岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 119-127

変換群の考え方による中学校・高校における平面幾何の構成

佐治健太郎[1]

ユークリッド群が作用する座標平面という出発点から, 中学校・高校における平面幾何学の定理の証明を述べる。
＜キーワード＞ユークリッド群, 平面幾何学, 三角形の内角の和, 三角形の合同条件

1. 序

著者は2008年から数年間, 小中高校教員を目指す大学生向けに幾何学を講義している。その中で「ユークリッド幾何学」という言葉に対して必要以上の畏怖を感じている学生を少なからず目にした。その原因の一つとしてユークリッド幾何学という単語にユークリッド原論にそって５つの公準から積み上げていくという形でのみ触れていることが考えられる。ユークリッド原論のユークリッド幾何学は一つの数学体系としてまとまっており, 公理から一つ一つ積み上げていく論理の構成や数学の厳格さを学ぶには非常に優れているが, 議論が複雑であり, 曖昧な部分も多く, 難しい。中学校でも学習するようにユークリッド幾何学はありふれたもので, 特に不思議さや難しさ・畏怖を感じるものではないが, このような経験により教員が必要以上の畏怖を抱くのは好ましくない。

そこで, 著者は実数の性質・群論や線形代数・距離空間等の基礎概念を修得済みである学生（岐阜大学教育学部３年生）に対してクライン流の「群が作用する集合に対して, その作用で不変な性質を研究するのが幾何学である。」との立場からユークリッド幾何学を「ユークリッド群が作用する座標平面に対して, その作用で不変な性質を研究するものである。」との文脈で構成し, 中学校・高校で習う幾何学の定理をこの立場で証明してみせるという講義を, 双曲幾何学を導入するための前段階として２回ほどかけて行った。大学の講義は通常, 先に進んでいくので, 復習をすることはあるにせよ, 習ったことを用いて中学校の学習内容まで「戻る」ことは少ないが, 学生達は「新鮮だった」,「代数との関連性がわかった」や「中学校の学習内容と高校の学習内容がつながった」等の感想を述べており, 一定の効果があったと考えられる。本論文はこの講義の内容をまとめたものである。証明はなるべく平易に書き, 群論や距離空間等の基本的な用語も定義を述べた。

本論文によって教員を目指す学生はこのような平面幾何学の構成法もあるということを理解して欲しい。また, 数学において一つの理論体系の構成法は一つでなく, 基礎におく考え方や立場, 重視する事項等に応じて様々な方法があることも理解して欲しい。そして, 正しい議論を行う限り, 構成法が違っても同様の結果が得られることを実感して欲しい。

2. 平面幾何学の構成

2.1 群とその作用

集合の**変換**とはその集合上の全単射のことをいう。群とは変換の性質を取り出したものである。

定義 1. 集合 G は二項演算 $\cdot$ を持つ (すなわち, 任意の $a,b \in G$ に対して $a \cdot b \in G$ が定まっている) とする。これが次の条件をみた

[1]岐阜大学教育学部

すとき, $(G, \cdot)$ を**群**という。

- 任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$。
- ある $e \in G$ (**単位元**という) が存在して, 任意の $a \in G$ に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$。
- 任意の $a \in G$ に対して $a^{-1} \in G$ が存在して $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$。

群がある集合の変換の集合であるという状況を考える。これは,「群の一つの元に対して集合の変換が定まる」という意味である。これを定式化する群の作用という概念を導入しよう。G を群, X を集合とする。G の各元が X を "動かす" という状態を考えるのであるが, G は群なので群の演算と相性が良いような状態を考えよう。

定義 2. G を群, X を集合とする。G **が** X **に作用する**とは, 任意の $a \in G$ と任意の $x \in X$ に対して $a(x) \in X$ が定まっていて, 単位元 e に対して $e(x) = x$ であり, 任意の $a, b \in G$ に対して $(a \cdot b)(x) = a(b(x))$ が成り立つときをいう。

集合 X を自分自身にうつす全単射全体を $T(X)$ と書く. つまり,

$$T(X) = \{ f : X \to X \,|\, \text{全単射} \}$$

である。これは写像の合成を演算とする群をなす。群の作用の定義をみると分かるが, 群 G が X に作用することと, 準同型写像 $G \to T(X)$ があることは同値である。また, $T(X)$ は X に自然に作用している。$T(X)$ の部分群を X **上の変換群**という。

