岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 113-118

ゲーム理論と１次関数を題材とした中学生用教材の実践報告

後藤弘樹[1]，愛木豊彦[2], 小川達也[3],

本稿は，ミニマックス原理に基づくゲーム理論を題材とする中学生用教材の実践報告である。ゲーム理論を考えるとき，多くの場合確率を用いるが，それでは中学生にとって難しいと判断し，確率の要素を取り除いた新しいゲームを考案した。このゲームでは，得点がカードの枚数の１次関数として表されている。従って，問題解決の過程で既習の内容である１次関数を活用することができる。ここでは，中学２年生を対象に実践した授業の結果を報告する。
＜キーワード＞ゲーム理論，１次関数，数学の有用性

1. 序論

2010 年に高校生を対象に,「グリコじゃんけん」を題材とし,「ゲーム理論」に基づき最適戦略を決定するという授業実践をした（[1])。その授業のねらいは，学校で学ぶ数学が活用できるという経験を通して，その有用性を実感することであった。

ゲーム理論には，ミニマックス原理（[2], [3] 参照）という考え方がある。これについて簡単に説明する。2 人で対戦し，得点が高い方が勝ちというゲームを考える。ただし，2 人の得点の和は常に 0 になるように決定する。このゲームにおいて，まず，自分が選択できる各手に対し，対戦相手が最善を尽くしたとき，つまり，被害が最も大きくなる状態（ゲームの得点に対する期待値の最小値）を求める。その各手に対する被害の最大値の中で，被害が最も小さくなる（つまり，期待値が最も大きくなる。）自分の手を選ぶ戦略をミニマックス原理という。

高校生向けの実践の際は，ミニマックス原理という戦略を生徒に教えた後，その戦略によって定まる戦略を「グリコじゃんけん」における最適解として求めるという流れで授業を行った。そこでは、プレイヤーのグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ x, y, z と置き，$x + y + z = 1$ となることから，プレイヤーの利得の期待値を，2 変数関数の領域内の最大最小問題として解いた。

そして [4] で，この題材を中学生でも扱えるように簡単にした授業計画について報告した。中学生は 2 変数関数や領域に関する問題は取り扱えないため，プレイヤーの戦略が 2 つ (今回は表と裏) しかないゲームについて考えることとした。[4] の計画では，3 時間構成の授業において，ミニマックス原理，確率の積の法則，余事象の確率，期待値の３つを学ぶことになっていた。この計画では，新たに学ぶことが多く，ねらいとする「学校で学ぶ数学の有用性を実感すること」に十分に取り組むことができないと考え，ここで紹介する実践ではさらに問題を単純化した題材を扱った。

本稿では，次節においてその単純化した題材の解説を与え，3 節で授業計画，4 節で実践結果を述べる。

2．題材の解説

[1]岐阜大学教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部
[3]岐阜大学附属中学校

2.1 元の問題

今回の授業で扱うゲームの元となったゲームのルールを説明する。このゲームは2人で対戦をする。プレイヤーはそれぞれ○と×の書かれたカードを1枚ずつ持っている。2人のプレイヤーは2枚のカードのどちらかを選択して同時に出す。その出されたカードの○と×の組み合わせにより，利得表 (表1) からプレイヤーの得点を決定する。（利得表には，プレイヤーAの立場から見た得点が記されている。）

A＼B	○	×
○	1	-1
×	-2	2

(表1)

プレイヤーAが○を出す確率を x，プレイヤーBが○を出す確率を a とすると，1回のゲームでプレイヤーAが得るポイントの期待値 E は，$E = 6ax - 3x - 4a + 2$ となる。

このゲームの解をミニマックス原理に従って解くと，x（$0 \leqq x \leqq 1$）の値に対し，a（$0 \leqq a \leqq 1$）が変化したときの E の最小値 $E_1(x)$ を求め，その $E_1(x)$ が最大となる x の値を求めればよい。

表1で与えられた利得表によるゲームでは，$E = 2(3x-2)a - 3x + 2$ より，

(i) $0 \leq x < \dfrac{2}{3}$ のとき

E を a の関数とみると，E は a の単調減少関数なので，$a = 1$ で最小値をとる。よって，$E_1(x) = 3x - 2$

(ii) $\dfrac{2}{3} \leq x \leq 1$ のとき

このとき，E は a の単調増加関数なので，$a = 0$ で最小値をとる。よって，$E_1(x) = -3x + 2$

(i),(ii) より，

$$E_1(x) = \begin{cases} 3x - 2 & (0 \leq x < \frac{2}{3}) \\ -3x + 2 & (\frac{2}{3} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となるので，ミニマックス原理で定まるプレイヤーAの最適解は，$x = \dfrac{2}{3}$ で，そのとき，$E = 0$ となる。

