岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 92-98

ミニマックス原理を題材とした高校生用の教材の開発と実践

後藤弘樹[1]，愛木豊彦[2]，柘植直樹[2]

「グリコじゃんけん」と呼ばれるじゃんけんから派生した遊びを題材とし，じゃんけんの手を出す確率の組の最適解を，ミニマックス原理から導きだす高校生用の教材を提案する。この問題を解決する過程で，学校の通常の授業で学習する内容を活用しながら，多くの場合分けを行う。その活動を通して，数学の有用性を感じ取ること，論理的な思考力を育むことができるよう，教材開発を行った。本稿では，授業実践の内容と結果を報告し，結果を分析する。
＜キーワード＞グリコじゃんけん，ゲーム理論，ミニマックス原理，線形計画法

1．序論

夏休み中に行われる高校数学セミナー用の教材を開発するにあたって，学校で学ぶ数学がこんなところで活用できるのか，という実感を得られるような教材を作ろうと考えた。そこで，多くの人が子どものころに行ったであろう「グリコじゃんけん」を教材として取り扱うことにした。

グリコじゃんけんの手の出し方については，既にいくつかの研究結果があり（[1] 参照），これを題材にした TV 番組（[2] 参照）も作られている。また，[3] では中学 3 年生を対象とした授業の題材としても取り上げられている。

グリコじゃんけんの手の出し方に対する考察は,「ゲーム理論」の一つであるミニマックス原理に基づいている。このことは 2 節で詳しく述べる。そこで示すように，グリコじゃんけんの最適な手の出し方を求めるにあたって，多くの場合分けを考える。そのような複雑な思考を通して，論理的な思考力を育むことができると考える。

また，本実践の結果は，[4] で簡単に紹介している。

2．ミニマックス原理

2.1. 最適戦略

まず，グリコじゃんけんのルールを説明する。じゃんけんを行い，勝った者が出した手に応じて進む。グーで勝った場合,「グリコ」と言いながら 3 歩進む。チョキで勝った場合,「チヨコレイト」と言いながら 6 歩進む。パーで勝った場合,「パイナツプル」と言いながら 6 歩進む。じゃんけんを繰り返し，先に目的地にたどり着いた者が勝ちとなるゲームである。

A, B の 2 人でこのゲームをすることとし，A(自分) がグーを出す確率を x，チョキを出す確率を y，パーを出す確率を z とする。このとき,「最適」ということをどのようにとらえるかが課題となる。このとらえ方の一つが，ゲーム理論において重要な考え方であるミニマックス原理（[5],[6]）である。

ミニマックス原理を簡単に説明する。まず自分が選択できる各手に対し，対戦相手が最善を尽くした状態，つまり，自分の被害が最も大きくなる状態を求める。その各手における自分の被害の最大値の中で，値が最も小さくなる手を選ぶことにする。このような手の選び方をミニマックス原理によって定まる戦

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

略という。

A \ B	グー	チョキ	パー
グー	0	3	-6
チョキ	-3	0	6
パー	6	-6	0

(表 1)

ここで，A, B の各手に対し，A の進む歩数を (表 1) で与え，A がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ x, y, z，B がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ a, b, c とする。

まず，A の進む歩数の期待値は,

$$\begin{aligned} & E(x,y,z,a,b,c) \\ = \ & 3bx-6cx-3ay+6cy+6az-6bz \end{aligned}$$

である。

ここで,

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \end{array} \right\}$$

$$E_1(x,y,z) = \min_{(a,b,c)\in\Omega_1} E(x,y,z,a,b,c)$$

とおく。

このとき，$E_1(x_*,y_*,z_*)$

$$= \max_{(x,y,z)\in\Omega_1}\left(\min_{(a,b,c)\in\Omega_1} E(x,y,z,a,b,c)\right)$$