2.2 群の作用と幾何学

1872 年にフェリックス・クラインはエルランゲン大学の教授就任演説において次のように幾何学を統一的に見る方法を提示した。「幾何学とは集合上の変換群によって変わらない性質を研究するものである。」これはこんにち, **エルランゲン目録**といわれており, 現代でもこの考え方のもとで幾何学の研究は行われている。もう少し詳しく述べよう。

定義 3. (クライン) 幾何学とは, 集合 X と X に作用する群 G との組 (X, G) のことである。そして, G の作用で変わらない性質を研究する。

このような文脈で幾何学を体系的にとらえることができる。たとえば**位相幾何学**とは, 位相空間 X と X の同相写像全体 $\mathrm{Homeo}(X)$ との組 $(X, \mathrm{Homeo}(X))$ のことである。さらに, $n \times n$ 行列全体 $M(n, \boldsymbol{R})$ への $n \times n$ 正則行列 $GL(n, \boldsymbol{R})$ の作用 $M(n, \boldsymbol{R}) \times GL(n, \boldsymbol{R}) \ni (M, X) \mapsto X^{-1}MX \in M(n, \boldsymbol{R})$ を考える。行列のトレース, 行列式, 階数, 固有値, 指数はすべてこの作用で変わらない。線形代数学における中心的な学習内容は行列が持つ上記のものの理論であることを思い出すと, 線形代数学も幾何学の一つであるとみることもできる。

2.3 ユークリッド平面

幾何学とは集合とそれに作用する群の組である。まずは土台たるべき集合のほうを用意しよう。これはユークリッド平面と呼ばれる.

定義 4. 集合 X に対して写像 $d : X^2 \to \boldsymbol{R}$ が次の条件を満たすとき, d を**距離関数**といい, $x, y \in X$ に対して $d(x, y)$ を x と y との**距離**という。組 (X, d) を**距離空間**という。

- 任意の $a, b \in X$ に対して $d(a, b) \geq 0$ で, $d(a, b) = 0$ の必要十分条件は $a = b$ である。
- 任意の $a, b \in X$ に対して $d(a, b) = d(b, a)$。
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (**三角不等式**)。

$\boldsymbol{R}^2$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

と定義すると d は距離であり, **ユークリッド距離**という。この距離を与えた $\boldsymbol{R}^2$ を**ユークリッド平面**と呼ぶ。

2.4 ユークリッド変換

いよいよここで, ユークリッド平面に作用する群を導入し, ユークリッド幾何学を定義しよう。

定義 5. 距離空間 (X, d) に対して X の上の全単射 $f : X \to X$ が任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(x, y) = d\bigl(f(x), f(y)\bigr)$$

を満たすとき, **等長変換**という。

等長変換全体は群をなすことはすぐにわかる。これを**等長変換群**という。ユークリッド平面の等長変換群を**ユークリッド群**といい $\mathrm{Euc}(2)$ と書く。$\mathrm{Euc}(2)$ の元を**ユークリッド変換**という。

例 6 (ユークリッド変換の例)**.** 以下はユークリッド変換である。

1. ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ をとる。**$\boldsymbol{v}$ に関する平行移動** $p_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$。

2. 点 c と実数 θ をとる。**点 c 中心の θ 回転** $\rho_{(c,\theta)}$。c が原点のときこれは線形写像で, 行列
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
であらわされる。

3. 直線 l をとる。l に関する**対称移動** r_l。l が原点を通るときこれは線形写像で, l の方向ベクトルを $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ とすると, r_l は行列
$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$
であらわされる。

4. 直線 l と l に平行なベクトル $\boldsymbol{v}$ をとる。$p_{\boldsymbol{v}} \circ r_l$ を l に関する **映進**という。

$\mathrm{Euc}(2)$ と $(\boldsymbol{R}^2, d)$ との組を**ユークリッド幾何学**といい, この作用で変わらない性質を調べる。この作用は次の性質を満たす。

