岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 62-91

図形領域における教材や授業の開発とその実践
～方べきの定理とその発展的学習‘ 反転 ’から数学の面白さや有用性を学ぶ～

安藤広樹[1]，栢植直樹[2]，山田雅博[2]

高校数学セミナーの場をお借りし，主に高校生を対象とした授業を展開した。内容は図形に関して学習してきたことを利用した，新たな性質の証明や考察である。具体的には，中学校で学習した円周角の定理などを用いて，高等学校で学習する「方べきの定理」や「方べきの定理の逆」とよばれる定理を証明し,「反転」という変換について学ぶ。すなわち，今回の高校数学セミナーでは，数学A「平面図形」に関する学習を深めながら,「反転」へとつなげる。本実践を通して，命題を導き出す楽しさやその命題の有用性を実感させるためには，学習した定理の応用例を提示することが有効な手段の１つであることを理解した。この理解に至ったことも本実践の大きな収穫であると考えている。
＜キーワード＞数学の有用性，円周角の定理，方べきの定理，方べきの定理の逆，反転

1. はじめに

高等学校学習指導要領解説 [1, p.49] には,「中学校において学習した基本的な作図や三角形の合同条件，相似条件などの図形の性質を基にして，高等学校の数学Aの学習においては，三角形の性質や円の性質など平面図形に関する基礎的な内容についての理解を深め，それらを事象の考察に活用できるようにするとともに，図形に対する直観力・洞察力を養い，図形の性質を論理的に考察し表現する能力を育成することを目的としている」と書かれている。

著者は幾何学を学習する中で，美しい定理や性質，証明方法を学んだ。同時に既習の知識があれば新しい証明方法に辿り着ける場合があるということも学んだ。

著者は，これらのことを高校生にも体験して欲しいと考え，高校数学セミナーにおいて高校生を対象とした授業を展開することとした。内容は，図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行うというものである。既習の円周角の定理 [2] などを用いて，高等学校 [3] で学習する「方べきの定理」や「方べきの定理の逆」とよばれる定理を導き出し,「反転」について学ぶ。つまり，今回のセミナーでは，数学A「平面図形」に関する学習を深めながら，反転 [4] へとつなげる。

反転とは，平面における円に関する鏡映変換である。なお，反転の厳密な定義は，次節で詳しく述べる。ここでは，反転を実践の題材とした理由について述べる。まず，高等学校で学習する内容と反転との関連性，および反転の数学的な応用例について述べる。高等学校学習指導要領解説 [1, p.49] には,「方べきの定理」や「方べきの定理の逆」を図形の性質の考察に活用できるようにすること，と書かれている。しかし，数学Aの内容を見ると，必ずしも具体的な活用の場面が多いようには感じられない。反転には，様々な性質が知られており，その幾つかは「方べきの定理」や「方べきの定理の逆」を用いて示すことができる。すなわち，反転の幾つかの性質の証明を行う過程で，これらの定理の具体的な活用

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

の場面を見いだすことができる。また，反転の応用例として，ハップスの円環定理[4,p.41]というものが知られている。この定理は，平面図形に関する問題を大変エレガントに証明するものである。座標を用いた，地道な計算による証明も可能だが，ハップスは反転を用いて実に鮮やかな証明を与えた。ハップスの円環定理は，与えられた複雑な問題を，反転という円に関する鏡映変換を用いて非常に平易な問題に置き換えるというものであり，反転の有用性を示す応用例である。

著者は，図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行うことを通して，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感して欲しいと考え，反転を題材とした実践を行うこととした。生徒には，既習の内容を用いて演繹的に新たな性質を導き出すときの達成感を感じて欲しい。既習の円周角の定理などを用いて，高等学校で学習する「方べきの定理」や「方べきの定理の逆」とよばれる定理を導き出し，さらには反転の幾つかの性質を証明する。これらの過程を体験することによって，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさが実感できるのではないかと考えた。反転の有用性を示す応用例であるハップスの円環定理については，時間の制約もあり，ここでは扱わないこととした。

この実践は，生徒達が論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感し，高等学校学習指導要領解説にあるような能力を育成することをねらいとしている。

2．教材と授業の概要

扱う教材と授業の概要について，各々簡単に述べる。なお，扱う教材のより詳細な内容は，3節で述べる。また，実践の計画は，4節で述べる。主題は,「方べきの定理とその応用」である。

(1) 反転の定義

まず，一般的な反転の定義を示す。

〇反転の定義「反転とは，円に関する鏡映変換である。」

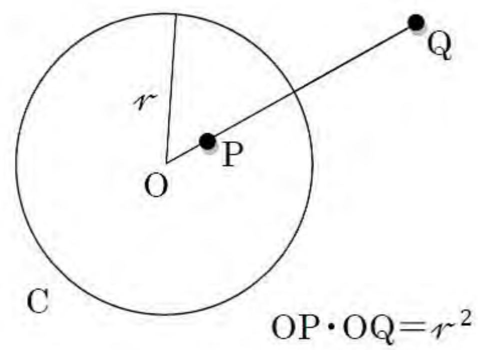
すなわち，中心をO，半径rの円Cがあるとき，円Cに関する反転αとは，次のような変換をいう。

$$\alpha : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$$

ただし，O，P，QまたはO，Q，Pはこの順で一直線上にあり，

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = r^2$$

をみたす。以下に，点がO，P，Qの順で一直線上にある場合の図を示す。



高校生に対して定義を行う際,‘ 変換 ’という言葉を‘ 移動 ’という易しい言葉に置き換えて高校生には示した。[5]では，図形の移動という言葉が導入されたが，反転による点の移動という言葉を使用しても生徒にとって抵抗感はほとんど無いと考え，移動という言葉を用いることとした。

また，定義を行う際，P，Qの順を指定しないと，他の生徒の発表を聞いて自分の解答を見なおすときに混乱が生じるかも知れないと考え,「O，P，Qはこの順で一直線上にある」と提示することにした。このため，反転αは円の内部（ただし，円の中心Oは除く）を外部へ移す移動として提示し，定義域を円の内部に限定させるという方法を取った。そして，円の外部については，円の内部の点Pを移動

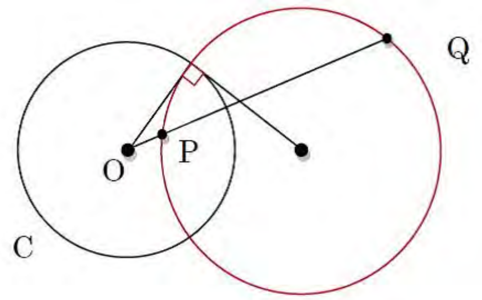
した点Qについてのみ，α(Q)= Pとなることを図を用いて直感的に押さえるにとどめた。また，円の中心Oの移動についても定義域から除外することを，理由を添えずに口頭で説明した。

(2) 最終的に証明する命題

高校数学セミナー最終段階において，既習の知識を利用して証明する命題が二つある。以下に，我々が最終段階で証明させたい二つの命題を示す。

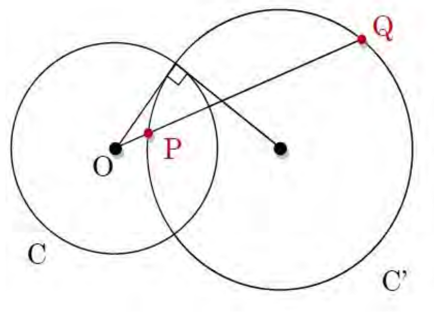
命題 1

円Cに関する反転をαとおく。α (P) = Q, α(Q) = Pをみたす2点P，Qをとおる円は円Cと直交する。



命題 2

円Cに関する反転をαとおく。円Cと直交する円C’ に対し，円Cの中心Oを通る直線を円C’ と2点で交わるように引く。このとき，2つの交点のうち，Oに近い方の点をP，そうでない方の点をQとすると，α(P) = Q, α(Q) = Pとなる。



