岐阜数学教育研究
2011, Vol. 10, 19-28

円錐上の最短経路を題材にした教材の開発と実践

原田和樹[1]，愛木豊彦[1]

生徒が数学を身近に感じ，数学を好きになるためには，自ら数学的なきまりなどを発見する活動を通して，その楽しさを実感することが重要であると考えた。そこで，本論文では，円錐上の２点間の最短経路について展開図をもとに考えるという中学１年生用の教材を開発した。この授業では，円錐を組み立てる活動の中で，きまりを発見することに重点をおいている。

＜キーワード＞円錐，展開図，最短距離，三平方の定理，接線

1．はじめに

次の問題 I は，展開図を利用して解く問題としてよく知られている。

問題 I「図１のような円錐 V を考える。図１において AB は底面の直径であり，C は母線 OA の中点である。ここで，円錐の表面を通って，A から C へ行く経路で，線分 OB と必ず交わるもののうち，その経路の道のりが最短となるものの長さを求めよ」

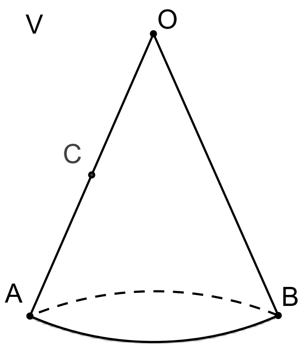


図 1

この問題を解くには，図 2 のように円錐の展開図をかき，この図上での AC の長さを求めればよい。さらに∠AOC が特別な角度であれば，三平方の定理を用いて AC の長さを求めることができる。

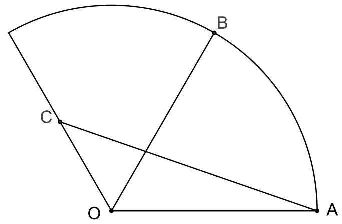


図 2

このように，問題 I は，三平方の定理の活用として取り上げられることが多い。

ここで，円錐を底面を下にして置き，上の方が高いと考えることにする。このとき，円錐の側面の展開図である扇形の中心角の大きさによって，最短経路が目的地よりも高いところを通る場合と通らない場合とがある。これは，２節で詳しく述べるように，中学生の既習内容をもとに十分考察でき，しかも，中学生にとっても興味深い内容であると判断した。したがって，SPP 事業として開催される授業を実践するに際し，これを題材にした授業案を開発することにした。

2．授業の概要

2.1. 題材について

前節で示したように，円錐の底面を下に置き，上の方が高いと考えることにする。そして，A を出発して最短経路を通って C に行く

[1]岐阜大学教育学部

ものとする。

このとき，A から C に行くまでに上り続けるかどうかということと，図 2 における $\angle$AOC の大きさの関係について考える。

まず，中心 O，半径 OC の弧を図 2 の扇形にかき，OA との交点を C’ とする。

AC が扇形の弧 CC’ に点 C で接するときを考える。

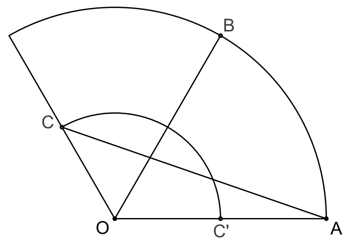


図 3

性質１

直線 AC が弧 CC’ に点 C で接するとき，つまり，$\angle$ACO=90° のとき，$\angle$AOC=60° となる。また，$\angle$AOC=60° ならば，$\angle$ACO=90° である。

