{AF} = \mathrm{BE}$$

性質 1（ii）より，四角形 BLME は長方形なので，

$$\mathrm{BE} = \mathrm{LM}$$

よって，

$$\mathrm{AF} = \mathrm{LM} \tag{6}$$

性質 1 の証明より，DE ⊥ FM，また，同様にして，AL ⊥ BC である。よって，三角形 ABL と三角形 FEM は直角三角形である。

次に，三角形 ABL ≡ 三角形 FEM を示す。

三角形 ABL と三角形 FEM において，仮定より，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{FE}$$

L，M はそれぞれ BC，DE の中点なので，

$$\mathrm{BL} = \mathrm{EM}$$

よって，直角三角形において斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので，

$$三角形\ \mathrm{ABL} \equiv 三角形\ \mathrm{FEM} \tag{7}$$

よって，性質 1 より点 A，F，M，L が同一平面上にあり，(6)，(7) より， 2 組の対辺がそれぞれ等しいので，四角形 AFML は平行四辺形である。

したがって，

$$\mathrm{AF}\ /\!/\ \mathrm{LM}$$

（証明終）

性質 3

立体 S において，AD の中点を Q としたとき，FC = CQ + FQ

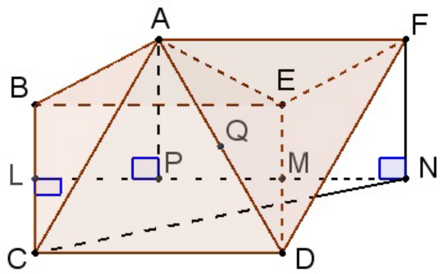


図 5

（証明）

立体 S の一辺の長さを a とする。

（i）FC を求める。

F から平面 BCDE に垂線を下ろし，その足を N とする。

N が直線 LM 上にあることを示す。

FN ⊥ 平面 BCDE なので，

$$\mathrm{EN} \perp \mathrm{FN},\ \mathrm{DN} \perp \mathrm{FN} \tag{8}$$

よって，三角形 FEN と三角形 FDN において，仮定より，

$$\mathrm{FE} = \mathrm{FD}$$

また，FN は共通な辺なので，これらと（8）より，直角三角形において，斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので，

$$三角形\,\mathrm{FEN} \equiv 三角形\,\mathrm{FDN}$$

よって，対応する辺の長さは等しいので，

$$\mathrm{NE} = \mathrm{ND}$$

三角形 NEM と三角形 NDM において，

$$\mathrm{NE} = \mathrm{ND},\ \mathrm{EM} = \mathrm{DM}$$

また，NM は共通な辺だから，3 組の辺がそれぞれ等しいので，

$$三角形\,\mathrm{ENM} \equiv 三角形\,\mathrm{DNM}$$

対応する角の大きさは等しいので，

$$\angle\,\mathrm{NME} = \angle\,\mathrm{NMD}$$

よって，EM ⊥ ED なので，LM ⊥ ED より，N は直線 LM 上にある。

また，A から平面 BCDE に垂線を下ろし，その垂線の足を P とする。

P が LM，CE の中点になることを示す。

上の証明と同様にして，P は LM 上にあることがいえる。

LP = MP を示す。

三角形 ALP と三角形 AMP において，
AL ⊥ BC より，三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{AL}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BL}^2$$

また，AM ⊥ DE より，三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AE}^2 - \mathrm{EM}^2$$

AB = AE，BL = EM なので，

$$\mathrm{AL}^2 = \mathrm{AM}^2$$

AL ＞ 0，AM ＞ 0 より，

$$\mathrm{AL} = \mathrm{AM}$$

また，AP は共通な辺

よって，AP ⊥ LM より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので，

$$三角形\,\mathrm{ALP} \equiv 三角形\,\mathrm{AMP}$$

したがって，対応する辺の長さは等しいので

$$\mathrm{LP} = \mathrm{MP}$$

CP = EP を示す。

三角形 LCP と三角形 MEP において，P は LM の中点なので，

$$\mathrm{LP} = \mathrm{MP}$$

L，M はそれぞれ BC，ED の中点なので，

$$\mathrm{LC} = \mathrm{EM}$$

また，BC ⊥ LM，DE ⊥ LM より，２辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので，

$$三角形\,\mathrm{LCP} \equiv 三角形\,\mathrm{MED}$$

したがって，対応する辺の長さは等しいので

$$\mathrm{CP} = \mathrm{EP}$$

L は BC の中点なので，

$$\mathrm{LC} = \frac{a}{2}$$

P は LM の中点なので，

$$\mathrm{LP} = \frac{a}{2}$$

AP ⊥ LM，FN ⊥ LN より，同位角が等しいので，

$$\mathrm{AP}\ /\!/\ \mathrm{FN}$$

これと，性質 2 より，四角形 APNF において 2 組の対辺がそれぞれ平行なので，四角形

APNF は平行四辺形である。平行四辺形の対辺の長さは等しいので,

$$\mathrm{PN} = \mathrm{AF} = a$$

よって,

$$\begin{aligned}\mathrm{LN} &= \mathrm{LP} + \mathrm{PN},\\ &= \frac{3}{2}a\end{aligned}$$