を満たす $(x_*,y_*,z_*)\in\Omega_1$ を，ミニマックス原理で定まる最適戦略と呼ぶ。

ミニマックス原理によって定まる最適戦略を求める方法として，次の 3 つが考えられる。

(ア) 変数を増やすことで，線形計画法の問題に置き換え，それをシンプレックス法で解く方法

(イ) 変数の係数の符号に注目することで解を求める方法

(ウ) 線形計画法を 2 回使って解く方法

(ア) の解法は手順が長いので，ここでは省略する ([5],[6] 参照)。以下，(イ) と (ウ) を紹介する。

2.2. (イ) について

利得表を (表 1) のように与え，自分がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ x, y, z，相手がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ a, b, c とする。

1 回のじゃんけんで自分が進む歩数の期待値は,

$$E = 3bx-6cx-3ay+6cy+6az-6bz$$

となる。a, b, c について整理すれば

$$E = (6z-3y)a+(3x-6z)b+(6y-6x)c$$

ここで

$$A = 6z-3y, B = 3x-6z, C = 6y-6x$$

とおけば，$2(A+B)+C=0$ が成立する。

ここで，$(A,B,C) \neq (0,0,0)$ とすると，A, B, C のうち少なくとも 1 つは負である。なぜなら，A, B, C がすべて 0 以上かつ少なくとも 1 つは正だと仮定すれば，$2(A+B)+C>0$ となり，今回の条件を満たさないからである。

従って，$A<0$ を考えると，$E=Aa+Bb+Cc$ なので，$a=1, b=0, c=0$ とすると，$E<0$ となる。同様に，$B<0$ や $C<0$ のとき，$E<0$ となる。従って，$(A,B,C)\neq(0,0,0)$，つまり，$(a,b,c)\neq(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})$ とすると,

$$E_1(x,y,z)<0 \quad \text{かつ} \quad E_1(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})=0$$

なので，$E_1(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}) = \max_{(x,y,z)\in\Omega_1} E_1(x,y,z)$

よって，$(x,y,z)=(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})$ が最適解となる。

2.3. (ウ) について

利得表を (表 1) のように与え，自分がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ x, y, z，相手がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞ

れ a, b, c とする。1 回のじゃんけんで自分が進む歩数の期待値は，(イ) のときと同様に,

$$E = 3bx - 6cx - 3ay + 6cy + 6az - 6bz$$

となる。

x, y, z $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z=1)$ の値の組に対し，a, b, c $(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a+b+c=1)$ が変化したときの E の最小値 $E'(x, y, z)$ を求める。

$x+y+z=1, a+b+c=1$ より，c, z を消去すれば,
$E = (6-15y)a + (15x-6)b - 6x + 6y$
$(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1-x-y \geq 0)$
$(0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 1-a-b \geq 0)$
i)$15x-6=0$ のとき
$E = (6-15y)a - \dfrac{12}{5} + 6y$

(α)$6-15y=0$ のとき
$E=0$ より，$E'=0$ である。

(β)$6-15y>0$ のとき
$0 \leq a \leq 1$ より，$a=1$ で E は最小値をとる。よって，$E' = -\dfrac{12}{5} + 6y$ である。

(γ)$6-15y<0$ のとき
$0 \leq a \leq 1$ より，$a=0$ で E は最小値をとる。よって，$E' = \dfrac{18}{5} - 9y$ である。

ii)$15x-6 \neq 0$ のとき
$E = (6-15y)a + (15x-6)b - 6x + 6y$ より

$$b = \frac{15y-6}{15x-6}a + \frac{E}{15x-6} + \frac{6x-6y}{15x-6}$$

これを ab 平面上の 1 次関数とし，$(0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 1-a-b \geq 0)$ の範囲内での E の最小値を，傾きと E の係数の符号で場合分けをして求める。

[1]$\dfrac{15y-6}{15x-6}a > 0$ かつ $15x-6>0$ のとき
$(a, b) = (1, 0)$ で E は最小値をとる。よって，$E' = -6x - 9y + 6$