(3) 授業のねらい

著者は，数学A「平面図形」に関する学習を深めながら,「反転」へとつなげていくという授業を「方べきの定理とその応用」と題し，展開していこうと考えた。すなわち，図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行っていく過程を高校生に味合わせたいと考えた。

以上から，本教材のねらいを「図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行うことを通して，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感することができる。」とした。

3. 実践で扱った定義や定理の紹介

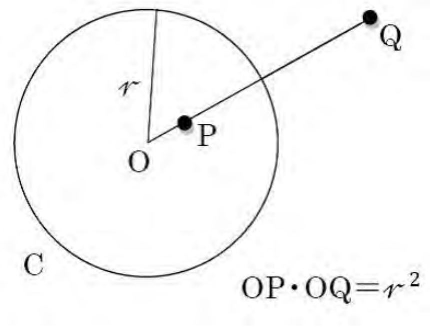
本節では，実践で扱った定義や定理を紹介する。なお，本節で紹介する定義や定理は，高校セミナーにおいて受講生に対して提示した文体を用いて述べる。

(1) 反転の導入

2節 (1) で述べたように,‘ 変換 ’という言葉を‘ 移動 ’という言葉に置き換え，反転の定義をする。以下が高校生に向けた反転の定義である。

「中心O，半径rの円Cがあたえられています。円の中にOとは異なる点Pがあります。このとき半直線OP上の点QをOP·OQ= r^2 によって定めます。この移動を反転といいます。」

また，以下の図を用いて，反転による幾つかの点の移動を具体的に示す。

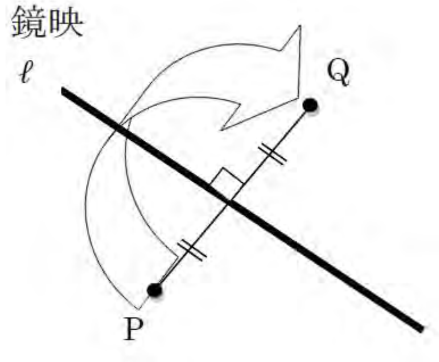


(2) 線対称，鏡映

2節で示したように反転は‘ 鏡映 ’という言葉を用いて定義される。鏡映という概念を

理解する上で，線対称という概念の理解は必要であると考えた。よって線対称から鏡映という概念の理解へとアプローチをすることとした。鏡映の定義を以下のように与えた。

「以下の図において，点 P を点 Q に移動させたように，点をある定まった直線 ℓ を軸として裏返す移動を直線 ℓ を対称軸とする対称移動といいます。このような移動を，ℓ に関する鏡映とよびます。」



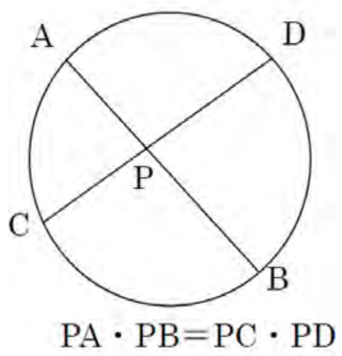
(3) 方べきの定理

方べきの定理は，数学 A で学習する事項であるが，セミナーを受講する高校生は学習していない。よって方べきの定理 I, II それぞれについて紹介し，証明をしていく。方べきの定理 I においては 2 つに場合分けして証明する。詳しくは，以下で述べる。方べきの定理 II と方べきの定理 II の逆定理が，反転に関する命題１，２の証明に用いられる。

以下に方べきの定理とその証明を示す。ここで，証明の中で用いられる各定理は基本的なものである。しかし，後で再度紹介し，その証明も示すこととする。その理由は，高校セミナーにおいて復習事項として，各定理を証明させたからである。方べきの定理 I については，円周上に 4 点 A，B，C，D が与えられたとき，弦 AB と CD の交点が円の内部に存在する場合と，それらを延長してできる直線の交点が円の外部に存在する場合がある [3, p.113]。前者をパターン１，後者をパターン２と呼ぶこととした。

方べきの定理 I(パターン 1)

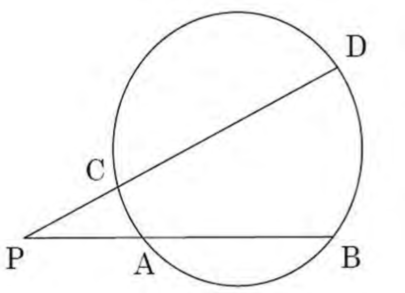
4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあります。A，B，C，D はすべて異なる点とします。2 つの線分 AB，CD の交点が存在するとき，その点を P とすると PA・PB ＝ PC・PD が成り立ちます。



（証明）△ ACP と△ DBP について
対頂角より，∠ APC ＝∠ DPB
円周角の定理より，∠ ACP ＝∠ DBP
（円周角の定理は後に確認）
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ ACP ∽△ DBP
相似な図形の対応する辺の比は等しいので
PA:PD ＝ PC:PB
ゆえに，PA・PB ＝ PC・PD （証明終）

方べきの定理 I(パターン 2)

4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあります。A，B，C，D はすべて異なる点とします。2 つの直線 AB，CD の交点 P が円の外部にあるとき，PA・PB ＝ PC・PD が成り立ちます。



（証明）△ PAC と△ PDB について
共通する角より，∠ APC ＝∠ DPB
円に内接する四角形において，四角形の外角

はそれと隣り合う内角の対角に等しいので（円に内接する四角形の性質は後に確認）

$$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PDB}$$

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle \mathrm{PAC} \backsim \triangle \mathrm{PDB}$$

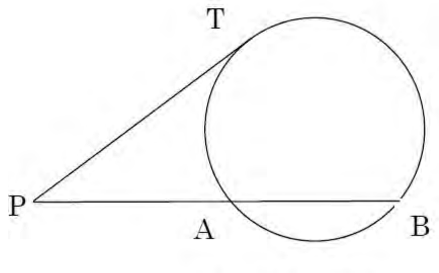
相似な図形の対応する辺の比は等しいので

$$\mathrm{PA:PT} = \mathrm{PT:PB}$$

ゆえに，PA・PB ＝ PC・PD　　（証明終）

方べきの定理 II

円の外部に点 P があります。点 P から円に接線を引き，それによってできる接点を T とします。点 P を通ってこの円と 2 点で交わる直線を引きます。それによってできる交点をそれぞれ A，B とします。このとき PA・PB ＝ PT^2 が成り立ちます。



PA・PB＝PT^2

（証明）△ PAT と△ PTB について
共通する角より，∠ APT ＝∠ TPB
△ ABT に接弦定理を適用して

$$\angle \mathrm{PTA} = \angle \mathrm{ABT}$$

（接弦定理は後に確認）
すなわち。∠ PTA ＝∠ PBT
2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle \mathrm{PAT} \backsim \triangle \mathrm{PTB}$$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので

$$\mathrm{PA:PT} = \mathrm{PT:PB}$$

ゆえに，PA・PB ＝ PT^2　　（証明終）

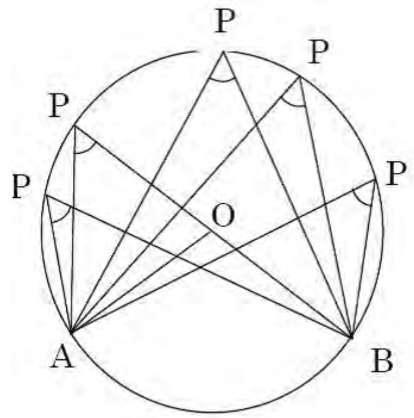
(4) 方べきの定理の証明の際に用いられた各定理の紹介および証明

円周角の定理

以下の図のように，円の弧 AB の両端 A，B と弧 AB を除いた円周上の点 P を結んでできる∠ APB を，弧 AB に対する円周角といいます。1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分です。すなわち，円の中心を O とすると

