

## 立体図形に対する感覚を豊かにする教材の提案

～正多面体を展開図から作っていく活動を通して～

納土 恵美香<sup>1</sup>, 山路 健祐<sup>2</sup>

小学校5・6年生を対象に、すべての面が正三角形からできている3種類の正多面体(正四面体, 正八面体, 正二十面体)を、展開図をかくて組み立てることを用いた教材を提案し、実践を行った。正多面体の立体図形を見ながら、その立体図形の展開図をかくこと、かいた展開図を組み立てて正多面体を作ること、完成した正多面体の「頂点の数」、「辺の数」、「面の数」から関係をみつける算数的活動を通して、立体図形に対する感覚を豊かにすることを目指した。本論文では、その授業実践の結果を報告する。

<キーワード>正多面体, 展開図, 算数的活動

### 1. はじめに

小学5・6年生を対象にした企画「わくわく算数アドベンチャー」において、岐阜県大垣市情報工房スィンクホールで実践を行う機会を頂いた。1日2時間の企画である。この企画の目的には、子どもの算数に対する興味・関心を一層高めることがある。そこで、小学校における授業で扱われる正多面体に着目した。中でもすべての面が正三角形からできている多面体を取り上げることにした。今回は、算数的活動を通して体験的に学び、立体図形に対する感覚を豊かにすることをねらいとし、すべての面が正三角形からできている3種類の正多面体を、展開図をかくて組み立てることを用いた教材を提案し、実践することにした。

まず、取り扱う3種類の立体図形(正四面体, 正八面体, 正二十面体)を提示し、すべての面が正三角形からできている正多面体であることを確認させることで扱う立体図形のイメージをもたせた。

次に、立体図形を見ながら展開図をかき、かいた展開図を組み立てながら、面が重なることなく組み立てられる展開図を作成させる。

最後に、完成した立体図形の「頂点の数」「辺の数」「面の数」に着目することですべての面が正三角形からできている3種類の正多面体に共通してみられる関係を見つけることをねらいとした。

以下にその授業実践の結果を報告す

る。

### 2. 研究の目的

小学校において、平成23年4月から新学習指導要領が全面実施された。この新学習指導要領の算数について「C図形」領域には、

(1) 身の回りにあるものの形についての観察や構成などの活動を通して、図形についての理解の基礎となる経験を豊かにする。

と記載されている。

この内容を踏まえ、身近にある立体図形に着目し、すべての面が正三角形からできている3種類の正多面体を取り上げた教材を考えることにした。

第2学年で、3本の直線で囲まれている形が三角形であること学習し、第3学年で二辺の長さが等しい三角形が二等辺三角形、三辺の長さが等しい三角形が正三角形であることと、それぞれの三角形の特徴を学習する。また、第3学年ではコンパスと定規を用いて二等辺三角形、正三角形を作図している。

ここで、立体図形を取り上げた理由について述べる。立体図形に関して、小学校で取り扱う正多面体は、正六面体(立方体)のみである。第4学年で、立方体、直方体について学習する。ここで、立方体、直方体の見取り図や展開図をかく。第5学年では、角柱や円柱について見取り図や展開図をかく。小学校学習指導要領解説(平成20年8月)における

<sup>1</sup>岐阜大学教育学部

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部附属中学校

算数科改訂の基本方針には、

(カ)「図形」の領域では、図形の意味と性質について理解すること、図形についての感覚を豊かにすること、図形の見方を生活や学習に活用できるようにすることを重視する。

例えば、低学年から高学年にわたって、様々な図形をかいたり、作ったり、敷き詰めたり、形や大きさを比べたりする内容を指導するとともに、平面図形と立体図形の両者をバランスよく指導する。また、高学年で、図形の合同や拡大図・縮図などの内容を指導する。

とあり、平面図形の取り扱いと立体図形の取り扱いのバランスについて記載されている。

この内容を踏まえて、小学校では取り扱われないうべての面が正三角形からできている3種類の正多面体を今回教材として取り扱うこととした。また、すべての面が正三角形からできている正多面体の展開図をかいたり、その展開図から立体を組み立てたりすることによって、平面図形と立体図形を関連させること、完成した正多面体の「頂点の数」「辺の数」「面の数」に着目して図形の特徴を掴み、関係を見つけることでさらに理解を深めさせようと考えた。