（証明）C は円錐 V の母線の中点なので

$$\mathrm{CO}：\mathrm{OA} = 1 : 2.$$

よって，$\angle$ OCA=90° なので，三平方の定理より

$$\mathrm{CO}：\mathrm{OA}：\mathrm{AC} = 1 : 2 : \sqrt{3}.$$

よって，$\angle$ AOC=60° である。

また，$\angle$AOC=60° のとき，同様にして $\angle$ACO=90° となる。 （証明終）

補題１

三角形 AOC において，$\angle$ AOC $\leq$ 60° かつ，OC：OA ＝ 1：2 のとき，$\angle$ OCA $\geq$ 90°

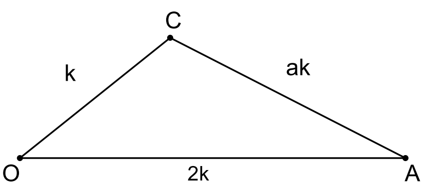


図 4

（証明）OC：OA：CA ＝ 1：2：a とする。ここで，OC の長さを k とおくと，CA ＝ $2k$, CA=ak となる。

余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos \mathrm{O} &= \frac{k^2 + (2k)^2 - (ak)^2}{2 \cdot k \cdot 2k} \\ &= \frac{5 - a^2}{4}.\end{aligned}$$

0° ＜ $\angle$OCA $\leq$ 60° より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\leq \ \cos \mathrm{O} < 1, \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{5 - a^2}{4} < 1, \\ 2 &\leq \ 5 - a^2 < 4, \\ -3 &\leq \ \ -a^2 \ < -1, \\ 1 &< \ \ \ a^2 \ \ \leq 3,\end{aligned}$$

$a > 0$ より

$$1 < a \leq \sqrt{3}. \tag{1}$$

もう一度余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}\cos \mathrm{C} &= \frac{(ak)^2 + k^2 - (2k)^2}{2 \cdot k \cdot ak} \\ &= \frac{a^2 - 3}{2a}.\end{aligned}$$

$a > 0$ と (1) より，

$$\cos \mathrm{O} \leq 0$$

なので，$\angle$ACO$\geq$90° が成り立つ。（証明終）

定理１

$\angle$ AOC $\leq$ 60° のとき，問題 I での最短経路を通って A から C に進むとき常に上り続ける。

（証明）補題１より，$\angle$ AOC $\leq$ 60° のときは，三角形 AOC は $\angle$ OCA $\geq$ 90° の鈍角三角形となる。このとき三角形 AOC の辺 AC 上に，２点 X，Y をとり，A に近い方を X とする。このとき，XO ＞ YO となることを示せば，この定理が成り立つことがわかる。（図 5）

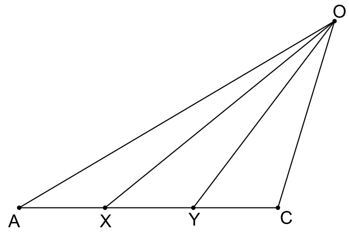


図５

これを以下の３通りの方法で証明する。

（証明１）

$$\angle\mathrm{XYO} = \angle\mathrm{COY} + \angle\mathrm{OCA}$$

より，

$$\angle\mathrm{XYO} \geq 90^\circ.$$

よって，三角形 XYO において，∠XYO が最も大きい角である。三角形において最大角には最大辺が対応するので，

$$\mathrm{XO} > \mathrm{YO}.$$

（証明終）

（証明２）

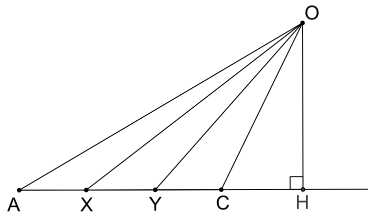


図６

AC を C 側に延長し，O から垂線を下ろし，その垂線の足を H とする。

三平方の定理より，

$$\mathrm{OY}^2 = (\mathrm{YC} + \mathrm{CH})^2 + \mathrm{OH}^2,$$
$$\mathrm{OX}^2 = (\mathrm{XC} + \mathrm{CH})^2 + \mathrm{OH}^2.$$

YC ＜ XC より

$$\mathrm{XO} > \mathrm{YO}.$$

（証明終）

（証明３）

∠ OCY = θ とおくと，余弦定理より，

$$\mathrm{OY}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{YC}^2 - 2\mathrm{OC} \cdot \mathrm{YC} \cdot \cos\theta,$$
$$\mathrm{OX}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{XC}^2 - 2\mathrm{OC} \cdot \mathrm{XC} \cdot \cos\theta.$$

$\cos\theta < 0$ なので，

$$-2\mathrm{OC} \cdot \mathrm{YC} \cdot \cos\theta > 0,$$
$$-2\mathrm{OC} \cdot \mathrm{XC} \cdot \cos\theta > 0,$$