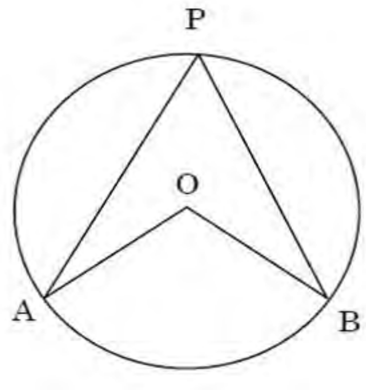
$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$$

といえます。



円周角の定理を証明する際には，直線 OP が点 A，B を除いた弧 AB と交わる場合，直線 OP が点 A または点 B をとおる場合，直線 OP が弧 AB と交わらない場合，の３つの場合に分けて証明する必要がある。

・直線 OP が点 A，B を除いた弧 AB と交わる場合



（証明）点 P と点 O を結ぶ直線を引く。その直線が，円と交わる点を P’ とする。OA，OP は円の半径なので，△ OAP は二等辺三角形である。

二等辺三角形の 2 つの底角は等しいので，

$$\angle OAP = \angle OPA$$

三角形の 2 つの内角は残す角の外角と等しいので，

$$\angle OAP + \angle OPA = \angle AOP'$$

よって，$2\angle OPA = \angle AOP'$

同様にして，$\angle OBP = \angle OPB$

$$\angle OBP + \angle OPB = \angle BOP'$$

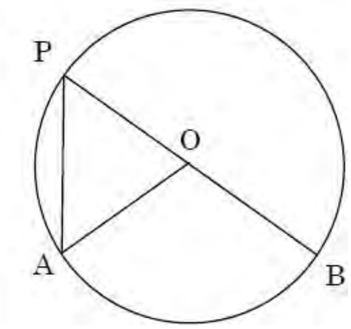
$$2\angle OPB = \angle BOP'$$

$$\angle APB = \angle OPA + \angle OPB$$

$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOP'$ なので

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$ （証明終）

・直線 OP が点 A または点 B をとおる場合



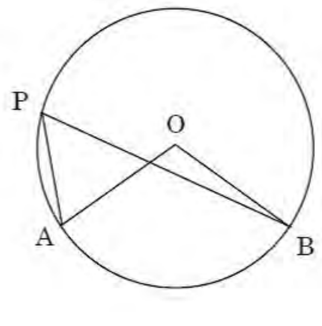
（証明）OA，OP は円の半径なので，△OAP は二等辺三角形である。二等辺三角形の 2 つの底角は等しいので，$\angle OAP = \angle OPA$

三角形の 2 つの内角は残す角の外角と等しいので，$\angle OAP + \angle OPA = \angle AOB$

$$2\angle OPA = \angle AOB$$

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$ （証明終）

・直線 OP が弧 AB と交わらない場合



（証明）点 P と点 O を結ぶ直線を引く。その直線が，円と交わる点を P’ とする。OB，OP は円の半径なので，△OBP は二等辺三角形である。二等辺三角形の 2 つの底角は等しいので，$\angle OBP = \angle OPB$

三角形の 2 つの内角は残す角の外角と等しいので，

$\angle OBP + \angle OPB = \angle BOP'$

よって，$\angle BOP' = 2\angle OPB$ …①

同様にして，$\angle OAP = \angle OPA$

$$\angle OAP + \angle OPA = \angle AOP'$$

よって，$\angle AOP' = 2\angle OPA$ …②

②－①より

$$\angle AOP' - \angle BOP' = 2(\angle OPA - \angle OPB)$$

$$\angle AOB = 2\angle APB$$

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$ （証明終）

よって，いずれの場合も弧 AB に対する中心角が，円周角の 2 倍になっていることから 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定である。以上で，証明を終わる。

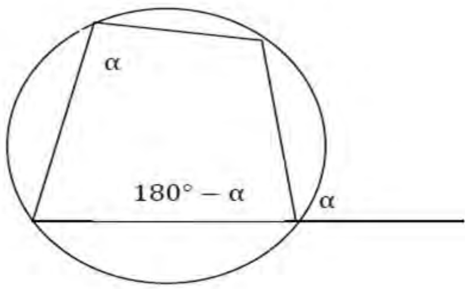
円に内接する四角形の性質

四角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に内接するといい，その円を四角形の外接円といいます。

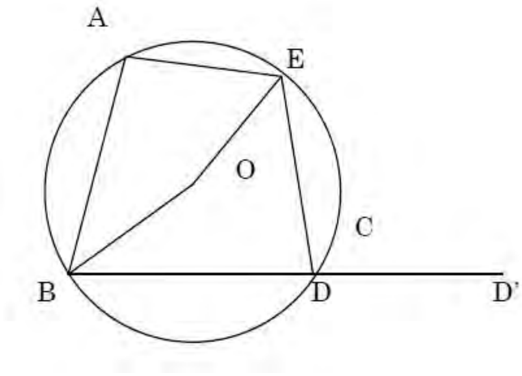
そして，四角形が円に内接するとき

I　四角形の対角の和は 180 °です。

II　四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいです。



外接円の中心を O とすると図は以下のようになる。



I　四角形の対角の和は 180 °です。

（証明）∠ A ＝ x，∠ D ＝ y とおく。円周角の定理より，中心角は円周角の 2 倍なので，弧 EDB，弧 EAB に対する中心角はそれぞれ $2x$，$2y$ と表せる。$2x$ ＋ $2y$ ＝ 360 °であるから，x ＋ y ＝ 180 °である。よって，四角形の対角の和は 180° である。　　　　　　（証明終）

II　四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいです。

（証明）∠ A ＝ x，∠ D ＝ y とおく。線分 BD を D 側に延長し，半直線 BD 上にあり，線分 BD 上にない点を D' とする。四角形の対角の和は 180 °であるから y ＝ 180 °–x とおける。∠ EDD' は∠ D の外角であるから

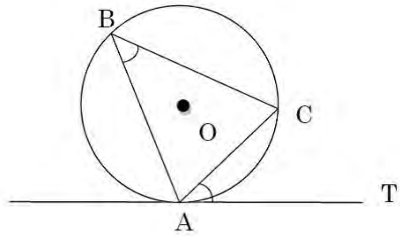
∠ EDD　'＝ 180 °–y

ゆえに，∠ EDD　'＝ 180 °–(180 °–x)

∠ EDD' ＝ x よって四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。　　（証明終）

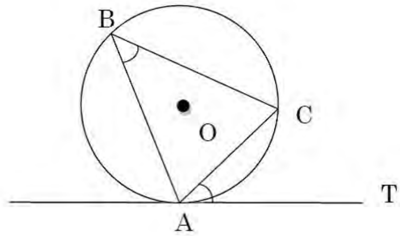
接弦定理

円の接線と接点を通る弦とがはさむ角は，その角内にある弧に対する円周角に等しいです。円の弦 AC と，その端点 A における接線 AT が作る∠ CAT は，その角の内部に含まれる弧 AB に対する円周角∠ ABC に等しいです。円の中心を O とすると図は次のようになります。