なお、今回の教材で取り扱う、正四面体については、中学校第1学年の空間図形において学習する。

### 3. 教材について

正多面体である正四面体、正八面体、正二十面体の3種類について、以下にそれぞれの特徴を述べる。

正四面体、正八面体、正二十面体ともにすべての面が正三角形からできている正多面体であるが、正四面体は、1つの頂点に面が3つ集まっており、正八面体は4つ、正二十面体は5つである。また、1つの頂点に6つの面(正三角形)があつまると、 $60^\circ$  (正三角形の1つの頂点の角度) $\times 6 = 360^\circ$

となるため、立体図形にならない。つまり、1つの頂点に6つ以上の正三角形が集まると立体図形にならない。

下の表は、それぞれの正多面体の「頂点の数」「辺の数」「面の数」についてまとめたものである。

	頂点の数	辺の数	面の数
正四面体	4	6	4
正八面体	6	12	8
正二十面体	12	30	20

多角形において、

$$(\text{頂点の数}) = (\text{辺の数})$$

という関係が成立する。多角形において面の数は1つであるため、

$$(\text{面の数}) - (\text{頂点の数}) + (\text{辺の数}) = 1$$

が成立する。また、凸である立体(球と位相同型である立体)においては、

$$(\text{面の数}) - (\text{頂点の数}) + (\text{辺の数}) = 2$$

が成立する。

多面体の辺の数は、次のようにして計算で求めることができる。立体図形の辺は、各面の辺が2辺重なって構成されることから、

$$(\text{面の数}) \times (\text{1つの面の辺の数}) \div 2$$

また、正多面体の頂点の数についても、計算で求めることができる。1頂点に集まる辺の数に等しいことから、

$$(\text{面の数}) \times (\text{1つの面の辺の数}) \div (\text{1つの頂点に集まる辺の数})$$

まずは、すべての面が正三角形からできている正多面体の模型(事前に方眼つき画用紙で作成したもの)を見ながら、模型を崩さずに展開図を作成する。この活動を通して、面の数、面の図形(正三角形)に着目しながら、平面図形を関連させて立体図形を構成することの理解を深めることを目標としている。

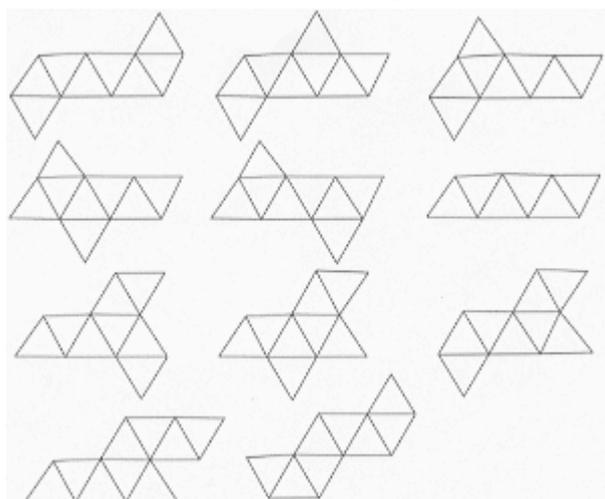
次に、作成した展開図をはさみで切り取り、実際に組み立てる。組み立てる際、面同士が重なってしまうとうまく組み立てられないため、面同士が重ならないように展開図を作成しなおしたりす

る必要がある。

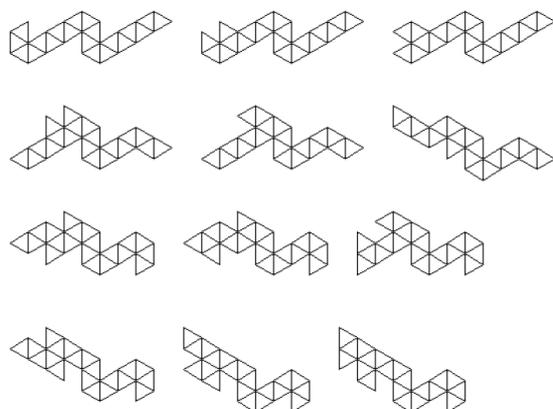
正四面体の展開図は2種類ある。



正八面体の展開図は11種類ある。



正二十面体の展開図は43380種類ある。(1部抜粋)