これと，YC ＜ XC より，

$$\mathrm{XO} > \mathrm{YO}.$$

（証明終）

補題２

$60^\circ < \angle\mathrm{COA} < 180^\circ$ のとき，線分 AC と，弧 CC’ は点 C とは異なる交点をもつ。

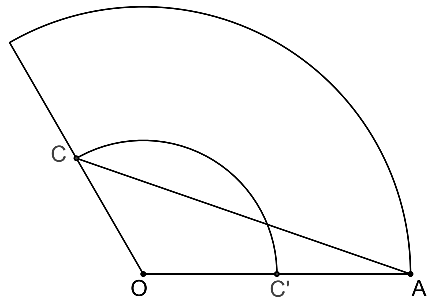


図７

（証明）三角形 AOC において，線分 CA 上に OC=CD となる点 D がとれることを示せばこの定理が成り立つことがわかる。

中心 O，半径 OC の円 O_1 と直線 CA の交点について考えると，交点の数は１つ，または２つである。

交点の数が１つのとき，直線 CA は円の接線となるので，

$$\angle\mathrm{ACO} = 90^\circ.$$

よって，性質1より，

$$\angle \mathrm{AOC} = 60^\circ.$$

これは，仮定に矛盾する。

よって，円 O_1 と直線CAは点C以外の交点Dをもつ。

この点Dが線分CA上にないと仮定する。

（i）点DがC側の半直線上にあるとき

三角形OCDは二等辺三角形なので，Oから CDにおろした垂線の足をHとすると，Hは線分CD上にある。

$\angle \mathrm{OHC} = 90^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{OCA} &= \angle \mathrm{OHC} + \angle \mathrm{HOC}\\ &= 90^\circ + \angle \mathrm{HOC}\\ &> 90^\circ\end{aligned}$$

三角形AOCにおいて，余弦定理を用いて，

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CO}^2 - 2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{CO}\cdot\cos \mathrm{C},$$

$\angle \mathrm{OCA} > 90^\circ$ より，$\cos \mathrm{C} \leq 0$ なので，

$$\mathrm{OA}^2 \geq \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CO}^2. \tag{2}$$

ここで，ACの長さの範囲を求める。

$\mathrm{OC} = 1$, AC=a とすると，OA=2である。

三角形COAにおいて，余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}\cos \mathrm{O} &= \frac{2^2 + 1^2 - a^2}{2\cdot 1\cdot 2}\\ &= \frac{5 - a^2}{4},\end{aligned}$$

$60^\circ \quad < \angle \mathrm{COA} < 180^\circ$ より，

$$\begin{aligned}-1 <&\ \cos \mathrm{O} < \frac{1}{2},\\ -1 <&\ \frac{5-a^2}{4} < \frac{1}{2},\\ 3 <&\ \quad a^2 \quad < 9,\end{aligned}$$

$a > 0$ より

$$\sqrt{3} < a < 3. \tag{3}$$

(2)，OC=1，(3)より，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2 &> (\sqrt{3})^2 + 1^2\\ &= 4.\end{aligned}$$

$\mathrm{OA} > 0$ より

$$\mathrm{OA} > 2.$$

OC=1のとき，OA=2なので矛盾する。

したがって，この場合は起こりえない。

(ii) 点DがA側の半直線上にあるとき

(イ)$\angle \mathrm{OAC} < 90^\circ$ のとき

$\angle \mathrm{OAD} > 90^\circ$ なので，三角形OADにおいて，$\angle \mathrm{OAD}$ が最大の角である。三角形において最大角には最大辺が対応するので，