三角形 LCN において,三平方の定理より,

$$\begin{aligned}\mathrm{CN}^2 &= \mathrm{LC}^2 + \mathrm{LN}^2,\\ \mathrm{CN}^2 &= \frac{5}{2}a^2 \qquad (9)\end{aligned}$$

四角形 AFNP は平行四辺形なので,

$$\mathrm{AP} = \mathrm{FN}$$

P は CE の中点より,

$$\mathrm{CP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

三角形 APC において,三平方の定理より,

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CP}^2$$

よって,AP=FN より,

$$\begin{aligned}\mathrm{FN}^2 &= \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CP}^2,\\ \mathrm{FN}^2 &= \frac{1}{2}a^2 \qquad (10)\end{aligned}$$

したがって,(9),(10)より,三角形 FNC において三平方の定理を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{FC}^2 &= \mathrm{FN}^2 + \mathrm{CN}^2,\\ \mathrm{FN}^2 &= 3a^2\end{aligned}$$

FC $>$ 0 より,

$$\mathrm{FC} = \sqrt{3}a$$

(ii)CQ+FQ を求める

仮定より,Q は AD の中点なので,

$$\mathrm{AQ} = \frac{1}{2}a$$

仮定より,三角形 ACD は AC=CD の二等辺三角形なので,

$$\angle\mathrm{AQC} = 90^\circ$$

よって,三平方の定理より,

$$\begin{aligned}\mathrm{CQ}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AQ}^2,\\ \mathrm{CQ}^2 &= \frac{3}{4}a^2\end{aligned}$$

CQ $>$ 0 より,

$$\mathrm{CQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

FQ も同様にして,

$$\mathrm{FQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって,

$$\mathrm{FQ} + \mathrm{CQ} = \sqrt{3}a$$

(i),(ii)より,

$$\mathrm{FC} = \mathrm{CQ} + \mathrm{FQ}$$

(証明終)

定理 1

立体 S は五面体である。

(証明)

性質 3 より,FC $=$ CQ $+$ FQ なので,点 F, C,Q は一直線上にある。また,Q は AD の中点なので,点 A,D,Q は一直線上にある。よって,直線 FC と直線 AD は点 Q で交わる。

以上より,交わる二直線を通る平面はただ一つに決まるので,面 ACD と面 AFD が同一直線上にある。

同様にして,面 AFE と面 ABE も同一平面上にあることが示される。

したがって,立体 S は五面体である。

(証明終)

以上の証明は，中学３年生には難しく，長いので，授業で扱う証明を次のように変更した。性質１を証明するとき，同一平面上にあることを示すには,「1点で交わる直線a，b，cがあり，その交点を通る直線lに対して$l \perp$ a，$l \perp$ b，$l \perp$ c が成り立つとき，直線a，b，cは同一平面上にある。」という条件を用いて良いとし，性質３の証明では１辺の長さを1cm であらかじめ与えている。

①点 A，F，M，L が同一平面上にあることの証明

（証明）

DE ⊥ AM，DE ⊥ FM，DE ⊥ AL を示す。

三角形 ADE について，仮定より，AE ＝ AD なので三角形 ADE は二等辺三角形である。

M は ED の中点なので，AM は DE の垂直二等分線である。

よって，

$$\mathrm{DE} \perp \mathrm{AM} \tag{11}$$

同様にして，三角形 FED を考えると，

$$\mathrm{DE} \perp \mathrm{FM} \tag{12}$$

四角形 BCDE について，L,M はそれぞれBC,ED の中点なので，

$$\mathrm{BL} = \mathrm{EM} \tag{13}$$

四角形 BCDE は正方形なので，

$$\mathrm{BL} \parallel \mathrm{EM} \tag{14}$$

（13）,（14）より，１組の対辺が平行で長さが等しいので，四角形 BLME は平行四辺形。

したがって，∠CBE ＝ 90°より，四角形BLME は長方形である。

よって，

$$\mathrm{LM} \perp \mathrm{DE} \tag{15}$$

（11）,（12）,（15）と同一平面上にある条件より，点 A，F，M，L は同一平面上にある。

（証明終）

②AF ∥ LM の証明

仮定より，

$$\mathrm{AF} = \mathrm{BE}$$

①の証明より，四角形 BLME は長方形なので，

$$\mathrm{BE} = \mathrm{LM}$$

よって，

$$\mathrm{AF} = \mathrm{LM} \tag{16}$$

①の証明より，DE ⊥ FM，また，同様にして，AL ⊥ BC である。よって，三角形 ABLと三角形 FEM は直角三角形である。

次に，三角形 ABL ≡ 三角形 FEM を示す。

三角形 ABL と三角形 FEM において，仮定より，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{FE}$$