#### 4. 本時の位置づけ

文部科学省学習指導要領解説[1]による立体図形に関する記述は以下のようになっている。

第1学年では、身の回りにあるものの形の観察や構成などの活動を行い、ものの形を認めたり、形の特徴をとらえたりすることを指導する。身の回りある立体について、児童が例えば、「箱の形」、「ボールの形」などと呼んだり、その特徴を調べたりできるようにする。

第2学年では、箱の形をしたものについて指導する。また、頂点、辺、面という用語も指導する。

第3学年では、立体図形としては、球について指導する。平面図形の円と比べながら、球の中心、半径、直径についても指導する。

第4学年では、立方体、直方体について理解する。直方体に関連して、直線や平面の平行や垂直の関係について理解できるようにする。また、直方体、立方体の見取図や展開図をかくことを指導する。

第5学年では、角柱や円柱について指導する。また、角柱、円柱の見取図や展開図をかくことを指導する。底面、側面という用語についても指導する。

第6学年の「C図形」の領域では、立体図形の内容は示していないが、「B量と測定」の領域で、角柱及び円柱の体積の求め方を考えることを指導することとしている。

第1学年では、身の回りにある具体物を観察して、ものの形を認め、その特徴をとらえたり、「しかく」「まる」などと自分たちで名前を付けたりできるように指導する。また、積み木や箱を使って、身の回りの具体物をつくることで立体の構成を行う。第2学年では、3本の直線で囲まれた図形を三角形、4本の直線で囲まれた図形を四角形ととらえることを学び、身の回りにある具体物から、直角三角形、正方形、長方形を取り出し、格子状に並んだ点を線でつないだり、竹ひごや色板を並べたり、紙を折ったり切ったりして図形を構成する活動を行う。第3学年では、定規やコンパスを使って、二等辺三角形や正三角形、円を作図する。ここで、二等辺三角形は二つの辺の長さが等しい三角形であること、二つに折ると二つの角がぴったりと重なることを確認することで図形の持つ性質に着目する。また、二等辺三角形、三角形が敷き詰められてできた模様、円によってつくられた模様を観

## 立体図形に対する感覚を豊かにする教材の提案

察する。第4学年では、立方体や直方体に関連して、直線の平行や垂直の位置関係について学び、立方体や直方体を観察して、見取図を基に頂点、辺、面やそれらの位置関係に着目したり、立体図形とその展開図との対応関係をとらえたりする。平行四辺形、台形、ひし形を観察することで、それぞれの性質を調べたり、共通している性質から図形を分類したりする。また、図形の定義や性質をもとにして、定規とコンパスを使って、平行四辺形、台形、ひし形を作図する。第5学年では、多角形や正多角形について学ぶ。ここでは、既習の正方形や正三角形を用いて考察する。図形の合同のとらえ方を理解したり、三角形は内角の和が $180^\circ$ 、四角形の内角の和が $360^\circ$ になるという性質を見出したり、説明したりする。辺の長さや角の大きさに着目して合同な図形を作図したり、立体の底面や側面という用語を学んでそれに着目することで角柱や円柱の展開図をかいたりする。

第5・6学年の6月における本時では、立方体と直方体に関する立体図形は既習であるものの、すべ

ての面が正三角形からできている正多面体は未習である。本時取り扱う立体図形の面の形はすべて正三角形であるため、面の数に着目しながら、その特徴を調べる活動を取り入れた。ここで大切にしていきたいことは、本時作成する多面体において「1頂点に集まる面の数はどこでも同じ」ということである。

正四面体は一つの頂点に三つの正三角形、正八面体は一つの頂点に四つの正三角形、正二十面体は五つの正三角形が集まっている。この考察から、正三角形の一つの角の大きさは $60^\circ$ であり、一つの頂点に正三角形が六つ以上集まると角が $360^\circ$ 以上になってしまうため立体ができないことが分かる。

小学校で扱う学習内容を超えた発展的内容を取り扱うことによって、立体図形に対する感覚、平面図形と立体図形を関連させる見方がより豊かなものになると考え、第4学年までの既習事項を生かしながらも、さらに発展した内容を取り扱うという実践を行った。

