

料金に関する規則について文字式を用いて考察する教材の開発

岩間広祥¹, 愛木豊彦²

本論文は, ある事象から規則をみつける活動を通して, 文字式の有用性を感じられることをねらいとして開発した授業の実践報告である。この授業では, まず宅配便の料金と送り方に関する規則を見つける。そして, 見つけた規則が正しいことを文字式を用いて説明する。ここでは, 授業の内容を述べた後, 実践結果について報告する。

<キーワード>文字式, 規則性の発見, 証明

1. はじめに

平成20年3月に改訂された中学校学習指導要領数学科 [1] において, 数学科の目標に「数量や図形などに関する基礎的概念や原理・法則について理解を深め, 数学的な表現や処理の仕方を習得し, 事象を数理的に考察し高める」とある。さらに「事象を数理的に考察し高める」について「様々な事象を数理的にとらえ, 考察し, 表現したり処理したりする能力を高める。」と述べている。

そこで, この能力を高めることをねらいとし, 宅配便の料金について考察する授業案を開発することにした。次節以降で, 問題の詳細, 授業展開等について述べる。

2. 授業の概要

2.1. 題材について

本論文で紹介する授業では, 次の問題を扱う。

「問題」: 白川町から静岡市までお茶 120kg を宅配便で送る。ただし, 一度に 100kg までしか送ることはできない。宅配便の料金が下の表 1 のように定められているとき, 荷物をどのように分ければ安く送ることができるだろうか。

重量 (xkg)	10	20	30	40	50
料金 (円)	900	1200	1500	1800	2100
	60	70	80	90	100
	2400	2700	3000	3300	3600

本来, 宅配便の料金は「送り先までの距離」と「荷物の重量」, 「荷物の縦と横と高さの合計」によって決まる。それに対し本授業では, 「送り先までの距離」を授業場所である岐阜県白川町から静岡市「荷物の重量」を 120kg と定め「荷物の縦と横と高さの合計」については問題の簡略化のため考えないものとした。また, 一度に 100kg までしか送れないという制限をつけた。実際にもこのような制限は存在し, 上限の値は宅配便の会社によって様々である。そこで計算が簡単になるよう, 送れる荷物の重さの上限を 100kg とした。さらに, 重量 x kg の荷物を白川町から静岡県に送るときの料金を $(30x + 600)$ 円としている。よく知られているように, 宅配便の料金体系は階段関数で表わされるが, ここでは既習の内容を活用できるように 1 次関数で表すことにした。以上の条件の下, 宅配便で安く送る方法について考察する。

120kg の荷物を重さが a_1 kg と a_2 kg の 2 個に分けて送る場合について考える。このとき

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

$a_1 + a_2 = 120$ が成り立つ。 a_1 kg の荷物にかかる送料は $(30a_1 + 600)$ 円, a_2 kg の荷物にかかる送料は $(30a_2 + 600)$ 円となるので, 全体の料金は

$$\begin{aligned} & (30a_1 + 600) + (30a_2 + 600) \\ &= 30(a_1 + a_2) + 1200 \\ &= 4800(\text{円}) \end{aligned}$$

次に, 120kg の荷物を a_1 kg, a_2 kg, ..., a_n kg の n 個に分けると $\sum_{i=1}^n a_i = 120$ が成り立つ。各 a_i kg の荷物にかかる料金は $(30a_i + 600)$ 円なので, 送料は $\sum_{i=1}^n (30a_i + 600) = 30 \sum_{i=1}^n a_i + 600n = 600n + 3600(\text{円})$ となる。この式は分ける個数を 1 つ増やすと料金が 600 円高くなること, 個数が同じであれば分け方によらず料金は一定であることを示している。今, 一度に全てを送ることはできないので, $n \geq 2$, よって $n = 2$ のときが料金 4800 円で一番安いことがわかる。

この問題に対する生徒の予想される活動は, 次の 2 つである。

(1) 2 個に分けた場合を考える。

20kg と 100kg に分けた場合 $(30 \times 20 + 600) + (30 \times 100 + 600) = 4800$, 30kg と 90kg に分けた場合 $(30 \times 30 + 600) + (30 \times 90 + 600) = 4800$ などの具体的な場合から, 2 個に分けた場合はいつでも料金が 4800 円になることを予想し, それを文字を使って証明する。

(2) 3 個に分けた場合, 4 個に分けた場合のそれぞれの料金を求め, その結果から分け方を 1 つ増やすと, 料金は 600 円高くなること, 分け方によらず料金は一定であることを予想し, それを文字を使って証明する。