この定理を証明する際には，∠ ABC が鋭角である場合，直角である場合，鈍角である場合，の３つの場合に分けて証明する必要がある。

・∠ ABC が鋭角の場合



（証明）点 A と点 O を結ぶ直線を引く。その直線が，円と交わる点を B' とする。∠ ABC と∠ AB'C はいずれも弧 AC に対する円周角だから

∠ ABC ＝∠ AB'C

AB' は円の直径だから，円周角の定理より

∠ ACB' ＝ 90 °

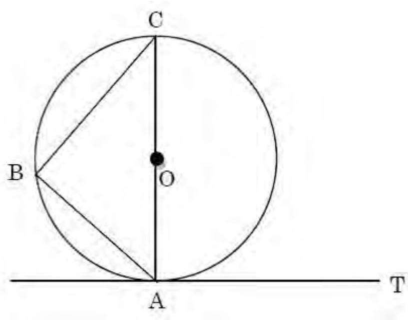
よって，∠ CAB　'＋∠ CB'A ＝ 90 °①

一方，∠ CAT ＋∠ CAB　'＝ 90 °②

①，②より，∠ CB'A ＝∠ CAT

ゆえに，∠ ABC ＝∠ CAT　　　　　（証明終）

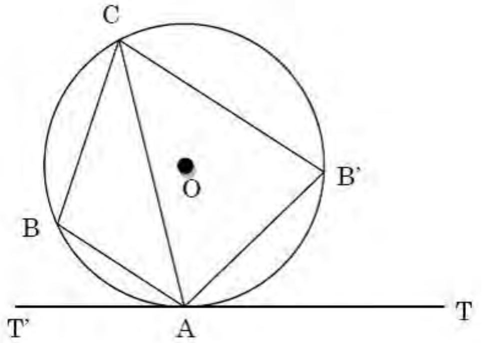
・∠ ABC が直角の場合



（証明）∠ ABC ＝ 90 °のとき，弦 AC は円の直径となる。なぜなら，円周角の定理よ

り弧 AC に対する中心角∠ AOC は円周角∠ ABC の 2 倍であるから∠ AOC ＝ 180 °となる。つまり弦 AC は円の直径となる。よって点 A における円の接線は AC に対して垂直となるので，∠ CAT ＝ 90 ℃である。ゆえに，
∠ ABC ＝∠ CAT （証明終）

・∠ ABC が鈍角の場合



（証明）直線 AC に対して，点 B とは逆側にある円周上の点 B’ を適当にとる。四角形 ABCB’ は円に内接するので，四角形の対角の和は 180° である。すなわち

∠ ABC ＋∠ AB’C ＝ 180 °①

∠ ABC が鈍角であるから∠ AB’C は鋭角である。よって,「・∠ ABC が鋭角の場合」に証明した接弦定理を用いて，

∠ AB’C ＝∠ CAT’

また，∠ CAT’ ＋∠ CAT ＝ 180 °より

∠ AB’C ＋∠ CAT ＝ 180 ° ②

①, ②より，∠ ABC ＝∠ CAT （証明終）

方べきの定理 I の逆定理

A，B，C，D はすべて異なる点とします。2 つの線分 AB，CD，またはそれらを延長した直線の交点を P とするとき PA・PB ＝ PC・PD が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあります。

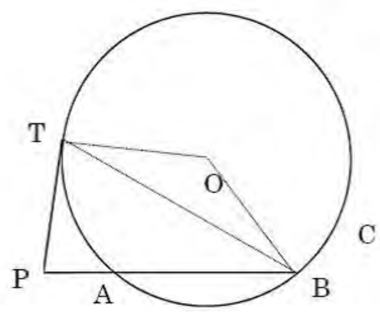
（証明）△ ABC を考えると，△ ABC には外接円がただ一つ存在する。△ ABC の外接円と半直線 PD の交点を D’ とする。A，B，C，D’ は同一円周上にあるので，方べきの定理より，

PA・PB ＝ PC・PD’

また仮定より，PA・PB ＝ PC・PD
よって，PC・PD’ ＝ PC・PD
ゆえに，PD ＝ PD’
したがって P，D，D’ が同一直線上にあるので，D を始点とする半直線 PD 上の 2 点 D，D’ は一致し，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある（図は方べきの定理 I(パターン 1,2) を参照）。 （証明終）

方べきの定理 II の逆定理

点 P とそれを始点とする 2 つの半直線があります。一方の半直線上に異なる 2 点 A，B があり，もう一方の半直線上に点 T があるとします。このとき，PA・PB ＝ PT^2 ならば PT は△ ABT の外接円の接線になります。



（証明）仮定より PA・PB ＝ PT^2 である。△ ABT の外接円を考える。その外接円の中心を O とする。△ PAT と△ PTB について考える。PA・PB ＝ PT^2 を比の形で表わすと

PA：PT ＝ PT：PB

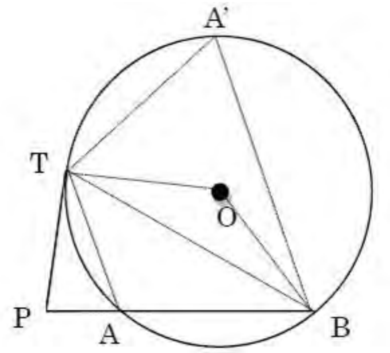
共通する角より

∠ APT ＝∠ TPB

2 組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しいので

△ PAT ∽△ PTB

よって，∠ PAT ＝∠ PTB である。ここで，∠ PAT ＝∠ PTB ＝ α とおく。直線 TB に対して，点 A とは逆側にある円周上の点 A’ を適当にとる。



今，四角形 TABA' は，△ ABT の外接円に内接している。よって，円に内接する四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいので

$$\angle \mathrm{PAT} = \angle \mathrm{TA'B} = \alpha$$

円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{TOB} = 2\alpha$$

OT，OB は，△ ABT の外接円の半径にあたるので，△ TOB は二等辺三角形である。二等辺三角形の 2 つの底角は等しいので，

$$\angle \mathrm{OTB} = 90^\circ - \alpha$$

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{OTP} &= \angle \mathrm{PTB} + \angle \mathrm{OTB}\\ &= \alpha + (90^\circ - \alpha)\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

これは OT と PT が垂直に交わっていることを意味する。よって，PT は△ ABT の外接円の接線になっている。（証明終）

(5) 反転とそれに関する命題

2 節で示したように反転は‘鏡映’という言葉を用いて定義される。まず，授業の最初の場面において，鏡映という言葉を定義し，そのイメージを説明する。そして，授業の後半において，反転とはいわば円に関する鏡映移動であると，述べる。さらに，反転の定義を受講生に示す。講座で用いる反転の定義を以下に述べる。

〇受講生向けの反転の定義

反転とは，いわば円に関する鏡映移動です。中心を O，半径 r の円 C があるとき，円 C に関する反転とは，次のような移動です。

$$\alpha : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$$

(α は P を Q に移す移動といいます) O，P，Q はこの順で一直線上にあり，

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = r^2$$

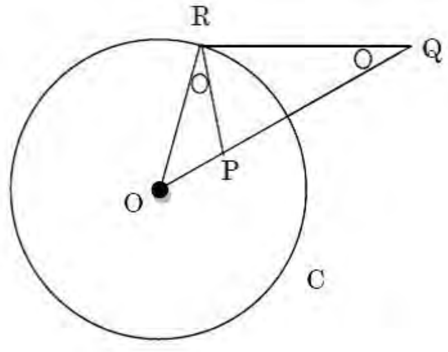
をみたします。

2 節の (2) でも述べたが，受講生向けの反転の定義において，反転 α は円の内部（ただし，円の中心 O は除く）を外部へ移す移動として提示し，定義域を円の内部に限定させるという方法を取った。そして，円の外部については，円の内部の点 P を移動した点 Q についてのみ，α(Q) = P となることを図を用いて直感的に押さえるにとどめた。また，円の中心 O の移動についても定義域から除外することを，理由を添えずに口頭で説明した。

以下で，高校セミナーで扱う，反転の定義から導かれる性質や命題１と２，およびそれらの証明について記述する。

反転の定義から導かれる性質

点 P が円 C の内部にあって α(P) = Q をみたすとする。円 C の円周上にあり，線分 OQ 上にない点を R とするとき，∠ ORP ＝∠ OQR がいえます。