[2]$\dfrac{15y-6}{15x-6}a \geq 0$ かつ $15x-6<0$ のとき
$(a, b) = (0, 1)$ で E は最小値をとる。よって，$E' = 9x + 6y - 6$

[3]$\dfrac{15y-6}{15x-6}a \leq 0$ かつ $15x-6>0$ のとき
$(a, b) = (0, 0)$ で E は最小値をとる。よって，$E' = -6x + 6y$

[4]$-1 \leq \dfrac{15y-6}{15x-6}a < 0$ かつ $15x-6<0$ のとき
$(a, b) = (0, 1)$ で E は最小値をとる。よって，$E' = 9x + 6y - 6$

[5]$\dfrac{15y-6}{15x-6}a < -1$ かつ $15x-6<0$ のとき
$(a, b) = (1, 0)$ で E は最小値をとる。よって，$E' = -6x - 9y + 6$

以上より，各 x, y に対する E の最小値は

$$E' = \begin{cases} -6x - 9y + 6 \\ \quad (x > \frac{2}{5}, y > \frac{2}{5} \text{または} \\ \quad x < \frac{2}{5}, y > \frac{2}{5}, y > -x + \frac{4}{5}) \\ 9x + 6y - 6 \\ \quad (x < \frac{2}{5}, y < \frac{2}{5} \text{または} \\ \quad x < \frac{2}{5}, y > \frac{2}{5}, y \leq -x + \frac{4}{5}) \\ -6x + 6y \quad (x > \frac{2}{5}, y \leq \frac{2}{5}) \\ -\frac{12}{5} + 6y \quad (x = \frac{2}{5}, y < \frac{2}{5}) \\ \frac{18}{5} - 9y \quad (x = \frac{2}{5}, y > \frac{2}{5}) \\ 0 \quad (x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}) \end{cases}$$

$E'(x, y, z)$ が最大となる (x, y, z) の組を求める。そのために，$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1-x-y \geq 0$ の領域内で，上と同様に各領域ごとの最大値を考えればよい。

$$\max E'(x, y, z) = 0 \quad (x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5})$$

よって，$(x, y, z) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ が最適解である。

3．授業について

3.1. 題材について

上で述べたように，授業で考えるのは次の問題である。

「ミニマックス原理に基づいて，グリコじゃんけんの最適解を求めよ。」

既に述べたように，この問題を解く方法として，(ア)，(イ)，(ウ) の 3 つが考えられる。

(ア) の方法は，線形計画法の問題に書き換えることと，スラッグ変数を導入するシンプレックス法の説明をすることに時間がかかる。

また，(イ) の方法は，[2] でも取り上げられていることからもわかるように，解を簡単に求めることができる。しかしその一方で，この方法ではミニマックス原理を適用して考えていることが伝わりにくいと考えた。

以上のことから，本授業では解法として(ウ)の方法に誘導することにした。この方法は，2.3 節でも示したように，場合分けが複雑であるという欠点があるものの，$x+y+z=1$, $a+b+c=1$ より，変数を減らすことができる。従って，(ウ) の方法は高校の数学 II で学習する，不等式の表す領域における最大値及び最小値を求める問題の考え方さえ理解すれば，高校生でも用いることができる。

教科書で学習する内容に対する有用性を実感させたいと考えたので，本授業ではこの解法を取り上げることにした。また，複雑な場合分けを通して，論理的な思考力を育むこともできると考えた。

3.2. 授業のねらい

この授業を通して，生徒には，普段の生活の中や遊びの中にある問題を，学校で学習している数学で解決できることを知ってほしい。学校で学習する数学が世の中で役立つのか，という疑問に，今回のセミナーで少しでも事例を提示することによって，数学に対する取り組みがよりよい方向へ変わってくれることを意図している。

また，この授業を通して生徒につけさせたい力は，「負けない戦略」，つまりミニマックス原理がどのようなものであるかを理解する能力，またそれをグリコじゃんけんに適用したときにどのような結果になるのかについて，時間をかけてじっくりと論理的に考えられる能力である。本授業で得た知識と，今までに学校で学習した数学を組み合わせることで，難しい問題にも立ち向かっていける姿勢を養いたい。