この授業の対象である中学校 2 年生の文字式の学習内容は, [1] によると

「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとり説明できることを理解すること」

とあり, 上で示したような文字式を使った数量関係の証明は, 既に学習している。従って, この「問題」は中学校 2 年生で考察可能であり, その考察の中で既習事項を活用できるものと考えた。さらに, 既習事項の活用を通して, その有用性を感じさせることで, 通常の学習への意欲を高めたいと考えた。

2.2. 授業のねらい

本授業のねらいを以下の 2 点とした。

(a) 重量と料金の関係から最も安い送り方を見つけることができる。

(b) 自分たちが見つけた最も安い送り方に関する規則が正しいことを, 文字を使って説明できる。

2.3. 授業の展開

(1) 問題提示

「問題」を提示する。

(2) 課題設定

荷物を x kg 送るときの宅配便の料金が $(30x + 600)$ 円であることを式と表の両方を用いて説明する。次に, 一度に送る荷物の重量に上限があることを述べ, 荷物を 60kg, 60kg の 2 個に分けた場合と 40kg, 40kg, 40kg の 3 個に分けた場合の料金を求める。そして, それらの料金に違いがあることを確認した上で, 課題を「宅配便で送るときの送り方と料金の関係を調べよう」とする。

(3) 個人追究～グループ追究

まず, 個人追究を行い, 各自でわかったことを学習プリントにまとめる。続いてグループ追究を行う。グループ追究では, 個人追究でわかったことを交流し, 見つけた規則やその根拠を模造紙にまとめる。なお, ここでのグループ追究では, 各グループ(生徒 5, 6 人)に対し 1 人の学生を配置し生徒を支援する。

(4) 全体交流

グループ追究で生徒が見つけた規則とその

根拠を全体で発表する。生徒の発表を受け、「2個に分けて送ればどのような分け方であっても一番安くなる」とまとめる。

3. 実践報告

講座名：「安いワケ」

実践日：平成22年9月15日（水）

第1校時，第2校時

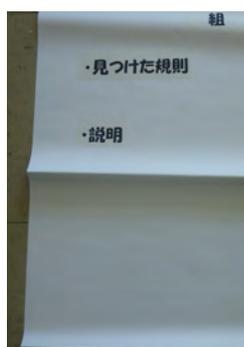
対象：岐阜県白川町立白川中学校2年生（68名）

なお，本授業はSPP事業として開催されたものである。

3.1 活動の様子

個人追究の段階で，具体的な数値から料金に関する規則を見つけることができていた。しかし，中学校2年生なので，文字を使った説明にあまり慣れていないせいか，規則が正しいことを示すことは難しいようであった。そこで，教科書[2]の文字を使った説明の部分を見せるなどの支援をした。

そして，グループごとに，考察した内容を模造紙にまとめた。各グループに配った模造紙には生徒がまとめやすくなるよう「見つけた規則」「説明」という欄を設けている（写真1）。



（写真1）

実際の授業では，3グループが発表した（写真2）。



（写真2）

以下，その3グループが発表した「見つけた規則」と「説明」を紹介する。

・規則「分ける個数が1個増えるごとに600円ずつ値段が上がる」

説明1：100kgと20kgの2つに分けた場合の料金は $(30 \times 100 + 600) + (30 \times 20 + 600) = 4800$ (円)，38kgと82kgの2つに分けた場合料金は $(30 \times 38 + 600) + (30 \times 82 + 600) = 4800$ (円)である。

40kgと40kgと40kgの3つに分けた場合の料金は， $(30 \times 40 + 600) + (30 \times 40 + 600) + (30 \times 40 + 600) = 5400$ (円)，18kgと46kgと56kgの3つに分けた場合の料金は $(30 \times 18 + 600) + (30 \times 46 + 600) + (30 \times 56 + 600) = 5400$ (円)

説明2：120kgを n 個に分ける。 n 個に分けたとき，1つあたりの重量は $\frac{120}{n}$ kgである。1つあたりの料金は $30 \times (\frac{120}{n}) + 600$ (円)となる。それを n 倍して全体の料金は $3600 + 600n$ (円)

・規則「2つに分けたら料金は4800円になる」

説明1：120kgを a kgと b kgに分けると，それぞれの料金は $30a + 600$ (円)と $30b + 600$ (円)となる。また $a + b = 120$ が成り立つ。よって料金は $(30a + 600) + (30b + 600) = 30(a + b) + 1200 = 4800$ (円)となる。

説明2：120kgの荷物を x kgと y kgの2つに分けると $x + y = 120$ が成り立つ。 x を右辺に移項すると $y = 120 - x$ とな

