

ドミノ倒しについて三平方の定理を活用し、考察する教材の開発

吉井裕哉¹，愛木豊彦²，畑中裕史³

一定の間隔で直線的に並べたドミノを倒すと、最後に倒れた1枚のドミノ以外、互いにほぼ平行に積み重なる。このことについて、実験をもとに考察し、その結果を活用して問題解決する授業を提案する。この授業では、ドミノが倒れたときに図柄が「見える部分の長さ」について三平方の定理などを用いて考察する。本論文では、この授業について中学校3年生を対象とした実践の計画とその結果について論じる。

<キーワード>ドミノ倒し，三平方の定理，合同，平行線の性質，数学の有用性

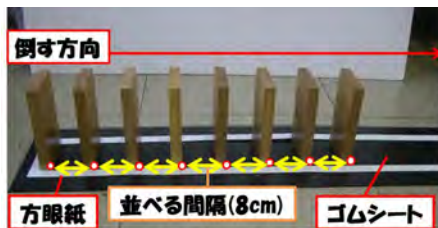
1. はじめに

2008年3月に改定された中学校学習指導要領・数学編[1]の目標には、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることが定められている。

この目標を実現するために、ドミノ倒しにおいてドミノの枚数と全部のドミノが倒れるのにかかる時間との関係を1次関数とみなし、その関係について考察する授業を実践した([2],[3])。その後、[4]をもとにドミノ倒しの数理について考察したところ、ドミノが倒れた後の状態について、中学校で学習する内容を用いて、問題解決できることがわかった。よって、それを題材とする授業案を開発することにした。さらに、ドミノ倒しはテレビでもしばしば放送されるので、子ども達の関心も高いと考えられることも、この題材を選んだ理由の一つである。

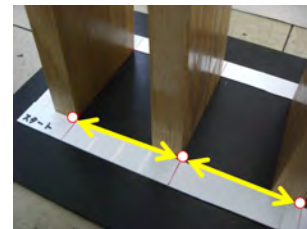
2. 倒れた後のドミノについて

まず、写真1にあるように、ゴムシートの上の方眼紙を敷き、ドミノを直線的かつ間隔を一定にして並べる。ドミノとしてH15×W9×D2/cmの木片を使用する。



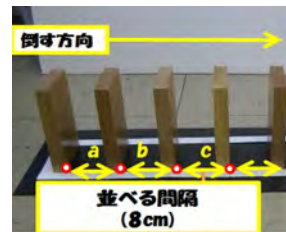
(写真1)

ここでは、写真2にあるように から までの距離(「並べる間隔」と呼ぶ)を8cmとする。



(写真2)

そして、横から見たドミノの倒れる前(写真3)と倒れた後(写真4)の状態について観察すると、倒れた後のドミノは最後の1枚以外互いに



(写真3)



(写真4)

にほぼ平行に積み重なっていることがわかる。さらに、倒す前と倒した後では、間隔はほとんど変わらない。この実験は市販のドミノ牌を使った場合でも同じような結果になる。

このような実験結果をもとに次の(問題1)を考える。

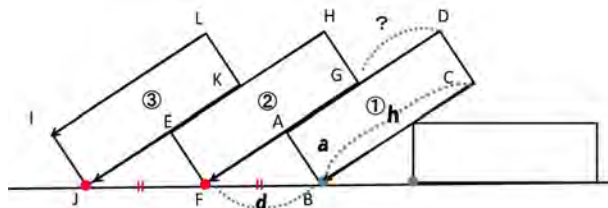
(問題1) 厚さ a (cm)、高さ h (cm) のドミノを d (cm) の間隔で並べる。ドミノが倒れたとき、GDは何cmになるか。ただしドミノ①～③は互いに合同

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

³岐阜大学教育学部附属中学校

な長方形とみなし，互いに平行に積み重なっているとす。また間隔は等しい。つまり， $FJ=BF$ である。



(図 1)

(解答)

図から $\angle BAF = 90^\circ$ なので， $\triangle ABF$ は直角三角形である。よって三平方の定理より

$$\begin{aligned} FB^2 &= AF^2 + AB^2, \\ AF^2 &= FB^2 - AB^2, \\ AF &= \sqrt{FB^2 - AB^2}, \\ &= \sqrt{d^2 - a^2}. \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