L，M はそれぞれ BC，DE の中点なので，

$$\mathrm{BL} = \mathrm{EM}$$

よって，直角三角形において斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので，

$$\text{三角形 ABL} \equiv \text{三角形 FEM} \tag{17}$$

よって，性質１より点 A，F，M，L が同一平面上にあり,（16）,（17）より，２組の対辺がそれぞれ等しいので，四角形 AFML は平行四辺形である。

したがって，

$$\mathrm{AF} \parallel \mathrm{LM}$$

（証明終）

③FC ＝ CQ ＋ FQ の証明

（i）FC を求める。

LM を M 側に延長した直線上に，F から垂線を下ろし，その垂線と直線 LM との交点を N とする。また，A から LM に垂線を下ろし，その垂線と直線 LM との交点を P とする。

L が BC の中点なので，

$$\mathrm{LC} = \frac{1}{2}$$

立体 A-BCDE は正四角錐なので LM の中点と P が一致する。よって，

$$\mathrm{LP} = \frac{1}{2}$$

AP ⊥ LM，FN ⊥ LN より，同位角が等しいので，

$$\mathrm{AP} \parallel \mathrm{FN}$$

これと，性質 2 より，四角形 APNF において 2 組の対辺がそれぞれ平行なので，四角形 APNF は平行四辺形である。平行四辺形の対辺の長さは等しいので，

$$\mathrm{PN} = \mathrm{AF} = 1$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{LN} &= \mathrm{LP} + \mathrm{PN}, \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

三角形 LCN において，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CN}^2 &= \mathrm{LC}^2 + \mathrm{LN}^2, \\ \mathrm{CN}^2 &= \frac{5}{2} \qquad (18)\end{aligned}$$

四角形 AFNP は平行四辺形なので，

$$\mathrm{AP} = \mathrm{FN}$$

P は CE の中点より，

$$\mathrm{CP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

三角形 APC において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CP}^2$$

よって，AP=FN より，

$$\begin{aligned}\mathrm{FN}^2 &= \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CP}^2, \\ \mathrm{FN}^2 &= \frac{1}{2} \qquad (19)\end{aligned}$$

したがって,（18）,（19）より，三角形 FNC において三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{FC}^2 &= \mathrm{FN}^2 + \mathrm{CN}^2, \\ \mathrm{FC}^2 &= 3\end{aligned}$$

FC ＞ 0 より，

$$\mathrm{FC} = \sqrt{3}$$

（ii）CQ+FQ を求める

仮定より，Q は AD の中点なので，

$$\mathrm{AQ} = \frac{1}{2}$$

仮定より，三角形 ACD は AC=CD の二等辺三角形なので，

$$\angle \mathrm{AQC} = 90^\circ$$

よって，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CQ}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AQ}^2, \\ \mathrm{CQ}^2 &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

CQ ＞ 0 より，

$$\mathrm{CQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

FQ も同様にして，

$$\mathrm{FQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，

$$\mathrm{FQ} + \mathrm{CQ} = \sqrt{3}$$

（i），（ii）より，

$$FC = CQ + FQ$$

（証明終）

定理１は，生徒は証明せず授業者が説明することとした。

2.2 授業のねらい

そして，この問題を題材とする授業のねらいを以下のようにした。

(a)①，②の証明を通して，同一平面上で考察することの意味や有用性を理解する。

(b) 面 ACD と面 AFD が同一平面上にあることの証明を通して，三平方の定理の有用性や直線と平面との関係への理解を深める。

(c) 立体について考察するときは，平面に置き換えることで考えやすくなることがわかる。

2.3 授業の流れ

授業の詳しい計画は，指導案（文末資料1～4）で示したので，ここでは簡単に説明する。この授業は全２時間構成である。

１．第１時

(1) 問題提示・課題設定

まず，この授業では二つの立体を組み合わせると何面体になるかについて考えていくことを説明する。そして，正四面体と正四角錐の模型を見せ，本時で考える次の問題を提示する。「すべての辺の長さが 1cm の正四角錐と正四面体がある。正四角錐の正三角形の１面に，正四面体の１面をぴったりと重ねる。このときできた立体は，何面体だろうか。」