$$\mathrm{OA} < \mathrm{OD} = \mathrm{OC}.$$

これは，OA：OC＝2：1に矛盾する。

(ロ)$\angle \mathrm{OAC} > 90^\circ$ のとき

三角形OACにおいて，$\angle \mathrm{OAC}$ が最大の角である。三角形において最大角には最大辺が対応するので，

$$\mathrm{OA} < \mathrm{OC}.$$

これはOA：OC＝2：1に矛盾する。

(ハ)$\angle \mathrm{OAC} = 90^\circ$ のとき

直角三角形OADにおいて，辺ODは斜辺なので，

$$\mathrm{OA} < \mathrm{OD} = \mathrm{OC}.$$

これも，OA：OC＝2：1に矛盾する。

したがって，(i)，(ii)より点Dは線分AC上に存在する。　（証明終）

定理２

60° ＜∠AOC ≤ 180° のとき，最短経路は目的地より高いところを通る。

（証明）60° ＜∠AOC ≤ 180° のときの最短経路は，補題２より，図８のようにOCを半径とする扇形の弧と点C以外の点Dと交わる。

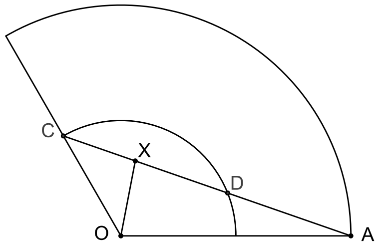


図８

このとき，線分CD上の任意の点をXとすると，点C，Dは円の円周上の点，点Xは円の内部の点なので，

$$\mathrm{OX} < \mathrm{OC}$$

となるため，最短経路は目的地より高いところを通る。（証明終）

定理３

∠AOC ＞180° のとき，最短経路は線分OCと線分OAを合わせた折れ線である。

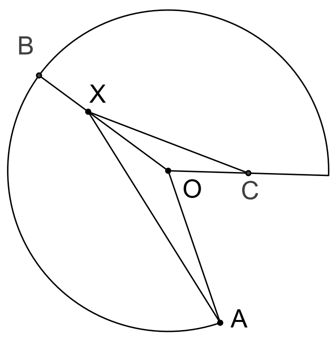


図９

（証明）

条件で示された経路は，円錐の表面を通り，かつ，線分OBと交わらなければならない。ここで，Xを経路とOBとの交点とすると，Xを通る経路の中で最短の経路は線分AXと線分XCを合わせた折れ線である。

従って，AO+OC＜AX+XCを示せばよい。

今，ABは円錐の底面の直径なので，点Bは図６の扇形の弧を２等分する点である。

よって，

$$\angle \mathrm{AOB} > 90^\circ, \angle \mathrm{COB} > 90^\circ.$$

三角形AOBにおいて，最大角には最大辺が対応するので，

$$\mathrm{AO} < \mathrm{AX}.$$

三角形COXにおいても同様に，

$$\mathrm{OC} < \mathrm{XC}.$$

ゆえに，

$$\mathrm{AO+OC} < \mathrm{AX+XC}.$$

（証明終）

このように，∠AOCの大きさによって最短経路が登り続けたり，そうでなかったりすることがわかる。

2.2. 授業のねらい

今回の実践では，山の形を円錐とみて考察していくことにした，また，対象学年が中学１年生であるため，円錐の最短経路に対して以下の考察ができると考える。

・展開図上で，スタートと目的地を直線で結んだものが，最短経路であることがわかる。
・扇形の中心角が，120° の円錐を実際に配布し，ひもをかけることで最短経路が目的地よりも高いところを通ることに気付く。
・扇形の中心角が異なる円錐をいくつか作ることで，最短経路が,「登って下りる」,「登り続ける」,「頂点まで登る」といった場合があることに気付く。

そして，本教材のねらいを以下のようにし

た。
(a) どのようなときに最短距離になるのかを，展開図や立体での考察を通して理解することができる。
(b) さまざまな円錐を作ることで，最短の道路の特徴を見つけ出すことができる。
(c) 自らいろいろなきまりを発見することで，数学への興味関心を高めることができる。

本授業で最も重要なのは，円錐を作り，きまりを発見するという数学的活動を通して，数学の楽しさを実感することである。

2.3. 授業の流れ

授業の詳しい計画は，指導案（文末資料１）で示したので，ここでは簡単に説明する。

１．第１時

(1) 問題提示・課題設定

まず，山の写真を見せ,「山に観光用の道路をつくる。景色を 360 °見ることができて，できるだけ環境を壊さずつくるにはどうしたらよいだろうか。」という問題を提示する。ここで,「景色を 360 °見ることができる」を「山の周りを一周する」,「環境を壊さない」を「できるだけ短い距離」ととらえることを確認する。