また，

$$FG = AD = h \quad (\text{仮定より}) \dots \textcircled{2}$$

①, ②より，

$$\begin{aligned} AG &= FG - AF = h - \sqrt{d^2 - a^2} \\ GD &= AD - AG = h - \{h - (\sqrt{d^2 - a^2})\} \\ &= \sqrt{d^2 - a^2} \end{aligned}$$

よって， $GD = \sqrt{d^2 - a^2}(\text{cm})$ である。

実際に倒したドミノは，厚さ 2cm，並べる間隔は 8cm なので， $\sqrt{d^2 - a^2}$ に $a = 2$ ， $d = 8$ を代入して，

$$\begin{aligned} \sqrt{d^2 - a^2} &= \sqrt{8^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{60} \\ &= 7.7459666 \dots \end{aligned}$$

小数第 2 位を四捨五入して， $GD = 7.7(\text{cm})$ となる。

3. 授業の計画

3.1. 授業の流れ

前節で示した内容をもとに開発した授業の流れを述べる。授業は 2 時間構成である。

(1 時間目)

(1) 導入

まず，ドミノ倒しの生放送番組の動画を見せて，図柄が見える仕掛けの作り方に興味関心を持たせる。その後，授業者が作った仕掛けを紹介する。

仕掛けは写真 1 のように並べたドミノを倒し，上から見たときに写真 5 のような図柄が現れるようになっている。



(写真 5)

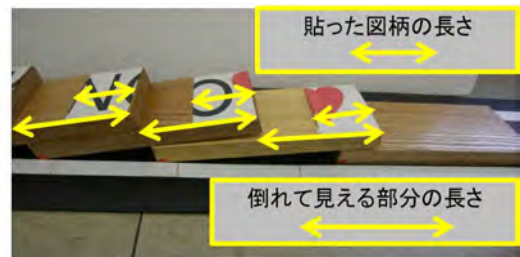
(写真 6)

図柄は横 28cm，縦 9cm の紙を写真 6 のように，横に 4cm ずつ切って，ドミノの側面の上部に貼る。そして，このドミノを直線的かつ間隔を 8cm にして並べる。だが，この場合，実際にドミノを倒してみると写真 7 のように図柄が繋がって見えない。



(写真 7)

これは，写真 8 のように，倒れたドミノを横から見たとき「見える部分の長さ」より「貼った図柄の長さ」が短いためである。



(写真 8)

授業ではこれらの様子を，動画やスライドを用いて説明する。そして，きれいに図柄が繋がって見えるようにするには，横から見たときの，ドミノの「見える部分の長さ」を考えなければならないことを話す。さらに，そのためにはドミノが倒れた後どのような状態になっているのかを実験で確かめる必要があることを伝える。

(2) 実験

2 節で示した実験を 5~6 人のグループごとに行う。そして，ドミノが倒れた後のドミノは最後の 1 枚以外互いに平行に積み重なっていること，倒す前と倒した後では間隔はほとんど変わらないことを確かめる。

(3) 課題設定

「見える部分の長さ」は2節の問題1の「GDの長さ」である。そのため、「GDの長さ」を「見える部分の長さGD」として問題1を提示し、「倒れたドミノを横から見た図をもとにして、見える部分GDの長さを求めよう。」という課題を設定する。

(3) 個人追究

2節で示したように、平行線の性質や、三平方の定理を使ってGDの長さを求める。

(4) 全体交流

個人追究した内容を全体で交流することで、ドミノが倒れたときに「見える部分の長さ」はドミノの厚さ a と並べる間隔 d を用いて $\sqrt{d^2 - a^2}$ と表せることを理解する。そして、2節のように $a = 2$, $d = 8$ を代入して、「見える部分の長さ」を求めると $GD = 7.7(\text{cm})$ となることを示す。

最後に見える部分に貼る図柄の長さを 7.7cm にして作った仕掛けを子ども達の前で倒し写真9のように図柄がきれいにつながって見えることを確認する。ただし、最後の方の1枚は平行に積み重なって見えないという実験の結果から、図柄を貼っていないドミノを3枚余分に並べている。



(写真9)

(2 時間目)