（証明）△ ORP と△ OQR において共通する角より，

$$\angle \mathrm{ROP} = \angle \mathrm{QOR} \qquad ①$$

反転の定義より，OP・OQ ＝ r^2 であるから，比の形で表わすと OP：r ＝ r：OQ すなわち

OP：OR ＝ OR：OQ　　②

①，②より，△ ORP と△ OQR の 2 組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しいので

△ ORP ∽△ OQR

相似な図形の対応する角は等しいので，

∠ ORP ＝∠ OQR　（証明終）

2 つの円が直交するという概念

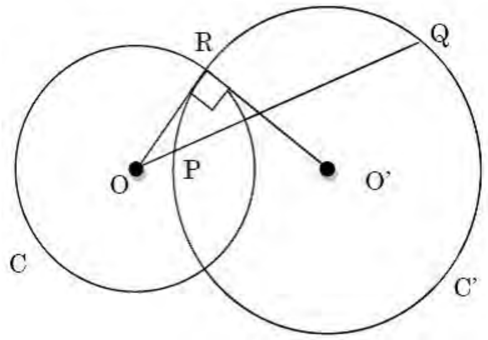
命題 1 と 2 においては，2 つの円が直交するという概念の理解が必要になってくる。高校生には，以下のように定義することとした。

2 つの円が直交しているとは，その 2 つの円が共有点をもち，その共有点における接線が直交しているときを言います。

命題 1

円 C があり，円 C に関する反転を α とおきます。α(P) ＝ Q，α(Q) ＝ P をみたす 2 点 P，Q をとおる円は円 C と直交します。

（証明）円 C の中心を O，半径を r とする。このとき，α(P) ＝ Q，α(Q) ＝ P をみたす点 P，Q を考える。P，Q をとおり，円 C と交点を 2 つ持つような円を C’，その中心を O’ とする。円 C と円 C ’の交点の１つを R とする。



反転の定義より

OR^2 ＝ r^2 ＝ OP・OQ

よって，方べきの定理 II の逆定理より，OR は，△ PQR の外接円すなわち円 C’ の接線である。従って，OR と O’R は，直交している。また，O’R は円 C の接線でもある。それゆえ円 C と円 C ’は R で直交している。（証明終）

命題 2

円 C があり，円 C に関する反転を α とおきます。円 C と直交する円 C’ に対し，円 C の中心 O を通る直線を円 C’ と 2 点で交わるように引きます。このとき，2 つの交点のうち，O に近い方の点を P，そうでない方の点を Q とすると，α(P) ＝ Q，α(Q) ＝ P となります。

（証明）円 C と直交する円 C’ を考える。円 C と円 C’ の交点の１つを R とする。円 C の中心 O をとおり，円 C’ と 2 点で交わる直線を引く。その交点を P，Q とする。円 C と円 C ’は直交しているから，OR は円 C’ の接線である。方べきの定理 II より OP・OQ ＝ OR^2 が成り立つ。これは反転の定義そのものであるから α(P) ＝ Q が成り立つ。また，α(Q) ＝ P もみたす。（図は命題 1 を参照）（証明終）

4. 実践の計画

(1) 実践について

平成 23 年 8 月 6 日（土曜），7 日（日曜）の 2 日間にわたり，高校数学セミナーにおいて授業を実施した。会場は，岐阜大学教育学部 B104 教室であり，参加者は 21 名であった。内訳は，中学生が３名，高校１年生が１４名，高校２年生が２名，高専生が２名であった。講座名は,「世界を裏返してみよう」である。

(2) 実践の展開

授業のねらいは，第 2 節でも述べたが,「図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行うことを通して，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感することができる。」とした。また，第 1 日目は，午前中を第 1 時，午後を第 2 時と呼ぶ。第 2 日目は，午前中を第 3 時，午後を第 4 時と呼ぶことにする。各時の内容やねらいについて述べる。

〇第１時について
「内容」
・反転の導入
・線対称，鏡映
・方べきの定理 I(パターン 1) の証明
・円周角の定理の証明
「ねらい」
・方べきの定理 I(パターン 1) が証明できる。
・円周角の定理が証明できる。
・反転について興味が持てる。
〇第２時について
「内容」
・方べきの定理 I(パターン 2) の証明
・円に内接する四角形の性質の証明
・方べきの定理 II の証明
「ねらい」
・方べきの定理 I(パターン 2) が証明できる。
・円に内接する四角形の性質が証明できる。
・方べきの定理 II が証明できる。
〇第３時について
「内容」
・接弦定理の証明
・方べきの定理 I と II の確認
・方べきの定理 I の逆定理の証明
・方べきの定理 II の逆定理の証明
「ねらい」
・接弦定理が証明できる。
・方べきの定理 I の逆定理が証明できる。
・方べきの定理 II の逆定理が証明できる。
〇第４時について
「内容」
・反転について再度説明
・反転の定義からいえる性質の考察と証明
・命題１
・命題２
「ねらい」
・反転についての命題 1 が証明できる。
・反転についての命題 2 が証明できる。

なお，具体的な展開案は，本論文の文末に資料として付けてある。

5. 実践の考察

(1) 実践の様子

２日間を通して，１０名の大学４年生を指導補助とし，第１著者が主に授業実践を行った。その際，学習プリントを冊子として配布し，OHP を用いて全体に対し，ヒントなどを与えながら，証明をさせた。

第１時では，高校生はまだ反転の意味を掴みかねるような表情であった。理由は，中学校や高等学校において，これまでに学習してきた内容とどのように関連するのか解らない状況だからだろうと推察される。次に，方べきの定理 I（パターン 1）の証明や円周角の定理の証明に取り組んだ。円周角の定理は，中学校の既習事項であるが，全ての場合についての丁寧な証明を経験していないように感じられた。これらの証明に対し興味を持って取り組んでいたし，また全員が証明を完結させた。

第２時では，方べきの定理 II(パターン 2) の証明，円に内接する四角形の性質の証明，方べきの定理 II の証明に取り組んだ。円に内接する四角形の性質は，中学校において発展的内容に位置付けられている。また高校において，これらは全て，数学 A[3] で学習することなのだが，実践の時期が８月ということもあり，未習の生徒がほとんどであった。ヒントなどを参考に，ほぼ全員が証明を完結させたようであった。

第３時では，接弦定理の証明，方べきの定理 I と II の逆定理の証明に取り組んだ。接弦定理も中学校において発展的内容に位置付けられており，これらの証明について非常に意欲的に取り組む姿が見られた。

第４時では，反転について再度説明した。また，時間の関係上，反転の定義からいえる性質の考察と証明については，省略した。その後，命題１と命題２の証明に取り組み，これらを完結させたが，今ひとつ興味を持てな

いようであった。理由は，この反転が，どのように具体的に応用されるのかが見えないからだろうと思われる。岐阜県教育委員会学校支援課の先生が補足説明として，反転のハップスの円環定理への応用例を大まかに話されたところ，高校生から歓声が上がり，ようやく興味を持ってもらえたようである。単に，新たな性質の証明や考察を行うだけでは，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感することができるとは限らないということが解った。学習した定理の応用例を知ることによって，命題を導き出す楽しさ，またさらにはその有用性を実感するのであろう。このことを理解出来たことは，本実践の大きな収穫であると考える。