2.2 授業で扱う問題

この問題を中学生用の題材にしようとすると，上で示したように確率に関する未習の事項 (積の法則，余事象の確率，期待値) を必要とする。それらの内容の学習を含めた上で授業を行おうとすると時間がかかりすぎるので，ゲームのルールから確率の要素を取り除いた。

そのルールは以下の通りである。

「AとBはぞれぞれ○と×の2種類のカードを合計6枚になるように選択し，手札をつくる。お互いの手札の中の○と×のカードの枚数から，Aの得点を次の式で決定する。

$$\begin{aligned}(A\text{の得点}) \\ =\ & 1 \times (A\text{の○の枚数}) \times (B\text{の○の枚数}) \\ +\ & (-1) \times (A\text{の○の枚数}) \times (B\text{の×の枚数}) \\ +\ & (-2) \times (A\text{の×の枚数}) \times (B\text{の○の枚数}) \\ +\ & 2 \times (A\text{の×の枚数}) \times (B\text{の×の枚数})\end{aligned}$$

このとき，Aの点数が正であればAの勝ち，負であればBの勝ち，0のときは引き分けとする。」

Aの得点を y, Aの○の枚数を x, Bの○の枚数を a とすると，

$y = ax - (6-a)x - 2a(6-x) + 2(6-a)(6-x)$
$= 6(a-3)(x-4)$ となる。

よって，Aは○の枚数を4枚にすれば，常に引き分けとなり，負けることはない。

このゲームは，先の問題における確率を，6枚中の〇のカードの枚数と置き換えたものになっている。従って，Aが〇のカードを4枚出せば常に引き分けるという戦略は，先の問題で示した $x = \frac{2}{3}$ と同じ戦略であり，ミニマックス原理による戦略でもある。

このゲームの戦略について考察することで，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学をより身近に感じ，数学の有用性が実感できるのではないかと考え，授業計画を立てた。

3. 授業計画

3.1 ねらい

(i) ゲームのルールを理解し，よりよい戦略について1次関数のグラフを利用して考えることができる。
(ii) 遊びの中にある問題を，既習の数学の内容で解決できることを知り，その有用性を理解する。

3.2 授業展開

i) 1時間目
(1) ゲームのルールを説明する。手札の決め方，得点及び勝敗の決定までをまずは授業者が手本として見せる。その後，実際に2人1組となって今回取り扱うゲームを行う。
(2) 本時において考察する問題を提示する。
「A の立場でゲームに参加する。今回 B の手札は〇のカードが5枚，×のカードが1枚であることが分かっている。このとき，A はどのような手札にすれば，B に勝つことができるだろうか。」

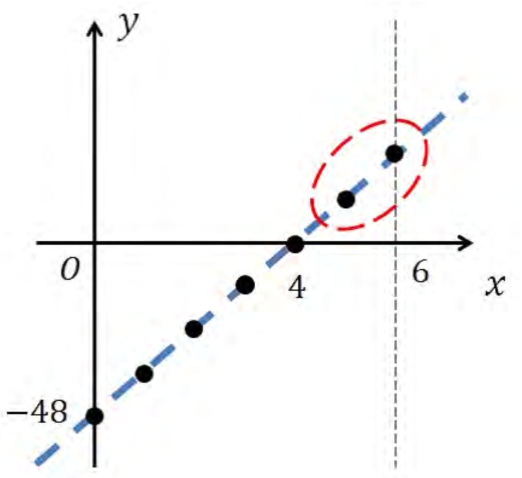
自分の手札の〇のカードの枚数を x，そのときの A の得点を y とすれば，A は「〇が x 枚，×が $(6-x)$ 枚」の手札となり，B は「〇が5枚，×が1枚」の手札である。このとき定義から，A の得点 y は，

$$\begin{aligned} y &= 1 \times x \times 5 + (-1) \times x \times 1 \\ &+ (-2) \times (6-x) \times 5 + 2 \times (6-x) \times 1 \\ &= 12x - 48 \end{aligned}$$