(1) 問題提示

授業の冒頭で、ドミノが倒れたときに「見える部分の長さ」はドミノの厚さ a と並べる間隔 d を用いて $\sqrt{d^2 - a^2}$ と表せたことを確認する。そして、本時はドミノが倒れたときに図柄が現れる仕掛けを自分たちで作ること、そして、そのドミノの大きさは前時と異なることを伝える。仕掛けは、写真10のような図柄を切り、ドミノの側面上部に貼って作る。



(写真10)

その後、「厚さ 8mm 、横幅 23mm 、高さ 46mm のドミノを、間隔を一定にして直線的に並べて倒すとき、見える部分に貼る図柄の長さは何 mm にしたらよいだろうか。」という問題を提示する。

まず、見える部分の長さは、使用するドミノの厚さは 8mm なので、 $\sqrt{d^2 - a^2}$ に $a = 8$ を代入して、 $\sqrt{d^2 - 64}(\text{mm})$ となることを確認する。そして、並べる間隔 $d(\text{mm})$ は自分たちで決め、「見える部分の長さ」を計算して仕掛けを作ることを伝える。

(2) 課題設定

仕掛けの作り方をスライドで確認し、「1時間目の結果を利用して、ドミノが倒れたときに図柄が見える仕掛けを作ろう。」と課題を設定する。

(3) グループ追究

2人ずつの組になり、並べる間隔 d を自分たちで決めて、見える部分の長さを計算し、実験の手順に従って図柄が見える仕掛けを作って倒す。このとき、気づいたことなどを学習プリントに書きこむ。

仕掛けを作る際に、次の点に注意する必要がある。

まず、厚さが 8mm のとき、ドミノはすべて隙間なく並び、倒すためには $d > 8$ となる。

また、ドミノの高さは 46mm より、1つのドミノに貼れる図柄の長さの最大値は 46mm となる。このとき、ドミノを並べる間隔を求める。

$$\begin{aligned}\sqrt{d^2 - 64} &= 46, \\ d^2 - 64 &= 2116, \\ d^2 &= 2180, \\ d &= \sqrt{2180}, \\ &= 46.69 \dots\end{aligned}$$

小数第1位を四捨五入して $d = 47(\text{mm})$ である。よって、ドミノが倒れるための d の範囲は $8 < d < 47(\text{mm})$ となる。

しかし、中学校の段階で不等式を解くこと、最大値、最小値は学習していないため、授業では、これらの点については詳しく触れないことにした。

(4) まとめ

仕掛けを作ったときに気付いたことなどを全体交流で発表してもらおう。そして、「事象を数理的に考察することで問題解決に役立てることができる。」とまとめる。

3.2 授業のねらい

本授業のねらいを次のように設定した。

- I. 倒れたドミノはほぼ平行に積み重なることを実験で確かめ、倒れたドミノを横から見た図をもとにして、ドミノの厚さ a

(cm), 間隔を d (cm) とすると, 倒れたときに見える部分の長さは $\sqrt{d^2 - a^2}$ (cm) になることが理解できる。

II. 1 時間目の結果を利用して, ドミノの間隔の値を決めて図柄が浮かび上がる仕掛けを作る活動を通して事象を数理的に考察することの有用性を実感する。

4. 実践結果

4.1. 授業実践

講座名: 「もし岐大附属中の生徒がドミノ番組の制作者になったら」

場所: 岐阜大学教育学部附属中学校

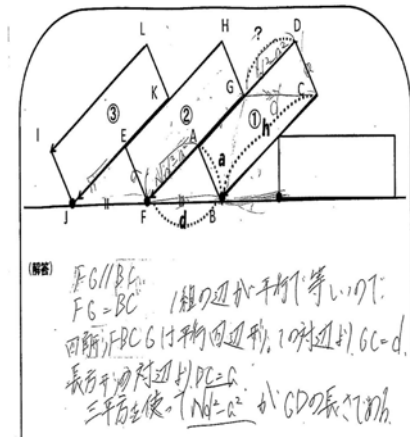
実施日: 平成 23 年 3 月 1 日(火) 第 4 校時
2 日(水) 第 3 校時

対象: 中学 3 年生 (40 名)

4.2 活動の様子

(1 時間目)