以上を踏まえ，今回の授業のねらいを次の 2 点とした。

(1) 普段の生活の中や遊びの中にある問題を，学校で学習している数学で解決できることを知り，数学の有用性を実感する。

(2) ミニマックス原理を理解し，それをグリコじゃんけんに適用したときにどのような結果になるのかを順序立てて考えることを通して，論理的な思考力を育む。

4．実践と結果

4.1. 実践内容

平成 22 年 7 月 31 日，8 月 1 日に，岐阜大学にて，高校生を対象とした高校数学セミナーで実践を行った。

セミナーの流れは次の通りである。

・1 日目午前

1)「グリコじゃんけん」のルールを，実演を交えながら説明する。

2) 参加した高校生と，授業者がグリコじゃんけんで対戦し，先に 30 歩進んだ方を勝ちとする。高校生は普通にじゃんけんの手を出し，授業者はグー，チョキ，パーの絵が描かれた 10 枚のカードの中から無作為に 1 枚を選び，それを授業者の手として提示する。ここで授業者の持つ 10 枚のカードの内容は，グーが 4 枚，チョキが 4 枚，パーが 2 枚である。この割合は，この授業で最終的に求める

$$x=\frac{2}{5},\ y=\frac{2}{5},\ z=\frac{1}{5}$$

によって定めたものである。

事前の実験から，このカードの束で，ある程度多くの対戦をすれば，高い確率で勝ち越せることが分かっていたので，上のように高校生と実際に対戦することにした。当日も高校生を相手に勝ち越すことが出来たので，授業者の戦略（カードの割合）に興味を持たせることができた。

3) 2 日間かけて，この戦略の仕組みを明らかにしていくことを伝える。

4) 2 変数のときの線形計画法や期待値について学ぶ。ここから先は大学生もしくは大学院生 1 人と高校生数名で班を構成し，班ごとにテキストをもとに学習を進めていく。本稿では，そのテキストの詳細は省略する。

・1 日目午後

5) ゲーム理論についての学習を進める。ゲーム理論を学ぶ上で取り扱うゲームへの理解を深めるために，2 人組になって次のゲームをする。プレイヤーは表か裏のどちらかを選択して，選択した方を上向きにしてカードを出す。その出されたカードの表裏の組み合わせにより，(利得表 1) からプレイヤーの得点を決定し，得点の高い方を勝ちとする。

(利得表 1) には，A の立場から見た得点が記されていることを確認し，A と B のそれぞれの立場からゲームを行う。

A＼B	表	裏
表	1	5
裏	-3	10

(利得表 1)

この場合，A が表を出すと，B がどちらの手を出しても A の得点は正となるので，A が必ず勝つことになる。従って A は表を出せばよい。このとき B は被害を最小限にするために表を出す。このように，今回の利得表を用いたゲームでは，互いに出す手が必然的に一つに決まってしまう。そのことを，ゲームを通して理解させる。その後，授業者がミニマックス原理を説明し，それを「負けない戦略」と呼ぶことを確認する。

6) 5) で行ったゲームについて引き続き考える。相手プレイヤーがカードを無作為に出す場合でも，自分は 5) で考えたものと同じ手を出すことが最善であることを証明する。

・2 日目午前

7) 5) の利得表を変更し，同じルールのゲームをする。

A＼B	表	裏
表	1	-1
裏	-2	2

(利得表 2)