と表される。
(3) 本時の課題を提示する。
「A の得点を表す式 $y = 12x - 48$ のグラフから，A が勝つ x の値を求めよう。」
(4) 問題，課題の考察をする。ここで予想される生徒の活動を以下に挙げる。

A の得点を表す式は $y = 12x - 48$ であるため，A が勝つのは y の値が正のときである。

よって(グラフ1)より，$x = 5, 6$ のとき，つまり，A の手札が「〇のカードが5枚，×のカードが1枚」のとき，もしくは「〇のカードが6枚」のとき，A の勝ちとなる。また，A の手札が「〇のカードが4枚，×のカードが2枚」のとき，A と B は引き分けとなり，それ以外の手札の組み合わせを選んだとき，A の負けとなる。



(グラフ1)

ii) 2時間目
(1) 本時において考察する問題を示す。
「B のいろいろな手札の作り方に対して，A の得点はそれぞれどのように変化するだろうか。」

前時において，Bの手札が「〇のカードが5枚，×のカードが1枚」のときのAの手札の決定の仕方について考えている。

Bの手札が「〇のカードが5枚，×のカードが1枚」のときのAの手札の決定の仕方について考えたことを受け，Bの手札の〇と×のカードの枚数の組み合わせが変ったときの，Aの手札の作り方について考え，Aの戦略についてまとめていく。

前時と同様に，Aの〇のカードをx枚とすると，

・Bの〇のカードが0枚のとき

$$y=-18x+72$$

・B〇のカードが1枚のとき

$$y=-12x+48$$

・Bの〇のカードが2枚のとき

$$y=-6x+24$$

・Bの〇のカードが3枚のとき

$$y=0$$

・Bの〇のカードが4枚のとき

$$y=6x-24$$

・Bの〇のカードが6枚のとき

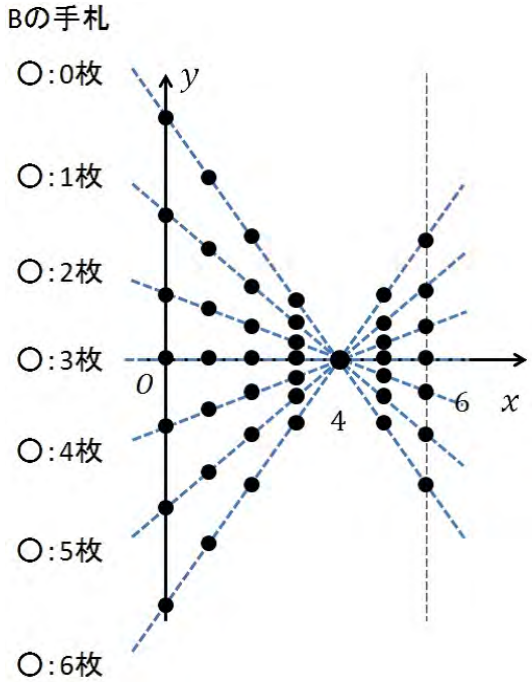
$$y=18x-72$$

(2) 課題提示

「7本のグラフから，AとBの手札がどのような組み合わせのときに，Aが勝つのかをまとめよう。また，負けるとき，引き分けのときも考えよう。」

(3) 問題，課題の考察をする。ここで予想される生徒の活動を以下に挙げる。

Bの手札の〇と×のカードの枚数の組み合わせが変化したときのそれぞれをグラフにまとめると，(グラフ2)のように表される。



(グラフ2)