導入では, 生徒たちが積極的に実験に取り組む姿が多く見られた。個人追究に入ってから, GD の長さを求めるのに苦戦していたが, ほとんどの生徒が GD の長さが $\sqrt{d^2 - a^2}$ (cm) になるという解答にたどり着いていた。全体交流では時間の都合上扱えなかったが, GC に補助線を引いて平行四辺形の性質を用いて GD の長さを求めている生徒もいた(図 2)。



(図 2)

また, 見える部分の長さを求めるにはドミノの高さが関係ないことに驚いている生徒もいた。最後に, 確認の実験でドミノを倒して, 図柄がきれいにつながったのを見て, 生徒たちは, 考察した結果が有効に活用できることに納得していた。

(2 時間目)

前時の振り返りをして, グループ追究に入ると, 生徒たちは積極的に図柄の見える仕掛けを作って

いた。どのグループも計算して作った仕掛けを倒すときれいに図柄がつながって見えていた。このことに対して, 生徒たちは喜び拍手をしていた。



(写真 11)



(写真 12)

並べる間隔 d の値を大きくすると貼る図柄の長さも大きくなり, 並べるドミノの数が減ることや(写真 11), 逆に, d の値を小さくすると, 貼る図柄の長さが小さくなり, 並べるドミノの数が増えること(写真 12)に気付いていた生徒がいたため, それを全体交流で確認した。

5. 考察

授業後にアンケートを実施した。その結果の一部を紹介する。

- ① 「見える部分の長さ」が求まるのは, 倒れたドミノにどのような特徴があったからですか。また求める際に, どの長さが必要になりますか。
 - ・ドミノは平行に重なり合っているため, 合同な長方形の辺が重なり, その重なり合っていない辺が見える部分になる。
 - ・ドミノが倒れたとき, 地面と接する点の間隔が並べたときの間隔と変わらないから。
 - ・ドミノの厚さとドミノの間隔の長さが必要。
 - ・倒れたドミノの隙間が直角三角形になっていて, 2 辺の長さがわかっていたので三平方の定理が使えたから。
- ② 計算した結果を使って, 図柄が見える仕掛けを作った感想を教えてください。
 - ・適当に貼ればうまくいくと思っていたけど計算が必要なのだと分かり, 今まで学習した数学が日常の中で生きているということを知った。
 - ・自分たちが考えた間隔ですべて作り, できたときはうれしかったし楽しかったです。
 - ・間隔が広いと楽でいいが, 狭いと大変。
 - ・図柄が見えたという快感で心がいっぱいになりました。
- ③ ドミノの番組の大がかりな仕掛けはどのよ

- うにして制作されていると思いますか。
- ・実験を繰り返して作っている。
 - ・小さいドミノから実験して、規模を大きくして作っている。
 - ・計算が源となり、設計図を立ててやっている。
 - ・作りたい図柄を決め、ドミノの大きさを決めて、緻密な計算と努力によって作られる。
- ④授業の感想を教えてください。
- ・よくテレビでドミノ倒しを見てすごいと思っていたけど、あれはちゃんと計算されてできていると分かりびっくりしました。
 - ・今回のような授業はとても面白くて楽しかったです。身近に潜んでいる数学を取り上げた授業はとても興味が持てました。
 - ・ドミノ自体楽しいものだけど、今までやったことが使える楽しさも味わうことができた。日常の中で、「数学が使われているのではないか。」と思うこともしてみたいと思った。
 - ・平方根などは日常で全く役に立たないと思いきりこんでいたけど、実際は平方根があるおかげで日常の様々な計算ができるのだとわかりました。
 - ・意外なところに三平方の定理が使われていて衝撃だった。もっと三平方の定理が使われているところを見つけないです。

次に、本授業のねらいの達成度について考察する。

Iについて

アンケートの質問①の回答からもわかるように実験で倒れたドミノは平行に重なり合うこと、ドミノが倒れたとき、地面と接する点の間隔が並べたときの間隔と変わらないという特徴をもとに、見える部分の長さを求めるにはドミノの厚さ、並べる間隔の長さが必要であることに気付いている生徒が多かった。そして、「見える部分の長さ」を三平方の定理や平行線の性質、合同な図形の性質を用いて求められている生徒も多く、既習の内容が使えることを実感していた。よって、このねらいは達成できたと考える。

IIについて

アンケートの質問③や④の回答からもわかるように、実験した結果を使って、問題解決することで、事象を数理的に考察することに対する有用性を実感し、数学的な面白さに気づいた生徒が多かった。さらに、数理的に考察したり、問題解決する