そして，山を円錐とみて考えていくこととし,「目的地までの距離ができるだけ短い道路をつくろう。」という課題を設定する。

(2) 個人追究

- ペンで円錐に道をかくなどして，最短経路がどのようなものかを予想をする。
- 円錐の表面上にひもをかけ，最短経路がどのようなものかを考える。
- 円錐の展開図上での最短経路について考える。

(3) 全体交流・まとめ

最短距離の見つけ方を交流する。

最後に,「展開図上で２点を直線で結んだ線がに最短経路になる。」とまとめる。

２．第２時

(1) 課題設定

前時の円錐での最短距離の道は目的地より上に登っていることを確認する。円錐の中心角を変えると最短距離の道はどうなるのだろうかと投げかけ「展開図の中心の角度を変えたときの最短の道路について調べよう。」という課題を設定する。

(2) 個人追究

立体や展開図，もしくはその両方をもとにして中心角が変わったときの最短距離の道の性質について調べる。各班毎に協力してさまざまな角度の円錐を作り，それらを比べながら調べる。

(3) 全体交流

個人追究したことを全体で交流する。円錐の形と最短距離の関係について見つけたことを全体で交流し理解を深める。(4) まとめ

3. 実践結果

講座名 :「マウンテンドーロ」
場所：岐阜県白川町立白川中学校
実施日：平成 22 年 9 月 16 日（木）
第３, ４校時
対象：中学１年生（47 名）

3.1. 活動の様子

１．第１時

「目的地までの距離ができるだけ短い道路をつくろう。」という課題設定後，４～５人の班に分かれて個人追究を行った。各班には岐阜大学数学科の学生が１人ずつついている。生徒は写真 1 のようにペンで予想を立てていた。

写真１

その後，写真２のように円錐にひもを巻きつけることで,「もっと上に登ったほうが短くなる」ととつぶやく生徒もいた。

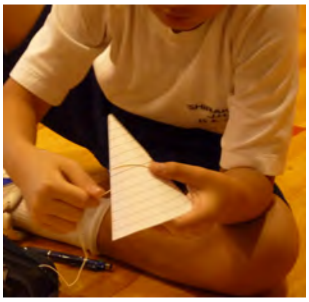


写真２

そして，写真３のように円錐の側面を展開することで「予想の線がたるんでいる。ぴんと張ればいい」といった声が上がり，最短距離を見つけていた。

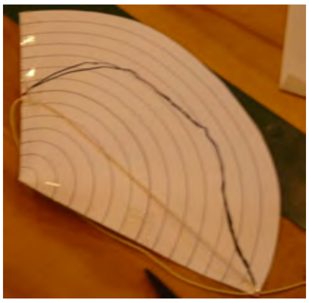


写真３

全体交流で出された「この円錐だと最短の道路は目的地よりも登って下りている。」という意見を，全員が納得していた。そこで，山の形が変わっても最短の道路はいつでも「登って下りる」のかという疑問を提示し，第２時へとつなげた。

２．第２時

「展開図の中心の角度を変えたときの最短の道路について調べよう。」という課題設定後，第１時と同じように班に分かれて追究を行った。班内で協力し写真４のようにさまざまな円錐を作っていた。

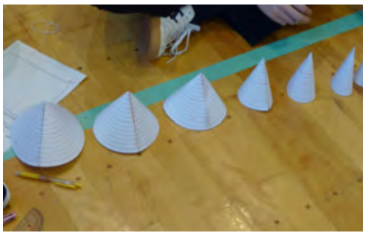


写真４

その中で，展開図の中心の角度で場合分けして「登り続ける」ときや「頂点まで登らなくてはならない」（写真５）といった特徴を見つけて，全体交流で発表していた。

写真５

4. 考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

（１）円すいで最短になる道路の見つけ方は理解できましたか?

・理解できた …46 人

・やや理解できなかった …1 人

（２）さまざまな円錐を作って，最短距離になる道路の特徴を見つける活動についてどう思いましたか?