(利得表 2) では，互いに出す手が 1 つに決まらないことを，実際にゲームをして気づかせる。その上で，ミニマックス原理を用いて，表と裏を出す確率を求める。

・2 日目午後

8) 1)〜7) をもとに，グリコじゃんけんの「負けない戦略」，つまりミニマックス原理に則した最適なグー，チョキ，パーの出す確率を求める。

4.2. 実践結果，考察

ねらい (1) に関しては，授業後のアンケートから,「普段の授業で習っていることが役立つことが分かったので，これからの数学の授業はもっと楽しく受けられそうだ」,「高校で習う数学は一般的に役に立たないと思っていたが，今回のセミナーを通してそうでないと思った。」といった回答もあった。学校で学ぶ数学の活用場面を知り，数学の有用性を実感し，数学に対する考え方をより前向きにとらえる生徒が多くいた。従って，このねらいは達成できたものと考えている。

ねらい (2) に関しては,「自分の損を出来るだけ小さくする（リスクを少なくする）」や,

「失敗しても損が少なくなるように考える，慎重で正確な原理」といったようなアンケートの回答が得られた。ミニマックス原理がどのようなものなのか理解できていたと考えられる。また，テキストの前のページを参照しながら，今取り組んでいる問題をどう考えるかを，班内で「こうやって考えていけばうまくいくのでは。」と話し合い，試行錯誤しながら問題に取り組む姿が見られた。さらに，テキストを通じて学習した線形計画法と期待値，ミニマックス原理といったものと，学校の数学で学んできた場合分けなどの考え方を組み合わせ，答えを導くことができていた。アンケートの回答にも「1つの問題に対してこれほど時間を使うことはなかった。解いたときのあの感動はわすれられません。」という声もあり，じっくりと論理的に考える生徒の姿を育むことができたと感じている。

以下に生徒の感想を紹介する。

・解いたときの感動がすごかった。
・戦略を数学で表せるなんてすごい。
・運だけだと思っていたじゃんけんを数学で解決できてすごいと思った。
・最後の解が出たときは，改めて数学の良さを実感できた。
・ゲーム理論を自分の肌で感じることで，数学の楽しさと難しさを再確認できた。
・多くの視点から，1つの解を見つけ出すことの面白さを学んだ。
・数学は色々なことに使えるのだと驚いた。
・基本的に自分たちで考えることができ，力がついたと思った。
・長時間同じ問題に取り組む大切さがわかった。
・早くグリコじゃんけんをしてみたい。

5．今後の課題

1日目の内容が簡単すぎたことが，まず反省点として挙げられる。参加者の学校学年が多様であったため，考える時間を十分にとった予定を組んでいた。そのためか，進度の早い生徒は午前午後ともに1時間強で内容を理解し，解き終わっていた。対照的に2日目は，グリコじゃんけんの負けない戦略を時間内に導き出せない生徒が数人いた。1日目に関しては，学んだことを応用して挑戦できるような問題を用意する，もしくは，問題に取り組む時間をもう少し簡略化し，2日目のグリコじゃんけんの考察の時間を増やした方が良かったのではないか，と反省している。

今後は，ゲーム理論への理解をより深め，普段の生活の中や遊びの中にある数学を，学校で学習している数学を用いて解決できる喜びの味わえる教材を開発し，実践していきたいと考えている。

最後に，授業実践にあたり，多大なご協力をいただいた関係者の皆様に心から感謝いたします。

引用文献

[1] 尾崎雄一郎，2010，グリコ･チョコレート･パイナップル・ゲームの最適混合戦略， 名城論叢，第10巻第4号，pp.39-41.
[2] ビートたけし他出演，2008，たけしのコマ大数学科4限目，ポニーキャニオン. [3] 武蔵振一郎，2009，リスクマネージメントの概念形成を目指した授業の開発 ―ゲーム理論からギャンブルまで―， 授業実践開発研究，第2巻，pp.27-34.
[4] 後藤弘樹・愛木豊彦，2010，ゲーム理論と線形計画問題を題材とした教材の開発と研究，数学教育学会臨時増刊号，pp.80-82.
[5] 小山昭雄，森田道也，1980，現代数学レクチャーズ D-1 オペレーションズ・リサーチ，培風館.
[6] 依田浩，1981，工学系のための OR，朝倉書店.