## 5. 指導の展開

指導のねらい

正四面体と正八面体の展開図を、試行錯誤を繰り返すことで、正しく作成することができる。

過程	ねらい	学習活動	指導援助																
導入	○問題場面を把握し、2つの立体がどのような形かを確認することができる。	<b>1. 問題を把握する</b> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">問題</div> サイコロについて考えよう。	・班作りをする。(4人班でなるべく同じ小学校が重ならないように) ・問題の紙を貼る。																
展開	○正四面体、正八面体の展開図をかくことができる。  ○サイコロの特徴について調べ、考察することができる。	<b>2. 立体を確認する</b> ・サイコロ①(正四面体)、サイコロ②(正八面体)を見て、全ての面が正三角形からできていることを確認する。 ・サイコロ①②の展開図を考えていくことを確認する。 <b>3. 課題を設定する</b> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">課題</div> サイコロ①②の展開図をかこう。 <b>4. 個人追究をする</b> ・①は正三角形が4つ、②は正三角形が8つある。 ・正三角形を4つ(8つ)を組み合わせて展開図をかいてみる。 ・自分のかいた展開図を組み立てて、サイコロが構成できるかどうか確認する。 ・2つの面が重なってしまうと、サイコロにならない。 ・組み立てたときに重ならないようにすればよい。	・正四面体、正八面体を提示する。 ・どちらのサイコロも、全ての面が正三角形であることを確認する。  ・課題の紙を貼る。  ・工作用紙、コンパス、はさみ、テープを配る。 ・手が止まっている児童に対しては、「それぞれのサイコロは何個の正三角形が組み合わさってできているかな。」などと問い、展開図に正三角形をいくつかつけばいいかを気付かせる。 ・うまく立体にならなかった児童に対しては、「どうしてサイコロにならないのだろう。」などと問い、重なっている部分があるから立体にならないことに気づかせる。  ・早くできた児童に対しては、ほかの種類の展開図を考えたり、サイコロ③(正二十面体)の展開図を考えたりするように促す。																
まとめ	○見つけた展開図について説明することができる。	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>面の数</th> <th>頂点の数</th> <th>辺の数</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>①正四面体</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>②正八面体</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>③正二十面体</td> <td>20</td> <td>12</td> <td>30</td> </tr> </tbody> </table> ・①は1つの頂点に3つの正三角形が集まっている。 ・②は1つの頂点に4つの正三角形が集まっている。 ・③は1つの頂点に5つの正三角形が集まっている。 ・1つの頂点に正三角形が6つ以上集まると角が $360^\circ$ 以上になるため、サイコロができない。 ・(面の数) + (頂点の数) - (辺の数) = 2 という関係がある。  <b>5. 班内で交流をする</b> ・見つけた展開図や特徴について説明する。  <b>6. まとめをする</b>  <b>7. アンケートを記入する</b>		面の数	頂点の数	辺の数	①正四面体	4	4	6	②正八面体	8	6	12	③正二十面体	20	12	30	・早くできた児童に対しては、ほかの種類の展開図を考えたり、サイコロ③(正二十面体)の展開図を考えたりするように促す。  ・それもできた児童に対しては、3つのサイコロの頂点、辺、面の数に着目して、立体の特徴(正多面体のできる条件、オイラーの多面体定理)などを考える。(学習プリントを配布する。)
	面の数	頂点の数	辺の数																
①正四面体	4	4	6																
②正八面体	8	6	12																
③正二十面体	20	12	30																