る。料金は $(30x + 600) + (30y + 600) = 30x + 600 + 30(120 - y) + 600 = 4800$ (円)となる。

・規則「分ける個数が同じとき，分け方に関係なく料金は同じになる。」

説明：2 つに分けた場合を考える。90kg と 30kg に分けた場合の料金は $3600 + 1200 = 4800$ (円)，60kg と 60kg に分けた場合の料金は $2400 + 2400 = 4800$ (円)，62kg と 58kg に分けた場合の料金は $2460 + 2340 = 4800$ (円)。

3 つに分けた場合を考える。40kg と 40kg と 40kg に分けた場合の料金は $1800 + 1800 + 1800 = 5400$ (円)，100kg と 10kg と 10kg に分けた場合の料金は $3600 + 900 + 900 = 5400$ (円)。

4 つに分けた場合を考える。30kg と 30kg と 30kg と 30kg に分けた場合の料金は $1500 + 1500 + 1500 + 1500 = 6000$ (円)，10kg と 20kg と 40kg と 50kg に分けた場合の料金は $900 + 1200 + 1800 + 2100 = 6000$ (円)。

・規則「 n 回に分けたときの料金 y の関係式は $y = 600n + 3600$ 」

説明：分けた回数と料金を表で表すと以下のようになる。

分けた回数 (n)	2	3	4	5
料金 (y)	4800	5400	6000	6600

4. 考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

(1) もっとも安い送り方を見つけることができましたか。

はい，できました ... 64人

無回答 ... 2人

その他 ... 2人

(2) 自分が見つけた規則が正しいことをどのようにして確かめましたか。

- ・実際に計算をした
- ・文字に数値を代入した

- ・文字式を使った
- ・連立方程式を用いた
- ・文字を使った関係式を用いた
- ・表を使った
- ・グラフを用いた

(3) 今まで習った数学に関することの中で，この時間に利用したものを書いてください。

- ・分配法則，文字，代入，方程式，等式，比例，加法，乗法，移項，代入法

(4) 授業を振り返っての感想を書いてください。

・はじめはわからなかったけど，班で協力して解くことができてよかった。

・大学の先生に教えてもらって，数学が苦手だったけど，今日の問題をわかることができてよかった。

・数学でやったことをいかして答えを出すことができてよかった。

・とても楽しく授業を受けることができたし，数学の授業でいかしていけるといいなと思った。

・数学のことをもっと知れてよかった。

・授業を通して数学を好きになれた。

・自分で考えてできたところは少なかった。

・代入して計算していくのが大変だった。

・難しくあまりわからなかった。

・数学を楽しく学ぶことができた，もっと頑張っって今日より楽しいと思えるようになりたい。

・難しかったけど楽しかった。

・送料のことだけでも，こんなに深く考えられるんだって思って感心した。

・文字を使っていくところが難しかった。

・普段は考えないようなことができてよかった。

・4800円になる理由までわかってよかった。

本授業のねらい(a)，(b)について考察する。
(a) 重量と料金の関係から最も安い送り方を見つけることができる。

個人追究の段階で具体的な様々な場合の料金を計算することで、一番安い送り方を推測することができる生徒がほとんどであった。また、アンケート(1)に対して、安い送り方を見つけることができたという回答が約94%であった。以上の2つの結果からこのねらいは達成できたと考えている。

(b) 文字式を使って、送り方に関する規則が正しいことを説明できる。

アンケート(2)について「文字式を使った」「文字を使った関係式を用いた」などの回答を得ることができた。その一方で「実際に計算を行った」という回答もあり、文字式を使うことによって送り方の規則を示すことができなかった生徒もいるのではないかと思った。従ってこのねらいに関しては不十分な点があると考えた。しかし、1学期に文字式を用いた証明を学習した中学2年生に対し、このような文字式を用いた証明を扱う場を設けたことは、振り返りになったと同時に2学期で学習する1次関数へのよい橋渡しになったと考えている。

5. 今後の課題

今回の授業を受けた生徒は、1次関数を学習中であった。関数の学習において、見つけた規則を文字を用いて証明することはとても重要なことである。このことを扱っているという点で、本授業は上述したように、1次関数への良い橋渡しになったと考える。授業のまとめのときに、この点を強調すれば、生徒にとってより意味のある学習になった。

また、この問題では荷物を分ける個数と料金の関係が1次関数になるので、1次関数の活用の題材になりうる。このときの授業展開についても今後検討していきたい。

実践の場を提供していただいた岐阜県白川町立白川中学校の皆様には感謝いたします。

引用文献

- [1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版株式会社.
- [2] 吉田稔 他 17名, 2006, 新版中学校数学2, 大日本図書株式会社.