定理 7. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ に対してある $f \in \mathrm{Euc}(2)$ が存在して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ を満たす。

この性質をもつ作用を**推移的**な作用という。群は元をかけるという自分自身への作用をもつ。群の任意の元はこの作用によって任意の元に移されるので群に対して「どこでも同じ形をしている。」とのイメージをもつことができる。集合に群が推移的に作用していると, 同様に群によって任意の元は任意の元に移されるので, 群の推移的な作用をもつ集合も「どこでも同じ形をしている。」とのイメージをもつことができる。定理 7 は「ユークリッド平面はどこでも同じ形をしているとのイメージをもつことができる。」という意味である。

さて, 定理 7, すなわち $\mathrm{Euc}(2)$ の $\boldsymbol{R}^2$ への作用が推移的であることは次の補題が示されれば示される。

補題 8. 任意の $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して集合

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{p} \mid d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\}$$

は直線である。さらに, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に関する対称移動は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に移す。

$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**垂直二等分線**という。まだ角度を定義していないので垂直というの

は気持ち悪いが, 定義と思ってしまえば構わないだろう。

補題 8 の証明の前に記号を導入しておく。以降スペースの都合により,

$$\cos\theta = c_\theta,\ \sin\theta = s_\theta$$

の略記法を使う。標準的な記号でないので使わずに済む場合はなるべく使わない。

補題 8 の証明. 前半は $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の定義式が一次式で書かれることからすぐに示される。後半を示す。二点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の中点を原点にとり, $\boldsymbol{x} = r(\cos\theta,\sin\theta), \boldsymbol{y} = -r(\cos\theta,\sin\theta)$ としても一般性を失わない。原点を通る方向ベクトルが $(\cos(\theta+\pi/2),\sin(\theta+\pi/2))$ の直線に関する対称移動を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta+\pi) & \sin(2\theta+\pi) \\ \sin(2\theta+\pi) & -\cos(2\theta+\pi) \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c_{2\theta+\pi} & s_{2\theta+\pi} \\ s_{2\theta+\pi} & -c_{2\theta+\pi} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -c_{2\theta} & -s_{2\theta} \\ -s_{2\theta} & c_{2\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} rc_\theta \\ rs_\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -r(c_{2\theta}c_\theta + s_{2\theta}s_\theta) \\ -r(s_{2\theta}c_\theta - c_{2\theta}s_\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rc_{2\theta-\theta} \\ -rs_{2\theta-\theta} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

となり, 後半も示される。 □

2.5 内積と角度

$\boldsymbol{R}^2$ は距離だけでなく, 内積という構造も持っている。これが $\mathrm{Euc}(2)$ の作用で変わらないことを見ていこう。$\boldsymbol{R}^2$ の**内積**を $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$$

と定義する。記号 ${}^t(\ )$ は転置行列をあらわす。右辺はベクトルは縦ベクトル, すなわち 1×2 行列だと思って積をとっている。このように書く理由は次節で分かる。このとき $\boldsymbol{x}$ の大きさ $|\boldsymbol{x}|$ を $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする。これは, つぎの**コーシー・シュワルツの不等式**

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}) \tag{5}$$

を満たす。

証明. 任意の実数 t に対してベクトル $\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$ の長さは正である。よって

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y})t^2 + 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 t + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) \ge 0$$

である。ゆえに t に関するこの式の判別式は負である。従って,

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^4 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}) \le 0$$

である。ゆえに $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y})$ となる。 □

この式から

$$\frac{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}||\boldsymbol{x}|} \le 1 \iff -1 \le \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}||\boldsymbol{x}|} \le 1$$

を得る。ゆえにある $\theta \in [0,\pi]$ が存在して $\cos\theta = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$ が成り立つ。この θ を $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の**なす角**という。

次の補題は内積やなす角がユークリッド変換で変わらないことを主張する。

補題 9. 原点を固定する写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ がユークリッド変換であるための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})$ が成り立つことである。

証明. 写像 f は原点を固定する等長変換とする。等長性と原点は動かないことから任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $|f(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成り立つ。$2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2$ なので, $2f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y}) = |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|^2 - |f(\boldsymbol{x})|^2 - |f(\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2 = 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ を得る。逆に原点を固定する写像 f が $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})$ を満たすとする。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすることにより, $|\boldsymbol{x}| = |f(\boldsymbol{x})|$ を得る。あとは同じ計算により, $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ を得る。 □