次に，全体の前で証明の流れ「①点 A，F，M，L が同一平面上にある。②AF ∥ LM ③FC ＝ CQ ＋ FQ」を提示し，これらを示せば，組み合わせた立体が五面体であることがいえることを説明した。

さらに，同一平面上にあることを示すには，「1 点で交わる直線 a，b，c があり，その交点を通る直線 l に対して $l \perp$ a，$l \perp$ b，$l \perp$ c が成り立つとき，直線 a，b，c は同一平面上にある。」という条件を用いて良いことを説明した。

そして,「同一平面上にあるための条件をもとに，①を証明し，①を用いて②を証明しよう。」という課題を提示する。

(2) 個人追究

学習プリントに沿って，①，②の証明をする。

(3) 交流・まとめ

班ごとに分かれて，証明を説明しあう。

最後に，授業者が全体の前で証明の確認をし，次の時間に③を証明することを確認する。

２．第２時

(1) 問題提示・課題設定

証明の流れを復習し，本時はどの図形に着目しているかを明らかにしながら，③を三平方の定理を用いて証明していくことを説明する。

そして,「どの図形に着目したかを明らかにして，③を証明しよう。」という課題を提示する。

(2) 個人追究

③の証明をする。

(3) 交流

班ごとに分かれて，証明を説明しあう。

(4) まとめ

授業者が,「立体について考察するときは，平面に置き換えることで，今まで学習した性質などを用いることができる」と，まとめる。

3．実践結果

講座名：「立体！合体 !! 何面体？」
場所：岐阜大学教育学部附属中学校
実施日：平成 24 年 2 月 29 日，3 月 1 日
対象：中学 3 年生（35 名）

3.1 活動の様子

１．第１時

授業者がまず，正四角錐と組み合わせて七面体になるような四面体を提示し，この二つ

を組み合わせれば正四角錐と四面体の１面ずつが消されて，七面体になることを確認したあと，写真１のように正四角錐と正四面体を提示し，この場合，何面体になるのかを質問した。

写真１

その後，生徒一人一人に写真２のような正四角錐と正四面体の模型を配布し，五面体に見えることを確認し，今回は本当に五面体になっているのかを示していくと説明し，「すべての辺の長さが 1cm の正四角錐と正四面体がある。正四角錐の正三角形の１面に，正四面体の１面をぴったりと重ねる。このときできた立体は，何面体だろうか。」という問題を提示した。

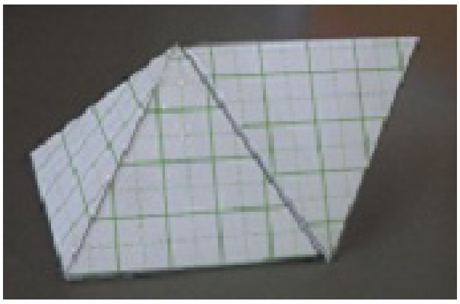


写真２

そして，この証明は長くなるので，証明の流れの①～③を提示し，さらに，なぜ①～③を示すことで，組み合わせた立体が五面体であることが言えるのかを説明し，この三つの証明をすれば良いという動機付けを行なった。

また，①の証明に必要な同一平面上にある条件はまだ学習していないので，その条件を提示し，これを用いて証明すれば良いとした。

その後，「同一平面上にあるための条件をもとに，①を証明し，①を用いて②を証明しよう。」という課題を設定し，個人追究を行なった。

課題設定までに時間を多く使うと考え，①②の証明は，穴埋め形式の学習プリントを配布し（文末資料5，6），それに従って証明させた。生徒は，写真３のようにプリントの図や配布した正四角錐と正四面体の模型をじっくり見ながら，証明を進めていった。

写真３

そして，班内で証明を説明し合った後，授業者が全体の前で，写真４のようにどの図形に着目して証明を進めたのかを図で示しながら，証明の確認をした。

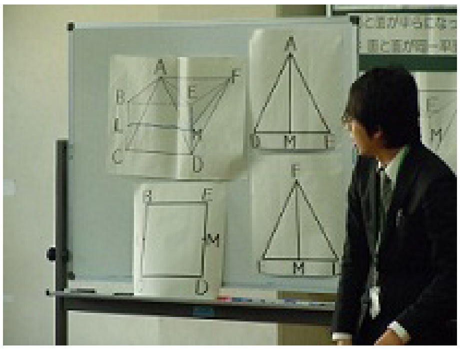


写真４

２．第２時

まず，第１時の復習として，証明の流れや①，②，③の三つを証明するとどうして五面体といえるのかを簡単に説明した。また，①②の証明で平面図形に着目したことも確認した。そして，本時は図形を抜き出すことにより重点を置くことを説明し，「どの図形に着目した