(2) 生徒のアンケートから

２日間の実践の後に，受講者を対象にアンケートを行った。以下で，アンケートで訊ねた内容と，それに対する回答を幾つか述べる。

1)「ふだん学習している数学と比べて今回のセミナーについてどう思いましたか。」

- １つ１つの定理について，数学の授業ではなかなか深く教えてくれる機会はないし，また１日に学べる量がたくさんだったので，とても楽しかった。普段は学ぶことのできないような範囲まで学習でき面白かった。
- 高校で習った数学は，大事なんだと思った。
- 今まで使っていた定理をあらためて証明したり，新しい定理を証明したりとすごく勉強になったし，楽しかったです。
- 内容が深いと思いました。１つ１つの定義をちゃんと確認することができてうれしかったです。
- 普段の授業はペースが速く，どうしてそうなるかということについておろそかになりがちだが，今回のセミナーでは深く学ぶことができたように思う。
- 普段の授業では，先生の話を聞くことが多いが，今回は考える時間が多く，やりごたえがあり，大変おもしろいと思った。

2)「面白いと感じたこと，役に立つと思ったこと，興味をもったことを書いてください。」

- 反転についてもっと学びたいです。
- 中学で学習した定理が「反転」へとつながるのが面白いと思った。また，新しい定理をいくつか知ることができ，幾何への理解が深まった。
- 円周角の定理など今まで使っていた定理の証明ができるようになってよかった。反転について学んでいきたいと思った。
- 反転という内容についてやってみて，見方をかえていくという所は実生活においても役に立つ考え方だと分かった。
- 反転することによっていろいろかわることがすごいと思った。
- 反転という分野には，高校で習ったことも大事なんだと思った。
- 数学という世界でもなんか美術みたいなユニークな変換などもあるところがおもしろいなと思った。
- 最初に反転の定義を聞いたときは，あまり面白そうとは思えなかったが，反転は非常に面白くて，様々な性質があることが分かったし，もっと勉強していきたいと思った。
- 「反転」は勿論面白かったですし，特に最後の岐阜県教育委員会学校支援課の先生のお話が興味深かったです。このような思考
- 発想力の鍛錬を今後とも継続したいと思う所存です。

3)「全体を通して感じたことや思ったことを自由に書いてください。」

- 大学で高校生の人達と一緒に勉強する機会はあまりないので，今日は高校生の人達とたくさん会話できたのが嬉しかった。
- 大学生の人のおかげで，わかりやすく解きすすめていけた。
- いろいろなところにふれたのでやっていて内容がおもしろかったし興味がもてた。
- すごく楽しかった。休み時間も他校の人と話ができたから良かった。
- 習っていない問題ばかりで大変だったけど，先生方がていねいに教えてくださいました。なので，そんなに苦じゃなくて楽しかったです。
- 最初は証明の方法とかが分からなかったけど，やっていくうちにできるようになって楽しかった。大学生の人たちも分かりやすく教えてくれたし，他の学校の人たちとも楽しくできた。
- 証明を自分で考えることが楽しく，思考のトレーニングにもなったと思う。このセミナーを通して，数学がさらに好きになった。

(3) ねらいがどのくらい達成出来たか

本実践のねらいは,「図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行うことを通して，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感することができる。」であった。第5節の(2)で述べた生徒のアンケートにおける記述から，今回のセミナーでは深く学べて面白かったという主旨の回答が複数見られる。また，中学で学習した定理が「反転」へとつながるのが面白いと思ったという回答もあった。さらには，証明を自分で考えることが楽しく，思考のトレーニングにもなったと思うという回答もあった。第5節の(1)で述べた実践の様子とアンケートの回答から，本実践のねらいは，おおむね達成出来たと判断する。

ただ，第5節の(1)の末尾で述べたように，新たな性質の証明や考察を行うだけでは，命題を導き出す楽しさ，またさらにはその有用性を実感することができるとは限らないということも解った。命題を導き出す楽しさやその命題の有用性を実感させるためには，学習した定理の応用例を提示することが有効な手段の１つである。このような理解に至ったことも，本実践の大きな収穫であると考えている。

6. 今後の課題

命題を導き出す楽しさやその命題の有用性を実感させるためには，学習した定理の応用例を提示することが有効な手段の１つであることが分かった。今後の教材開発として考えたいのは，反転の導入から始め，その応用例を提示し，証明を行うという授業案である。特に，応用例として扱いたいのは，パップスの円環定理である。これは，1節でも述べたが，与えられた複雑な問題を，反転という円に関する鏡映変換を用いて非常に平易な問題に置き換えるというものであり，反転の有用性を示す応用例である。今後は，このような授業案を開発し，実践していきたいと思っている。

なお，高校セミナーという実践の場を与えて下さった，岐阜県教育委員会学校支援課の先生方には，この場を借りてお礼申し上げます。ありがとうございました。

引用文献

[1] 文部科学省，2010，高等学校学習指導要領解説数学編・理数編.

[2] 赤攝也・井上義夫　他 17 名，2005，新版中学校数学 2，大日本図書株式会社.

[3] 大島利雄ほか 13 名，2005，数学 A，数研出版.

[4] 難波誠，2008，平面図形の幾何学，現代数学社.

[5] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説数学編.

（資料）

方べきの定理とその応用

岐阜大学教育学研究科
教科教育専攻・数学教育専修
安藤　広樹

～ねらい～

図形に関して学習してきたことを利用し，新たな性質の証明や考察を行うことを通して，論理的思考を用いて既習事項から新しい命題を導き出す楽しさを実感することができる。

	学習活動	備考
第1時	・反転の導入 ・線対称 ・方べきの定理Ⅰ(パターン 1)の証明 ・円周角の定理の証明	→反転のイメージを与える。 →鏡映の定義をする。 →円周角の定理の確認をする。
第2時	・方べきの定理Ⅰ(パターン 2)の証明 ・円に内接する四角形の性質の証明 ・方べきの定理Ⅱの証明 時間が余れば数学オリンピックの問題を解く。	→円に内接する四角形の性質の確認をする。 →接弦定理の確認をする。証明は第３時に行う。
第3時	・接弦定理の証明 ・方べきの定理ⅠとⅡの確認 ・方べきの定理Ⅰの逆定理の証明 ・方べきの定理Ⅱの逆定理の証明	 →第２時の復習をする。
第4時	・反転について再度説明 ・反転の定義からいえる性質の考察と証明 ・命題１ ・命題２ 時間が余れば数学オリンピックの問題を解く。	

ねらい・方べきの定理Ⅰ(パターン 1)が証明できる。
・円周角の定理が証明できる。
・反転について興味が持てる。

展開案　第 1 時　(全 4 時間)

展開	ねらい	学習活動	指導・援助
導入	反転について興味が持てる。	OHP を使用して反転とは $OP \cdot OQ = r^2$ を保ちながら点 P(自分)を点 Q(鏡の中の自分)に写す移動であることを体験し，イメージする。 「大学の勉強だけれども，中学校や高等学校の学習を基に進めていきます。」 反転の導入 「いま鏡は凹んでいるけれど，もし鏡がまっすぐだったら，自分と鏡の中の自分との関係はどのようになるでしょうか。」	ワークシートを生徒一人一人に配る。 班を構成する。 基本的に班活動を主体とする。 各班に凹面鏡を配り，自分が鏡に接近すると，鏡の中の自分も自身に接近し，その逆もまた成り立つことを体験させる。
	線対称の知識をもとにして鏡映の定義が理解できる。	図において，点 P を点 Q に移動させたように，点をある定まった直線 ℓ を軸として裏返す移動を直線 ℓ を対称軸とする対称移動といいます。 $\alpha : P \to Q$ このような移動を，ℓ に関する鏡映とよびます。	OHP を用い，定義文を載せたシートと，図を載せたシートを映写する。
展開 2	方べきの定理Ⅰ(パターン 1)が証明できる。 かつその中で円周角の定理が用いられることに気付く。	方べきの定理を証明しましょう。 円の 2 つの弦 AB，CD の交点を P とすると $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ。 (点 P が円の内部にある場合) を証明する。	OHP を用いて方べきの定理Ⅰ(パターン 1)のみを見せる。