・面白かった。

・実際に作ってみると，いろんなことが分

かった。

・円すいをたくさん作ってそれぞれを比べたりしてわかりやすくできた。

（３）立体上で最短になる道路を見つけるにはどうすればよいですか?

・展開図にしてスタートと目的地を直線で結ぶ。

（４）授業の感想を自由に書いてください。

・楽しく考えながら答えをみつけられた。

・実際に物を使ってやることができたので楽しかった。

・ふだんあまり考えない事を考えられたので楽しかった。

・難しかった。

・数学の楽しさが分かった。

本授業のねらい (a)(b)(c) の達成度について考察する。

(a)「どのようなときに最短距離になるのかを，展開図や立体での考察を通して理解することができる。」について

個人追究のときに，全員が最短距離になる道を理解し,「登って下りている」等の考察ができていた。また，アンケートの質問 (1) で受講生徒 47 人中 46 人が「理解できた」と回答し，質問 (3) では「展開図にしてスタートと目的地を直線で結ぶ。」と回答していた。このことから，このねらいは達成できたと考える。

(b)「さまざまな円錐を作ることで，最短の道路の特徴を見つけ出すことができる。」について

第２時の個人追究で，班内で協力しどの班も「登り続ける」ときや「頂点まで登らなければならない」ときがあることを展開図の扇形の角度で場合分けして特徴を考えられていた。また，アンケートの質問 (2) で「実際に作ってみると，いろんなことがわかった」や「円すいをたくさん作ってそれぞれを比べたりしてわかりやすくできた」といった回答があったことから，このねらいも達成できたと考える。

(c)「自らいろいろなきまりを発見することで，数学への興味関心を高めることができる。」について

アンケートの質問 (4) で「実際に物を使ってやることができたので楽しかった。」や「ふだんあまり考えない事を考えられたので楽しかった。」といった回答があった。また，どの生徒も最短経路についてのきまりを発見できていた。このことから，このねらいも達成できたと考える。

5．今後の課題

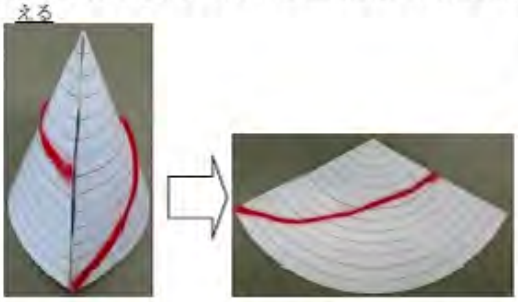
今後の課題は，本教材の見直しである。問題設定に少し無理があり生徒がすぐには理解しがたかった。さらに本教材についての教材研究をし，わかりやすい問題設定にしたい。対象が中学２，３年生の場合では，より深い考察もできるためほかの授業展開も考えていきたい。また，授業中の時間配分がうまくいかず，生徒たちも円錐を作ることに夢中になって学習プリントに気づきや考えを記入する時間が十分に取れなかった。この点についても改善していきたい。

今回の教材開発をもとに，他領域の教材開発もしていきたいと考えている。また，算数・数学が楽しいを思える児童・生徒が増えるような教材開発を行っていきたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版株式会社.