6. 子供たちの活動の様子

下記は授業内で使用した学習プリントである。

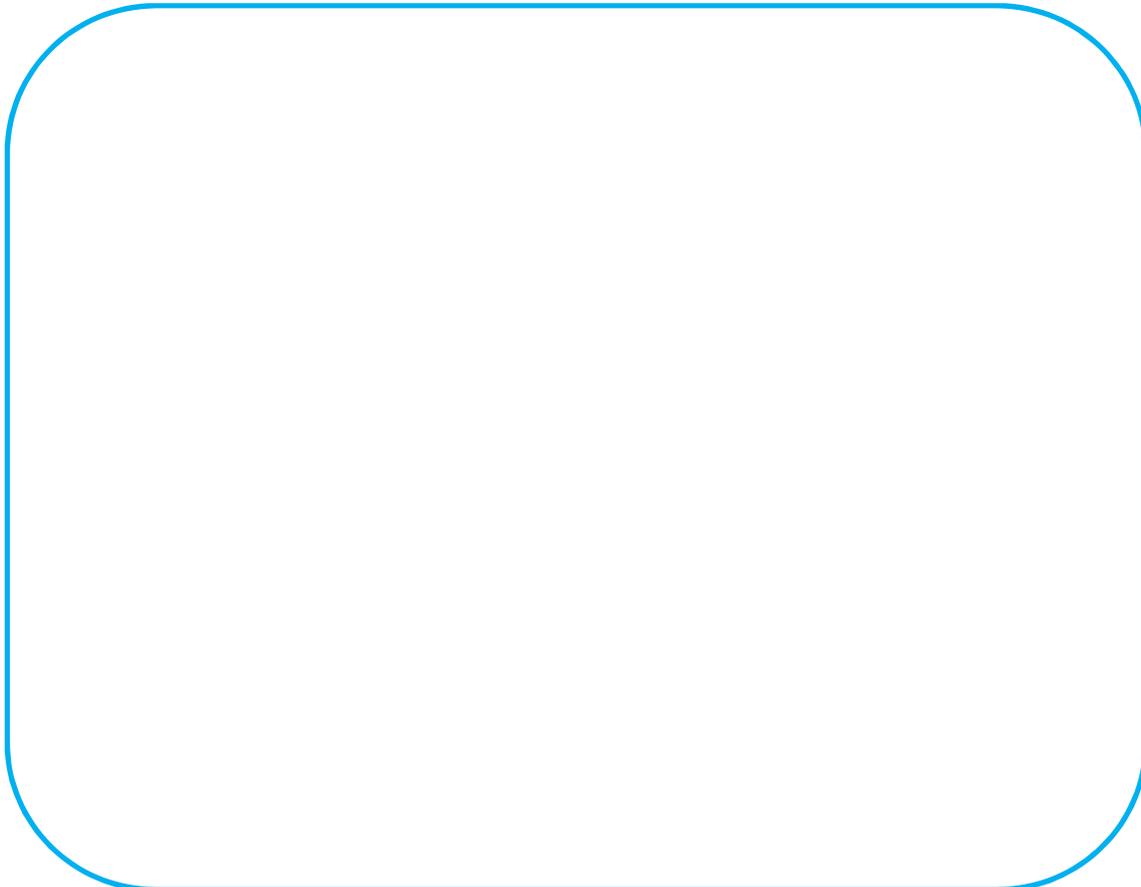
## 作ったサイコロについて調べよう

年 氏名 \_\_\_\_\_

○それぞれのサイコロについて調べてみよう。

	面の形	面の数	頂点の数	辺の数
サイコロ①				
サイコロ②				
サイコロ③				

○発見したこと



授業の導入において本時作成する3種類の立体図形(正四面体, 正八面体, 正二十面体)の模型(事前に作成したものを)を提示した。正八面体, 正二十面体については, 初めて目にするという子どもが多く, 初めて目にする立体に驚いた様子で, 模型をいろんな角度から眺めたり, 面の数を数えてみたりと, 提示した立体図形に興味を示す子どもの姿がみられた。本時取り扱う3種類の多面体は, すべての面が正三角形でできていることを確認する。授業では, (1)正四面体, (2)正八面体, (3)正二十面体という順で正多面体を作成するものとした。

### (1)正四面体

正四面体を作成する場面では, 正四面体が4つの正三角形からできていることから, 子どもたちはコンパスと定規を使って画用紙に4つの正三角形をかくことで展開図を作成していった。作成した展開図の線に沿って画用紙を折ることで正四面体を組み立てていった。なお, 今回はのりしろを考えないため, 組み立てた立体の表面上にセロハンテープを張ることで固定する。正四面体を作成することに関して, スムーズに作成していく子どもが多く, ひとつの正四面体を完成させてすぐもう一つ別の展開図を作成しようとする姿が多く見られた。

### (2)正八面体

正八面体を作成する場面では, 正八面体が8つの正三角形からできていることから, 正四面体を作成した時と同様の手順で正八面体を作成していった。画用紙に8つの正三角形を並べることで展開図を作成し, 作成した展開図を線に沿って切り取って組み立てていったが, 面同士が重なってうまく正八面体を組み立てられない子どもも何人かいた。また正三角形を8つ作図するということが苦戦している子どももいた。面同士が重なることでうまく正八面体を組み立てられない状態になった子どもたちは, 完成形の模型をいろいろな角度から眺めて, どう展開図を書いていけば良いのかということ