		方べきの定理Ⅰ(パターン1)の証明を完成させる。 生徒代表1人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	「ワークシートを見てください。」 ヒント1 ・OHPを用い，補助線が引かれたシートを映写する。 ・2つの三角形に着目し，相似であることを証明すればよいことに気付かせる。 ＊円周角の定理を用いることに気付かせる。 ⇩ ヒント2 ・OHPを用い，紹介，復習をする。 ヒント3 ・弧BCに着目させ，円周角の定理を用いることに気付かせる。
		「既に円周角の定理を学習しているとは思いますが，復習としてきちんと証明しましょう。」	理解に難がある生徒にはスタッフが指導・援助。

展開 2	円周上の点Pの位置に関わらず，円周角の定理が成り立つことを証明できる。	円周角の定理を証明しましょう。 円の弧 AB の両端 A, B と弧 AB を除いた円周上の点 P を結んでできる∠APB を，弧 AB に対する円周角といいます。1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分です。 すなわち，円の中心を O とすると $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$ といえます。 円周角の定理の証明を完成させる。 生徒代表 3 人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	「円周角の定理には 3 つの型がありましたね。」 OHP を用い，円周角の定理の 3 つの型を紹介，復習する。 「ワークシートを見てください。」 ヒント ・OHP を用いて円周角の定理の証明に役立てるよう，補助線付きで 3 つの型を見せる。 弧 AB を定める。 弧 AB に対する円周角∠AOB と中心角∠APB を定める。 (1)直線 OP が点 A, B を除いた弧 AB と交わる場合 ・補助線を与えた。 ・三角形の内角と外角の関係に気付かせる。

			(2)直線 OP が点 A または点 B をとおる場合 ・先ほどの証明を参考にさせる。 (3)直線 OP が弧 AB と交わらない場合 ・ヒント式にする。(プリントの次ページに記載) 理解に難がある生徒にはスタッフが指導・援助。
まとめ		三角形や円に関して学習してきたことを利用し，円周角の定理の多様な証明を通して，方べきの定理 I の証明や考察を行うことができる。	

ねらい・方べきの定理Ⅰ(パターン 2)が証明できる。
・円に内接する四角形の性質が証明できる。
・方べきの定理Ⅱが証明できる。

展開案　第２時　(全４時間)

展開	ねらい	学習活動	指導・援助
導入	問題提起 方べきの定理Ⅰ(パターン 2)の存在に気付き，証明へと導く。	円の２つの弦 AB，CD は必ずしも円の内部で交わるとは限らないのではないでしょうか。 弦 AB，CD を延長してできる直線の交点が外部にあるときは方べきの定理は成り立つのでしょうか。 「AB，CD の交点が円の外部にあるときも PA・PB＝PC・PD は成り立ちます。」	OHP を用い，弦 AB，CD が交わらない場合の図を紹介する。 AB，CD は線分であって，交点が存在しない場合の OHP シートと，AB，CD を延長して，円の外部に交点が現れる場合の OHP シートを用意する。
展開１	方べきの定理Ⅰ(パターン 2)が証明できる。 かつその中で円に内接する四角形の性質が用いられることに気付く。	方べきの定理を証明しましょう。 円の２つの弦 AB，CD の交点を P とすると PA・PB＝PC・PD が成り立つことを証明する。 (点 P が円の外部にある場合) 方べきの定理Ⅰ(パターン 2)の証明を完成させる。 生徒代表２人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	OHP を用いて方べきの定理Ⅰ(パターン 2)を見せる。 「ワークシートを見てください。」 ヒント１ ・OHP を用い，補助線が引かれたシー

			トを映写する。 ・2つの三角形に着目し，相似であることを証明すればよいことに気付かせる。 ＊円に内接する四角形の性質を用いることに気付かせる。 ⇩ OHP を用いて見せる。 ヒント2 ・OHP を用い，紹介，復習をする。 ヒント3 ・円に内接する四角形 ABDC に着目させ，円に内接する四角形の性質を用いることに気付かせる。 理解に難がある生徒にはスタッフが指導・援助。
		「円の弦 AB，CD の交点 P が円の内部にある場合を方べきの定理 I (パターン 1)，外部にある場合を方べきの定理 I (パターン 2)とよびます。」	方べきの定理に名前を付ける。 ・方べきの定理 I (パターン 1) (パターン 2)

展開 2	円に内接する四角形の性質を証明できる。	「既に円に内接する四角形の性質を学習しているとは思いますが，復習としてきちんと確認し，証明しましょう。」 円に内接する四角形の性質を確認し，証明しましょう。 四角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に内接するといい，その円を四角形の外接円といいます。 四角形が円に内接するとき Ⅰ　四角形の対角の和は 180°です。 Ⅱ　四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいです。 円に内接する四角形の性質の証明を完成させる。 生徒代表 1 人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	OHP を用い，円に内接する四角形の性質を紹介，復習する。 「ワークシートを見てください。」 ヒント ・証明に役立てるよう，OHP を用いて補助線を引いた型を見せる。 ・∠A，∠C を，例えば x，y と定め円周角の定理から中心角が x，y を用いて表わされることに気付かせる。 理解に難がある生徒にはスタッフが指導・援助。

展開 3	問題を提起する。 方べきの定理Ⅱの存在に気付き，証明へと導く。	方べきの定理Ⅰ(パターン 2)についてもう少し詳しく見てみましょう。 円の外部にある点 P から円に対して接線を引きます。 その接点を T とします。 いま，点 C と点 D がお互いに近づき点 T に一致したときにも 方べきの定理は成り立ちます。 「PA・PB＝PT・PT が成り立ちます。」 ⇩	OHP を用いて，図を提示する。 OHP シートは以下のよう。 ⇩ 方べきの定理Ⅰ(パターン 2)の図において，点 C と点 D がお互いに近づき，接点 T に一致するイメージを表現する。 OHP を用いて方べきの定理Ⅱを紹介する。
展開 4	方べきの定理Ⅱが証明できる。 かつその中で接弦定理が用いられることに気付く。 OHP を用いて接弦定理という言葉の定義をする。	方べきの定理を証明しましょう。 円の外部に点 P があります。点 P から円に接線を引き，それによってできる接点を T とします。点 P を通ってこの円と 2 点で交わる直線を引きます。それによってできる交点をそれぞれ A，B とします。このとき PA・PB＝PT²が成り立ちます。 方べきの定理Ⅱの証明を完成させる。 生徒代表 2 人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	「ワークシートを見てください。」 ヒント ・OHP を用い，補助線が引かれたシートを映写する。 ・2 つの三角形に着目し，相似であることを証明すればよ

			いことに気付かせる。 接弦定理を用いることに気付かせる。 ⇩ OHP を用い，接弦定理を紹介，復習する
		「円の外部に点 P があって，点 P を通って円と 2 点で交わり，一方で円と接する 2 直線がある場合を方べきの定理 II とよびます。」 「既に接弦定理を学習しているとは思いますが，復習として明日きちんと証明しましょう。」	方べきの定理に名前を付ける。
まとめ		円周角の定理を利用し，円に内接する四角形の性質の証明を通して，方べきの定理 I・II の証明や考察を行うことができる。	