かを明らかにして，③を証明しよう。」という課題を提示し，第1時と同じように個人追究を行なった。

生徒は，写真5のように学習プリントに，自分が今どの図形をもとに証明を進めているのかを明らかにしながら追究をしていた。

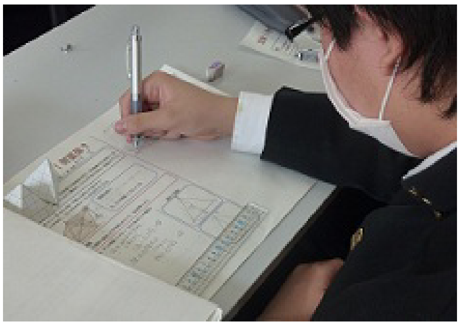


写真5

追究後の，班交流では最後まで証明を完結できなかった生徒に，班内の生徒同士で写真6のように交流をし教え合っていた。

写真6

4．考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

（1）①～③を証明することができましたか?

・できた　…19人
・③ができなかった　…16人

（2）①～③を証明するとき，どのような数学の性質を使いましたか？

・三平方の定理
・平行四辺形の性質
・二等辺三角形の性質
・同一平面上にあるための条件
・直角三角形の合同条件
・平行線の性質

（3）立体についての問題を考えるときは，どのような見方が便利だと思いますか？

・平面図形におきかえて見ること。
・補助線を引く。
・今までに習った性質や法則が使えるような図形を立体の中から見つけ出して考える。
・平面に移して考えていき，そこからその平面の性質を生かして，立体へとまた移して発想の転換が便利だと思いました。

（4）授業の感想を書いてください。

・はじめは立体図形だけを見ると難しそうに見えましたが，平面としていろいろな見方をすることで簡単にできるということが分かりました。
・自分で実際の図形を見て，触れることができたので，イメージしやすかったです。また，今までに習った数学の性質を使って求めていくことができたり，自分で求めやすい図形を見つけて証明していくことが楽しかったです。
・2つの図形を組み合わせているのに五面体になるのが面白かったです。③の証明は難しかったけれど，分かっていくととても楽しかったです。他の問題にも挑戦していきたいです。
・①②の証明は出来たけれど，③の証明が難しくて進められませんでした。
・とても面白かったです。五面体になる理由が，私たちがつけてきた知識で解決してしまうことにうきうきしながら解いていきました。

・今回の証明は難しかった。

本授業のねらい (a)(b)(c) の達成度について考察する。

(a)「性質 1，性質 2 の証明を通して，同一平面上で考察することの意味や有用性を理解する。」について

アンケートの質問（1）「①〜③を証明することができましたか?」に対し，35 人中 35 人全員が「①②の証明はできた」と回答した。また，授業の様子から個人追究のときには，学習プリントの穴埋めの証明をしっかりとできており，班内の生徒同士で深め合う姿も見られた。これらのことから，このねらいは達成できたと考える。

(b)「面 ACD と面 AFD が同一平面上にあることの証明を通して，三平方の定理の有用性や直線と平面との関係への理解を深める。」について

アンケートの質問（1）「①〜③を証明することができましたか?」に対し，35 人中 16 人が「③ができなかった」と回答した。授業の様子から，③の証明では，補助線が多数必要であり，うまく図形を抜き出すことができない生徒も見られた。なかなか自分だけで証明を完結させるのは難しかったように感じた。これらのことから，このねらいは十分に達成できなかったと考える。

(c)「立体について考察するときは，平面に置き換えることで考えやすくなることがわかる。」について

アンケートの質問（2）「立体についての問題を考えるときは，どのような見方が便利だと思いますか？」に対し,「平面図形におきかえて見ること。」や「今までに習った性質や法則が使えるような図形を立体の中から見つけ出して考える。」といった回答が得られた。また，2 時間目の授業の様子から，どの三角形で三平方の定理を使えば良さそうかを考えながら追究ができていた。これらのことから，このねらいは達成できたと考える。