グラフの特徴から，以下のことに気づく。

① どんな式でも(4,0)を満たす。Aの手札の中に4枚の〇のカードがあるとき，Bがどのような手札でも得点は0となる。

② Aの手札の中に〇のカードがないとき，Bの手札によってAの得点の変動は最も大きくなる。

③ Bの手札の〇の枚数が3枚未満のときは，Aの手札の〇の枚数を4枚未満にすればよい。

④ Bの手札の中の〇のカードの数が3枚のとき，$y=0$であるから，Aがどのような手札でも得点は0になる。

4．実践結果

(1) 実践校

岐阜大学教育学部附属中学校2年生

(2) 実践日

平成23年3月4日，3月7日

(3) 考察

個人追究以後について述べる。

i) 1時間目について

個人追究では予想される生徒の活動でも書

いたように，グラフを用いて y の値の正負から，A の勝つときを考えることができていた。

全体交流時には，生徒はグラフ黒板にグラフを描いて説明をした。その際生徒は，今回 x は自分の手札の〇のカードの枚数だから，グラフを直線で結ばないよう意識してグラフを描いた。x が 0 以上 6 以下の整数値しかとらないことを意識して考察することができていた。授業者としては，本時は今回取り扱うゲームのルールを理解することと，y の値の正負に注目することを主眼においていたため，こちらからはあえてふれないように計画していたが、生徒たち自身が気づき，発言が行われたことにより，本題からもずれずに取り扱うことができた。

ii) 2 時間目について

個人追究では，予想される生徒の活動で挙げた①〜④の性質の他にも，A の立場ではこのゲームは公平なゲームであることを，次のように見つけた生徒がいた。

「グラフから，A が勝つときは 18 通り，A が負けるときも 18 通りである。よって，このゲームは A と B が公平なゲームである。」

全体交流ではさらに，B の立場からゲームについて考えたという生徒が発言し,「A の立場で見れば公平なゲームだが，B の立場から見るとこのゲームは公平なゲームではないのではないか。」と発言した。

その生徒の説明によると，B の手札が「〇のカードが 6 枚」の状態であれば，B の勝つ場合の数は 4，B の負ける場合の数は 2 となり，B の立場から見れば有利なゲームであると考えることができる，ということだった。

この意見について話を深めていきたかったが，授業時間の都合があったためできなかった。

iii) 2 時間を通して

ねらいの 1 つである「ゲームのルールを理解し，よりよい戦略について 1 次関数のグラフを利用して考えることができる。」では，授業後のアンケートの結果から，1 次関数のグラフを描いたことで,「規則性を読み取りやすかった。」,「すべてのグラフが，x 軸と 1 点で交わっていることが一目でわかった。」,「絶対に引き分けにできる戦法があることがわかった。」,「1 次関数のグラフがこんなふうにも使えるんだなとわかった。」といった回答が得られた。授業中の様子を見ても，1 次関数のグラフを用いてゲームの戦略について考えることができていたため，このねらいは達成できたと考える。

もう 1 つのねらいである「遊びの中にある問題を，既習の数学の内容で解決できることを知り，その有用性を理解する。」では，授業後のアンケートから「1 次関数のグラフに表すことによって，勝つ方法を考えることができ，数学とゲームの関連性がよくわかった。」,「難しいゲームだったが，グラフを描くことでわかるようになってうれしかった。」,「ゲームでも法則を数学的に考えられることがわかった。」といった回答が得られた。1 次関数のグラフを活用することで，問題を解決し，グラフを用いて考えることの有用性を感じてもらえたのではないかと考える。

5．今後の課題

授業内では，A の立場でゲームを考えるよう誘導したが，B の立場で考えてみたという生徒の発言で，意見交流に深みが出た。どちらの立場からも考えることで，よりゲームについて理解し，考えることができたのではないかと考える。時間の都合もあるが，そのような授業形式も考えていきたい。

また，アンケートの中に,「絶対に負けない方法は分かったけど，絶対に勝てる方法がなかったところがしっくりこなかった。」といったように，このゲームの戦略はどうすればいいのかという結論がないことに関しての疑問が挙がった。今回の実践では避けたが，A,B の持つカードの枚数に上限を設けるなど，新

たなルールを追加していくことで，より戦略について考察できる授業形式も考えていきたい。

最後に，授業実践にあたり，多大なご協力をいただいた関係者の皆様に心から感謝いたします。

引用文献

[1] 後藤弘樹・愛木豊彦，2010，ゲーム理論と線形計画問題を題材とした教材の開発と研究，数学教育学会臨時増刊号，pp.80-82.

[2] 小山昭雄，森田道也，1980，現代数学レクチャーズ D-1 オペレーションズ・リサーチ，培風館.

[3] 依田浩，1981，工学系のための OR，朝倉書店.

[4] 愛木豊彦，後藤弘樹，2011，ゲーム理論（ミニマックス原理）を題材とした教材の開発，2011 年度数学教育学会春季年会発表論文集, 数学教育学会誌臨時増刊，pp.83-85.

[5] 吉田稔　他 17 名，2006，新版中学校数学 2，大日本図書株式会社.