文末資料１（第１時）

過程	ねらい	学習活動	指導援助
導入	○問題場面を把握し，よりよい道順を予想することができる。	**1 スライドを見て問題場面を把握する** 問題 山に観光用の道路をつくる。景色を 360° 見ることができて、できるだけ環境を壊さずつくるにはどうしたらよいだろうか。 課題 目的地までの距離ができるだけ短い道路をつくろう。	・スライドを映す。 ・問題、課題の紙を貼る。
展開	○立体上や展開図上での操作を繰り返すことで、最短距離を見つけることができる。 ○最短距離になる理由を考え、交流することで、その理由が分かる。 ○最短距離の作図の仕方がわかる。	**2 個人追究をする** ①ペンで道を円錐にかき、予想を立てる ②ひもを予想した線に巻きつけ固定して考える できるだけまっすぐにしよう ひもを引っ張れば距離が短くなるぞ 上の方を通った方が距離は短くなりそうだ このままでは考えにくいなぁ ③立体で考えた道順が、展開図上ではどうなっているのかを考える  ひもにゆるみがあるぞ（これは最短ではなさそうだ） 二点をまっすぐに結んだ時が最短距離になりそうだ。 ④展開図で考えた道順が、立体上ではどうなっているか考える  最短距離のときは目的地より上に登らなければならない 上の方が円の半径が短くなるから、距離も短くなる **3 全体交流をする** ・全体でどのように巻きつけたのかと、なぜそのときが最短距離になるのかを交流する。	・ケント紙の円錐、ワークシートを配布する。 ・各班長が道具（テープ、たこ糸）を配る。 ・どんな時に距離が短くなりそうかを問う。 ・生徒にその道順を考えた理由をワークシートに書かせる。 ・立体からのみで考えている生徒には、「円錐のままだと考えにくくない？」などと問い、展開できるようにする。 ・なぜそのときに距離が短くなるのかを問う ・ケント紙の三角錐を切ることで，展開図を考える。 ・展開図をテープで貼り、立体に戻す。 ・展開図上で、２点を直線で結んだ生徒に対しては、「道はどんなふうになっているのか」と問い、立体に戻すように促す。
まとめ		**4 まとめ** 展開図上で二点を直線で結んだ時に最短距離になる	・どんな形の円錐でも、同じように目的地より上に登って下りるルートになるのかを問い、次の時間へつなげる。

文末資料２（第２時）

<table>
<tr>
<td>課
題</td>
<td>○問題場面を把握し、予想を立てることができる。</td>
<td>1 問題場面を把握する
・前時の円錐での最短距離は目的地より上に登って下っていることを確認する。
・二種類の円錐を提示する。

中心角を変えれば形が違う円錐ができることを理解する。
円錐の形が変わると最短距離はどうなるのかと問い課題につなげる。</td>
<td>・色違いの形が違う円錐を用意し、展開して見せて、扇形の中心角の大きさが違うことを確認する。
・円錐の形が変わるとどうなるのだろうかと疑問を持たせる。</td>
</tr>
<tr>
<td>展
開</td>
<td>○立体上や、展開図上での操作を繰り返し、円錐の形と最短距離の様々な関係を見つけることができる。</td>
<td>課題 展開図の中心の角度を変えたときの最短の道路について調べよう。

2 個人追究をする
<table>
<tr><td>立体をもとにして</td><td>展開図をもとにして</td></tr>
<tr><td>・180° 以上だとひもがかからない。
・円錐が細いほど、登る角度、下りる角度が小さい
・360° だと山にならない
・真裏を見たとき中心角小さいほど傾きが大きくなる</td><td>・円錐を作らなくても展開図だけで考えられる
・目的地の線より内側に入ると登って下りる。
・目的地より高い部分の長さの真ん中の地点が一番高い</td></tr>
<tr><td colspan="2">両方をもとにして</td></tr>
<tr><td colspan="2">・中心角が小さければ登り続けるときがある。
・60° 以下だと登り続けそう
・180° 以上は頂上を通ってから戻るルートになる
・180° 以上は最短距離が変わらない
・180° 以下だと中心角が小さいほど最短距離は短い</td></tr>
</table></td>
<td>・ワークシートを配る。
・ケント紙とコピー紙に円をかいた紙を用意する。
・各班長が分度器を配る。
・調べた跡を残し、発表で提示できるようにする。
・立体と展開図の両方で調べられるようにする。
・調べられず、手が止まっている生徒に対しては「前時でどのように最短距離を調べたのか」を問い調べる手段を与える。

・気付いたことをワークシートに書かせる。</td>
</tr>
<tr>
<td>ま
と
め</td>
<td>○全体交流と飛行機の航路の話から、日常の中にある数学を実感することができる。</td>
<td>3 全体交流をする
・自分が見つけた、円錐の形と最短距離の関係を全体で交流し理解を深める

4 まとめをする

・飛行機の航路の話を聞き、生活の中に活かされていることを実感する

5 アンケートを記入する</td>
<td>・調べたときに作った立体や展開図をもとにし、提示しながら発表させる。</td>
</tr>
</table>