5．今後の課題

実践を終え，授業展開の見直しが課題となった。この授業で，立体についての考察は常に平面に置き換え，同一平面上にあることがわかれば，今まで学習した性質などが使えることを伝えたかったのだが，中学3年生は，同一平面上にあることを示したことがなく，また，証明も長かったため，課題設定までに授業者が説明することが多くなり，追究にかける時間が短くなってしまった。学習プリントを穴埋めにするなど，工夫はしたつもりだったが，それでもやはりもっと追究に時間を取ることができれば良かった。アンケートでも③ができなかったという回答が多かったが，時間が足りずに証明を完結できなかった生徒も見られた。全 2 時間の授業時間の中に詰めすぎてしまった。この内容を実践するなら，全 3 時間は必要だと考える。

今回の教材において，五面体の正四角錐と正四面体を組み合わせると五面体になるというところに，驚きを感じていた生徒は多かったし，それを証明できることにも驚いていた。このように目で見たものを証明できることも図形領域の面白さの一つだと感じた。さらに他の教材を通しても，数学を面白いと感じる生徒が増えるようにしていきたい。

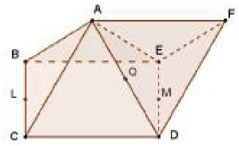
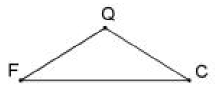
引用文献

[1] 平成 22 年度　全国学力・学習状況調査中学校報告書（平成 22 年）国立教育政策研究所（http://www.nier.go.jp/10chousakekkahoukoku/03chuu/chuu_4s.pdf）
[2] 平成 22 年度　全国学力・学習状況調査　調査結果のポイント（平成 22 年）国立教育政策研究所

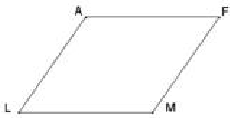
（http://www.nier.go.jp/10chousakekkahoukoku　年 9 月）教育出版株式会社.
/10_point.pdf）
[３] 中学校学習指導要領解説数学編（平成 20

文末資料１（第１時-1）

本時（１／２）の展開

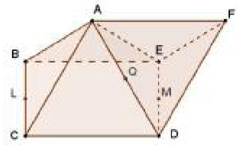
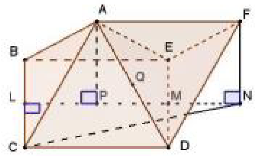
過程	ねらい	学習活動	指導援助
導入	○問題場面を把握し、五面体になりそうだと予想することができる。	**1 問題場面を把握する** 問題 すべての辺の長さが１cmの正四角錐と正四面体がある。正四角錐の正三角形の１面に、正四面体の１面をぴったりと重ねる。このときできた立体は、何面体だろうか。 ・正四角錐を正四面体を合わせると何面体になるのかを予想する。 ・配られた立体を見て、五面体になりそうだと確認する。	・正四角錐と正四面体を提示する。 ・問題を掲示する。 ・○面体という意味について確認する。 ・正四角錐と正四面体を配る。
	○証明の流れと同一平面上にあるための条件を理解できる。	・「面と面が平らになっている＝面と面が同一平面上にある」と確認する。 ・証明の流れ  「①　点A、F、M、Lが同一平面上にある ②　AF // LM ③　FCの距離 ＝ FQ ＋ CQ」 を確認する。	・同一平面上にあるという意味を確認する。 ・証明の流れを説明する。 ・同一平面上にあるための条件を説明する。
展開	○なぜ、③がいえると面ACDと面AFDが同一平面上にあることがいえるのかがわかり、証明の見通しをもつことができる。	・面ACDと面AFDが同一平面上にあることを確認する。 点F、C、Qがどのような位置関係にあるのかを示す。 もし、点F、C、Qが下の図のような位置関係にあるとすると、  FC ＜ FQ ＋ CQ ③より、FC ＝ FQ ＋ CQなので 点F、C、Qは一直線上にある。　・・・(ⅰ) また、QはADの中点なので、点A、D、Qは１直線上にある。　・・・(ⅱ) (ⅰ)(ⅱ)より、直線FCと直線ADは点Qで交わる。以上より、交わる２直線で平面はただ１つに決まるので、面ACDと面AFDが同一平面上にある ・同一平面上にあるための条件 「１点で交わる直線ａ，ｂ，ｃがあり、その交点を通る直線ｌに対して ｌ⊥ａ，　ｌ⊥ｂ，ｌ⊥ｃ が成り立つとき、直線ａ，ｂ，ｃは同一平面上にある。」を確認する。	・なぜ、③がいえると面ACDと面AFDが同一平面上にあることがいえるのかを説明する。
	○①と②の証明をすることができる。	課題 同一平面上にあるための条件をもとに、①を証明し、①を用いて②を証明しよう。 **2 個人追究をする** ・①の証明をする。 同一平面上にあるための条件を使うために、 DE⊥AM、DE⊥FM、DE⊥ALを示す。 △ADEについて	・課題を掲示する。 ・学習プリントを（証明が穴埋めになているもの）配る。 ・手が止まっている生徒には「同一平面上にあるための条件の、ｌ，ａ，ｂ，ｃにあたる辺はどこだろう。」と問う。