ねらい・接弦定理が証明できる。
・方べきの定理Ⅰの逆定理が証明できる。
・方べきの定理Ⅱの逆定理が証明できる。

展開案 第3時 （全4時間）

展開	ねらい	学習活動	指導・援助
導入	接弦定理について再度確認する。	「昨日証明した方べきの定理Ⅱの中で接弦定理が用いられましたね。」 「既に接弦定理を学習しているとは思いますが，復習としてきちんと証明しましょう。」	第2時と同じ OHP を用い，確認する。 ごく一般的な型の接弦定理を紹介する。
展開1	接弦定理を証明できる。	接弦定理を証明しましょう。 円の接線と接点を通る弦とがはさむ角は，その角内にある弧に対する円周角に等しいです。円の弦ACと，その端点Aにおける接線ATが作る∠CATは，その角の内部に含まれる弧ABに対する円周角∠ABCに等しいです。 接弦定理の証明を完成させる。 生徒代表3人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	「接弦定理を証明するには3つの型を吟味する必要があります。」 OHPを用い，接弦定理の3つの型を見せる。 「ワークシートを見てください。」 OHP を用いて接弦定理の証明に役立てるよう，補助線付きで3つの型を見せる。 ヒント (1)∠ABCが鋭角の場合 ・補助線を与えた。 ・円周角の定理を用いることに気付かせる。 (AB'が円の直径であ

			ることに着目させる。） (2)∠ABC が直角の場合 ・弦 AC が円の直径となることに気付かせる。 (3)∠ABC が鈍角の場合 ・ヒント式にする。理解に難がある生徒にはスタッフが指導・援助。
展開 2	第 2 時の復習をする。	昨日学習した方べきの定理Ⅰ・Ⅱを覚えていますか。 一度みんなでおさらいしてみましょう。	OHP を用い，方べきの定理Ⅰ・Ⅱを復習する。
展開 3	問題を提起する。	昨日方べきの定理Ⅰ・Ⅱを証明しましたね。 ところで方べきの定理Ⅰ・Ⅱ各々の逆はいえるのでしょうか。	
		「方べきの定理Ⅰ(パターン 1)の逆定理は成り立ちます。」 ⇩	OHP を用い，方べきの定理Ⅰ(パターン 1)の逆定理の概要を説明する。
展開 4	方べきの定理Ⅰ(パターン 1)の逆定理が証明できる。	方べきの定理Ⅰ(パターン 1)の逆定理を証明しましょう。 A，B，C，D はすべて異なる点とします。2 つの線分 AB，CD の交点を P とするとき PA・PB＝PC・PD が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は 1 つ	

		の円周上にあります。 方べきの定理Ⅰ(パターン1)の逆定理の証明を完成させる。 生徒代表1人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	「ワークシートを見てください。」 ヒント ・OHP を用い，補助線が引かれたシートを映写する。 ・△ABC に着目させる。 ・△ABC には外接円が唯一存在することに気付かせる。 ・線分 PD を D 側に延長し，点 D'とする。 ・方べきの定理より点 D は唯一であることを導く。
展開5	方べきの定理Ⅰ(パターン 2)の逆定理が証明できる。	「方べきの定理Ⅰ(パターン2)の逆定理も成り立ちます。」 ⇩ 方べきの定理Ⅰ(パターン 2)の逆定理を証明しましょう。 A，B，C，D はすべて異なる点とします。2つの線分 AB，CD を延長した直線の交点を P とするとき PA・PB＝PC・PD が成り立つならば，4点 A，B，C，D は1つの円周上にあります。 方べきの定理Ⅰ(パターン1)の逆定理の証明を完成させる。	OHP を用い，方べきの定理Ⅰ(パターン2)の逆定理の概要を説明する。 「ワークシートを見てください。」

展開6	展開 4，5 のまとめをする。 方べきの定理Ⅱの逆定理が証明できる。	生徒代表1人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。 図は違うけれど，証明方法は本質的に同じです。 「方べきの定理Ⅱの逆定理も成り立ちます。」 ⇩ 方べきの定理Ⅱの逆定理を証明しましょう。 点Pとそれを始点とする2つの半直線があります。一方の半直線上に異なる2点A，Bがあり，もう一方の半直線上に点Tがあるとします。このとき，PA・PB＝PT^{2}ならばPTは△ABTの外接円の接線になります。 方べきの定理Ⅱの逆定理を完成させる。	ヒント ・(1)と同様。 OHPを用い，方べきの定理Ⅱの逆定理の概要を説明する。 「ワークシートを見てください。」
まとめ		生徒代表1人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。 円周角の定理を利用し，接弦定理，方べきの定理Ⅰ・Ⅱの逆定理の証明や考察を行うことができる。	ヒント ・OHPを用い，補助線が引かれたシートを映写する。

ねらい・反転についての命題１が証明できる。
　　　　・反転についての命題２が証明できる。

展開案　第４時　(全４時間)

展開	ねらい	学習活動	指導援助
導入	反転とはどのような移動であったか復習する。	反転とは OP・OQ$=r^2$を保ちながら点 P(自分)を点 Q(鏡の中の自分)に写す移動です。	OHP を用い，反転とは OP・OQ$=r^2$を保ちながら点 P を点 Q に写す移動であることを再度イメージさせる。
展開１	反転の定義をより正確に述べる。	大学の言葉を使ってちょっと難しく言うと，反転とは，いわば円に関する鏡映移動です。 中心を O, 半径rの円 C があるとき，円 C に関する反転とは，次のような移動です。 $\alpha : P \to Q$ O，P，Q はこの順で一直線上にあり， OP・OQ$=r^2$ をみたします。 「反転の定義から次のことがいえます。」	OHP を用い，説明する。 円の内部の点 P を移動した点 Q についてのみ，$\alpha(Q)=P$ となることを図を用いて直感的に押さえる。 円の中心 O の移動についても定義域から除外することを伝える。
展開２	反転の定義から導かれる性質を証明できる。	点 P が円 C の内部にあって $\alpha(P)=Q$ をみたすとする。円 C の円周上にあり，線分 OQ 上にない点を R とするとき，∠ORP＝∠OQR がいえます。 証明を完成させる。 生徒代表１人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通	半径rが示されているシートを映写する。 「ワークシートを見てください。」 ヒント ・△ORP と△OQR

		して答え合わせをする。 「ここに反転に関する命題を二つ紹介します。」 「その前に『2つの円が直交しているとき』を定義します。」	に着目して考えるように声かけをする。
展開3	『2つの円が直交しているとき』の定義を理解できる。	2つの円が直交しているとは，その2つの円が共有点をもち，その共有点における接線が直交しているときを言います。	OHPを用い，定義文を載せたシートと，2つの円が直交している図を載せたシートを映写する。
展開4	命題1を証明できる。	命題1 円Cがあり，円Cに関する反転をαとおきます。 $\alpha(P)=Q$，$\alpha(Q)=P$をみたす2点P，Qをとおる円は円Cと直交します。 「それでは命題1を証明してみましょう。」 命題1を証明しましょう。	OHPを用い，P，Qを通る円が円Cと直交しているシートを映写する。
		命題1の証明を完成させる。	「ワークシートを見てください。」
		生徒代表1人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。	ヒント ・方べきの定理Ⅱの逆定理が使えないかと問いかける。

展開 5	命題 2 を証明できる。	命題 2 円 C があり，円 C に関する反転を α とおきます。 円 C と直交する円 C'に対し，円 C の中心 O を通る直線を円 C'と 2 点で交わるように引きます。このとき，2 つの交点のうち，O に近い方の点を P，そうでない方の点を Q とすると，α(P)＝Q，α(Q)＝P となります。 「それでは命題 2 を証明してみましょう。」 ⇩ 命題 2 を証明しましょう。 命題 2 の証明を完成させる。 生徒代表 1 人に自身の証明をホワイトボードに書いてもらい，全体交流を通して答え合わせをする。 方べきの定理Ⅱや，その逆定理を用いて反転に関する新たな二つの命題を証明できましたね。	OHP を用い円 C と円 C'が直交しているシートを映写する。 「ワークシートを見てください。」 ヒント ・OR は円 O'に対してどのような線分であるかと問いかける。 ・方べきの定理Ⅱが使えないか問いかける。
まとめ		三角形の相似や方べきの定理を利用し，反転の定義から導かれる性質や命題の証明や考察を行うことができる。	