2.6 ユークリッド群

本小節の目標はユークリッド群の元を全て具体的に書くことができると主張する, 次の定理を示すことである。

定理 10. $\mathrm{Euc}(2)$ の元は原点を固定する回転か対称移動に平行移動を合成したものである。

原点を固定するユークリッド変換を決定してこの定理を証明しよう。

補題 11. 原点を固定するユークリッド変換 f は回転か対称移動である。

証明. まず f が線形写像であることを示す。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ と実数 a に対して $|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})|^2$, $|f(a\boldsymbol{x}) - af(\boldsymbol{x})|^2$ を考えると

$$
\begin{aligned}
&|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})|^2 \\
&= |f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 + |f(\boldsymbol{x})|^2 + |f(\boldsymbol{y})|^2 \\
&\quad -2f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot f(\boldsymbol{x}) - 2f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot f(\boldsymbol{y}) \\
&\qquad -2f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) \\
&= |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 \\
&\quad -2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\
&= 0, \\
&|f(a\boldsymbol{x}) - af(\boldsymbol{x})| \\
&= |f(a\boldsymbol{x})|^2 - 2af(a\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}) + a^2|f(\boldsymbol{x})|^2 \\
&= |a\boldsymbol{x}|^2 - 2a^2|\boldsymbol{x}|^2 + a^2|\boldsymbol{x}|^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(a\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x})$ がわかる。よって f は線形写像である。f の表現行列を M とすると, 等長性は $f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ と同値であるので, M は全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$
\begin{aligned}
{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) \\
&= {}^t(M\boldsymbol{x})M\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tMM\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

を満たす。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ はすべての $\boldsymbol{R}^2$ の元なので, M は ${}^tMM = E$ (E は単位行列) を満たす。今, M は 2×2 行列であるので

$$
M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}
$$

とすると, M は

$$
\begin{cases}
m_{11}^2 + m_{21}^2 = 1, & (6) \\
m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22} = 0, & (7) \\
m_{12}^2 + m_{22}^2 = 1 & (8)
\end{cases}
$$

をみたす。ここで式 (6), (8) からある $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ が存在して

$$
m_{11} = c_\alpha, m_{21} = s_\alpha, m_{12} = s_\beta, m_{22} = c_\beta
$$

が成り立つことがわかる。ここで式 (7) より,

$$
\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) = 0
$$

を得る。ゆえに $\beta = -\alpha$ または $\beta = \pi - \alpha$ が成り立つ。よって, M は

$$
\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}
$$

のどちらかである。前者は原点中心の $-\alpha$ 回転で, 後者は原点を通る方向ベクトルが $(\cos\alpha/2, \sin\alpha/2)$ である直線に関する対称移動である。 □

定理 10 の証明. f を等長変換とし, $f(0) = \boldsymbol{v}$ として, $g = f - \boldsymbol{v}$ とすると g は原点を動かさないユークリッド変換である。よって g は回転か対称移動であり, $f = g + \boldsymbol{v}$ はそれと平行移動の合成である。 □

ユークリッド変換は 3 種類の合成であると述べたが, 実はユークリッド変換は平行移動, 回転, 対称移動, 映進の 4 種類であることを示すことができる。

2.7 三角形

本小節以降で, これまでの設定の下, 中学校・高校における平面幾何の定理の証明を述べる。ここで与える証明は著者が与えたものだが, オリジナルを主張するものではない。

ユークリッド平面上の点 $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して線分 AB とは集合 $\{t\mathrm{A}+(1-t)\mathrm{B} \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$ のことをいう。$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して三角形 ABC ($\triangle$ABC と書く) とは, $\mathrm{AB} \cup \mathrm{BC} \cup \mathrm{CA}$ のことをいう。三角形 ABC において, A における**内角**とは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角のことをい