文末資料２（第１時-2）

まとめ	○②の証明のどこに①が使われているかがわかる。	仮定より、AE＝AD なので△ADE は二等辺三角形である。 M は ED の中点なので、AM は DE の垂直二等分線である。 よって、 DE⊥AM （１） 同様にして、△FED を考えると、 DE⊥FM （２） L,M はそれぞれ BC,ED の中点なので、 BL=EM （３） 四角形 BCDE は正方形なので、 BL//EM （４） （３）（４）より、１組の対辺が平行で長さが等しいので、四角形 BLME は平行四辺形。 したがって、∠CBE＝90° より、四角形 BLME は長方形である。 よって、 LM⊥DE （５） （１）（２）（５）より、同一平面上にある条件を用いると、 点 A、F、M、L が同一平面上にある。 ・②の証明をする。  仮定より、AF=BE 四角形 BLME は長方形より、BE=LM よって、AF=LM （１） ①の証明より、DE⊥FM、また、同様にして AL⊥BC よって、△ABL と△FEM は直角三角形である。（２） △ABL≡△FEM を示す。 △ABL と△FEM において 仮定より、 AB＝FE （３） L、M はそれぞれ BC、DE の中点なので、 BL＝EM （４） （２）（３）（４）より、直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいので、 △ABL ≡ △FEM よって、対応する辺なので、 AL＝FM （５） （１）（５）より、２組の対辺がそれぞれ等しいので、四角形 AFLM は平行四辺形。（点 A、F、M、L が同一平面上にあるので、平行四辺形であるための条件が使える。） よって、AF//LM **3 班交流をする** ・班ごとに分かれて、証明を説明しあう。 ・②の証明で①が必要な理由を、説明しあう。 **4 まとめをする** ・証明の確認をする。	・手が止まっている生徒には「何が示せれば平行四辺形であるといえたか。」と問い、２組の対辺が等しいことを示せばよいことに気付かせる。 ・全体の前で、図を掲示し、証明の確認をする。 ・立体を立体のまま考えるのでなく、平面を考えたことをおさえる。 ・次の時間にこの続きを考えていくことを確認する。

文末資料３（第２時-1）

本時（２/２）の展開

過程	ねらい	学習活動	指導援助
導入		**１問題場面を把握する** 問題 すべての辺の長さが１㎝の正四角錐と正四面体がある。正四角錐の正三角形の１面に、正四面体の１面をぴったりと重ねる。このときできた立体は、何面体だろうか。  ・証明の流れを復習し、本時は三平方の定理を用いて③の証明をすることを確認する。	・問題を掲示しておく。 ・証明の流れを復習する。 ・どの図形に着目して考えているかを明らかにしながら証明していくことを説明する。
展開	○本時に行う内容の見通しを持つことができる。 ○③の証明をすることができる。	課題 どの図形に着目したかを明らかにして、③を証明しよう。 **２個人追究をする** ・③の証明をする。  （FCの距離を求める） LMをM側に延長した直線上に、Fから垂線を下ろし、その垂線と直線LMとの交点をNとする。また、AからLMに垂線を下ろし、その垂線と直線LMとの交点をPとする。 正四角錐と正四面体の１辺の長さを１とすると、 LがBCの中点なので、LC＝1/2 立体A－BCDEは正四角錐なのでLMの中点がPとなる。 よって、LP＝1/2 四角形AFNPは長方形なので、PN＝AF＝1 よって、LN＝3/2 三平方の定理より $CN^2 = LC^2 + LN^2$ $CN^2 = 5/2$ 四角形AFNPが長方形なので、AP=FN PはCEの中点より、$CP = \sqrt{2}/2$ 三平方の定理より、 $AP^2 = AC^2 - CP^2$ よって、AP＝FNより、 $FN^2 = AC^2 - CP^2$ $FN^2 = 1/2$ よって、 $FC^2 = FN^2 + CN^2$ $FN^2 = 3$ FC＞0より、 $FC = \sqrt{3}$ （CQ＋FQを求める） QはADの中点より、AQ = 1/2 三平方の定理より、 $CQ^2 = AC^2 - AQ^2$	・課題を掲示する。 ・学習プリントを配る。 ・常にどの図形に着目して考えているのかを意識させる。 ・手が止まっている生徒には「直方体の頂点と頂点の距離を出したときを思い出して、どこの長さがわかれば三平方の定理でFCの距離が求められるか。」と問い、FN、NCの長さがわかればよいことに気付かせる。 ・それでも進まない生徒には、ヒントカード（左の図）を配る。