真剣に考えていた。中には作成した展開図をよく眺めて, 実際に組み立てる前にうまく組み立てられるのかどうかということを考えている子どももいた。

### (3)正二十面体

正二十面体を作成するのに至った子どもは5人ほどであった。正三角形を20個画用紙上に作図するということに対して戸惑っている姿もあれば, 正八面体の時のようにただ正三角形を面の数分並べるだけでは, 面同士が重なってしまってもうまく立体が組み立てられないことを考えて悩んでいる姿も多くあった。正二十面体ともなると, 面の数が多く模型を眺めながら考えつつも混乱する姿が多くあった。それでも, 完成させようとする姿, 一生懸命正三角形を作図する姿があり, お互い励まし合いながら正二十面体の作成に取り組んでいた。

授業の最後に作成したすべての面が正三角形でできている3つの正多面体について, 面の数, 辺の数, 頂点の数について調べ, 表を作成した。

	頂点の数	辺の数	面の数
正四面体	4	6	4
正八面体	6	12	8
正二十面体	12	30	20

作成した表をみて分かったこととして,

- 面の数は4の倍数
- 頂点の数は2の倍数
- 辺の数は6の倍数
- (面の数) $\times$ 1.5=(辺の数)
- (面の数)+(辺の数)-2=(頂点の数)
- (頂点の数) $\times$ 3-6=(辺の数)
- 面の数より頂点の数が多くはない

といった規則性が発表された。表を縦にみて関係を見つけようとする姿, 横にみて関係を見つけようとする姿が見られた。

授業後に行ったアンケートからは,

- 展開図は適当にかいても組み立てることができなかった。

## 立体図形に対する感覚を豊かにする教材の提案

- ・展開図にはたくさん種類がある。
- ・正八面体は上から見るとピラミッドになっている(正八面体を上半分で切るとピラミッドになる)。
- ・正八面体は上から見ると四角形。
- ・開き方を変えるだけでいろいろな展開図ができることが分かった。
- ・すべて線対称になっている
- ・一つの頂点に集まる正三角形の数は同じ

1種類の正多面体について展開図の種類が複数存在することに楽しさを感じている子が多く、作成に時間がかかる正二十面体の完成時の達成感を味わえたことが印象に残っている子も何人かいた。「楽しかった」「面白かった」という感想をかいている子がほとんどであった。

### 7. 授業のまとめと今後の課題

2時間という限られた時間の中で今回の授業を実施したが、全体を通してとても有意義な時間になったと思う。正八面体、正二十面体の展開図をかいて実際に作成することは、正三角形の作図の量が多いこと、面同士が重ならないような展開図を作成しなければならないことなどから、難易度の高い活動のように思っていた。しかしながら、授業時間内に正二十面体の完成までたどり着く子どもの数は予想以上に多く、全体の1割ほどに達していたことには驚かされた。全体を通して活動に熱心に取り組む子どもがほとんどで、休むことなく手を動かしている姿が見られた。中には正八面体の作成場面において、展開図を作成して組み立てたものの、面同士が重なり合ってしまったため、また展開図から作成しなおすという点で集中が切れかけている姿もあった。しかし、同じグループの子に励まされたり、先生にアドバイスをもらったり、また、完成にたどり着けた仲間の姿に感化されたりして、課題に取り組み続けることができていた。正二十面体の完成まで時間内にたどり着いた子どもにおいても、まだ課題に取り組んでい

る仲間を助けたり、完成した3種類の正多面体を見ながら、共通する点を必死に考えたりする姿があった。今回の授業の中で、立体図形と平面図形を何度も何度も交互にみることがどの子どももできたということは、立体図形と平面図形を結びつけて考えることができたといえるであろう。授業全体の流れに関しては、作業の時間を多くとったため楽しく活動できたと思われる。また途中で中間発表の場を設けたため、グループを超えた交流に発展していった点が非常に良かった。しかしながら、最後のまとめの交流に関する時間をあまりかけなかったため、本時扱った立体図形に関する共通の規則性についてはしっかりとまとめきれなかったという課題もある。授業前に想定していたこと以外に出てきた子どもの考えをもっと拾って全体に広めることができたらなおよかったと思う。意見交流だけでなく交流で出てきた意見をどう扱っていくかという点は今後の課題である。

### 8. 終わりに

今回の授業を通して、立体図形と平面図形を結びつけて考えることや、正多面体も含め立体図形に対する興味を持ってくれれば幸いである。

### 引用・参考文献

- [1] 文部省, 平成20年8月, 小学校学習指導要領解説 - 算数編 -, 東洋館出版社