のに、既習の平行線の性質、合同、三平方の定理、平方根の学習内容に有用性を実感している生徒も多かった。よって、このねらいは達成できたと考える。

6. 今後の課題

今回の実践における課題は、次の2点である。

1つ目は、全体交流の仕方である。アンケートに「楽しかったけど難しかった。」などの回答がいくつか見られた。AFの長さが $\sqrt{d^2 - a^2}$ になることはほぼ全員がわかっていたが、そこから辺の長さを利用してGDの長さがAFと同じになることを分かっていない生徒が数人いた。全体交流でもそこのおさえが弱かったためと考えられる。また、1時間目の全体交流では解法を1つしか紹介できなかった。生徒の躓きを解消し、いろいろな考えから生徒の理解を深められるような全体交流にしたい。

2つ目は、数学と物理のつながりを深められなかったことである。アンケートの③、④の回答から、事象を数理的に考察する面白さ、有用性については十分に理解が得られたと判断している。

一方、授業中に「ドミノの高さはなんでもいいのか。」という疑問をもつ生徒がいた。確かに「見える部分の長さ」には高さは関係ない。このことに生徒は驚き新鮮に感じていた。しかし、実際に使用するドミノは、高さが高いと不安定で立たなくなり、低すぎると倒れない。今回の授業では、この疑問を解決する場面はなかった。

このような数学と物理とのつながりを扱うことのできる授業展開にすることで、数学的に考察したことと事象とのつながりが、生徒の中でより深いものになるようにしたい。

引用文献

- [1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説 数学編, 教育出版株式会社.
- [2] 愛木豊彦, 吉井裕哉, 2010, 事象を数理的に考察する教材の開発と実践, 2010年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 86-88.
- [3] 愛木豊彦, 吉井裕哉, 2010, 1次関数を利用してドミノ倒しについて考察する教材の開発と実践, 岐阜数学教育研究第9号, 111-117.
- [4] Fumio Fujii, Tosie Satoh and Shota Fukumoto, 2009, Dynamic contact mechanics of the domino wave propagation, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference J.Ambrosio et.al.(eds) Lisbon, Portugal, September 7-11, 1-13.

(資料 2)

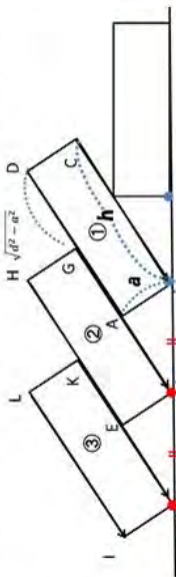
もし、最大利益の利益が **ドミノ** / 番組の制作者になら

～2 時間目～

3 年 組 番 名 前 _____

(1 時間目より)

ドミノの厚さ a (cm)、間隔を d (cm) とすると、倒れたときに見える部分の横幅は $\sqrt{d^2 - a^2}$ になる。



問題 厚さ 8mm、横幅 23mm、高さ 46mm のドミノを、間隔を一定にして直線的に並べて

倒すとき「見える部分」に貼る「図柄の長さ」は何 mm にしたらよいだろうか。

実験について

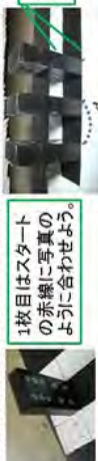
- $\sqrt{d^2 - 64}$ の d の値を自分で決めてドミノを並べる間隔と図柄の長さを決めよう。
(計算は電卓を使って小数第一位を四捨五入しよう。)



- 図柄を計算で求めた値で等分して切ってドミノに貼ろう。



- 方眼紙の枠を利用してドミノの間隔を一定にして並べよう。(間隔は自分で決めた d の値)



先に両方の方眼紙に目盛を書きおくと並べやすい。

前回の授業より



並べたドミノは倒すと...

- 倒す前と倒した後では間隔「a, b, c, d, e, f」はほとんど変わらない。
- 最後の方は間隔が変わっている！→平行に見えない。

※ドミノは図柄に使う分に図柄なし3枚を加えて並べよう。

課題 1 時間目の結果を利用して、ドミノが倒れたときに図柄が見える仕掛けを作ろう。

(計算を気づかせること)