文末資料4（第2時-2）

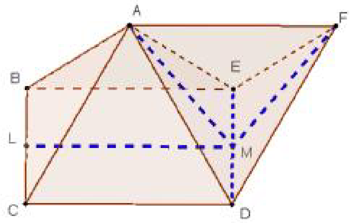
まとめ		$CQ^2=3/4$ $CQ>0$より、 $CQ=\sqrt{3}/2$ FQも同様にして、 $FQ=\sqrt{3}/2$ よって、 $CQ+FQ=\sqrt{3}$ 以上より、 $FC=CQ+FQ$ **3 班交流をする** ・班ごとに分かれて、証明を説明しあう。 **4 まとめをする** ・証明の確認をする。 立体について考察するときは、平面に置き換えることで、今まで学習した性質などを用いることができる。 **5 アンケートを記入する**	・全体の前で証明の確認をする。 ・解答例を配る。 ・アンケート用紙を配る。

文末資料５（学習プリント１）

年　　組　氏名

課題
同一平面上にあるための条件をもとに、①を証明し、①を用いて②を証明しよう。

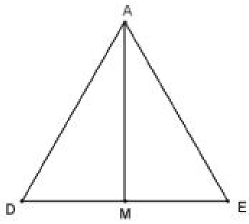
<①　点 A、F、M、L が同一平面上にあることの証明>



（証明）
同一平面上にあるための条件を使うために、

DE⊥ □ 、DE⊥ □ 、DE⊥ □ を示す。

△ADE について



仮定より、AE＝ □ なので△ADE は二等辺三角形である。

M は ED の中点なので、 □ は DE の垂直二等分線である。
よって、

DE ⊥ □ （１）

同様にして、△ □ を考えると、

DE ⊥ □ （２）

四角形 BCDE について
L、M はそれぞれ BC、DE の中点なので、

BL ＝ □ （３）

四角形 BCDE は長方形なので、

BL // □ （４）

平行四辺形であるための条件

（３）（４）より、 □ ので、

四角形 BLME は平行四辺形である。
したがって、∠CBE＝90°より、四角形 BLME は長方形である。
よって、

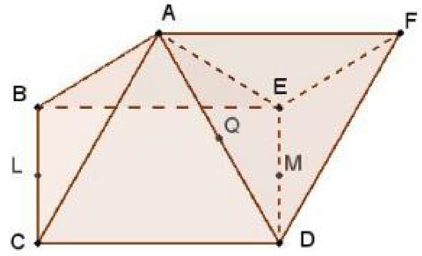
DE ⊥ □ （５）

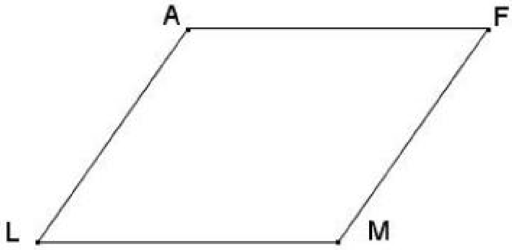
（１）（２）（５）と同一平面上にある条件より、
点 A、F、M、L は同一平面上にある。

文末資料 5（学習プリント 2）

年　　組　氏名

＜②　AF // LM の証明＞





四角形 AFLM が平行四辺形であることを示す。

仮定より、AF ＝ BE

四角形 BLME は長方形より、BE ＝

よって、

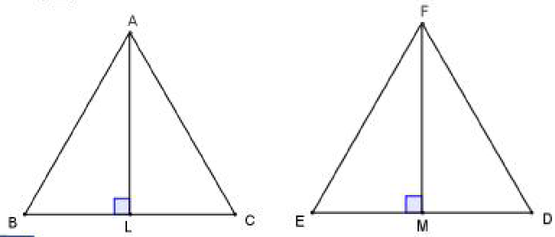
AF ＝　　　（1）

①の証明より、DE ⊥ FM、また、同様にして AL ⊥ BC

よって、△ABL と△FEM は直角三角形である。　（2）

△ABL≡△FEM を示す。

△ABL と△FEM において



仮定より、AB ＝　　　（3）

L、M はそれぞれ BC、DE の中点なので、

BL ＝　　　（4）

（2）（3）（4）より、

直角三角形の　　　ので、

△ABL ≡ △FEM

よって、対応する辺なので、

AL ＝　　　（5）

（1）（5）より、

　　　ので、

四角形 AFLM は平行四辺形である。（点 A、F、M、L が同一平面上にあるので、平行四辺形であるための条件が使える。）

よって、AF//LM