う。三角形 ABC に関する文脈において, A における内角を A と表し, $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ を (線分の記号と同じだがわざと混同して) AB や c と表すことや, $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ を頂点といい, $\mathrm{AB},\mathrm{BC},\mathrm{CA}$ を辺ということは高校までの述語と同じように使う。また例えば, 三角形 $\mathrm{A'B'C'}$ に関する文脈において, $d(\mathrm{A}',\mathrm{B}')$ は c' とあらわす。

定理 12. 三角形の内角の和は π である。

証明. 三角形を $\triangle\mathrm{OAB}$ とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$ とする。定理を証明するためには $\cos(O+A+B)=-1$ を示せばよい。角の定義から

$$\cos O=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},\quad \cos A=\frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|},$$
$$\cos B=\frac{-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}$$

となる。 角度は 0 以上 π 以下なので角度の $\sin$ は正である。 よって

$$\begin{aligned}\sin O &= \sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}\\ &= \frac{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},\\ \sin A &= \frac{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|},\\ \sin B &= \frac{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\end{aligned} \tag{9}$$

となる。従って加法定理から得られる式

$$\begin{aligned}&c_{O+A+B}\\ &=(c_Ac_B-s_As_B)c_O-(s_Ac_B+c_As_B)s_O\end{aligned}$$

に代入して計算すると

$$\begin{aligned}&\delta\Big((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\big((|\boldsymbol{b}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\ &\quad -(|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2)\big)\\ &\qquad -(|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2)|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2\Big)\\ =\ &\delta\big(|\boldsymbol{a}|^4|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^4\big)\\ =\ &-1\end{aligned}$$

となり示される。ただし $\delta=1/(|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2)$ である。 □

注意 13. この定理はいわゆるユークリッドの第五公準 (平行線の公準) と同値である (*13* 世紀にナスィールッディーン・トゥースィーなる人物によって示されたらしい。ウィキペディアの「サッケーリ」の項目を参照)。ユークリッドの第五公準がユークリッド幾何学をユークリッド幾何学たらしめている公準であることから, この定理が示されたことをもって「ユークリッド幾何学が構成できた」と言えるであろう。

ここで円周角の定理を示しておこう。ユークリッド平面上の点 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^2$ を中心とする, 半径 r の円とは集合 $\{\boldsymbol{x}\,|\,d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})=r\}$ のことである。三点 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ が一直線上にないとき, $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ を通る円がただ一つ存在する。このことは座標を使えばすぐに示すことができる。この円を $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ の**外接円**といい, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とのなす角を弧 BC の**円周角**という。

定理 14. 円周角の定理が成り立つ。すなわち, O を中心とする円上に二点 B,C を固定する。このとき B,C によって円周は *2* つの弧 a_1,a_2 に分けられる。任意の $\mathrm{A}\in a_1$ に対して三角形 ABC の頂点 A の内角は $\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角の半分で, 一定である。さらに, 任意の $\mathrm{A}\in a_1$ と任意の $\mathrm{D}\in a_2$ に対して三角形 ABC, BCD の内角 A,D は $A+D=\pi$ をみたす。

証明. 与えられた三角形に平行移動, 回転と拡大・縮小を行っても一般性を失わないので, ABC を単位円上に

$$\mathrm{A}=(c_\theta,s_\theta),\ \mathrm{B}=(c_\varphi,s_\varphi),\ \mathrm{C}=(-c_\varphi,s_\varphi),$$

(ただし, $\varphi<\theta<\pi-\varphi$, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$) と配置する。まず, 角 A が θ に依存しない値になることを示す。角の定義から,

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=$$
$$\frac{(-c_\varphi-c_\theta,s_\varphi-s_\theta)\cdot(c_\varphi-c_\theta,s_\varphi-s_\theta)}{|(-c_\varphi-c_\theta,s_\varphi-s_\theta)||(c_\varphi-c_\theta,s_\varphi-s_\theta)|}$$

を計算すればよい。分子は

$$
\begin{aligned}
&1-c_\varphi^2+s_\varphi^2-2s_\varphi s_\theta\\
=\ &c_\varphi^2+s_\varphi^2-c_\varphi^2+s_\varphi^2-2s_\varphi s_\theta\\
=\ &2s_\varphi^2-2s_\varphi s_\theta=2s_\varphi(s_\varphi-s_\theta)
\end{aligned}
$$

となる。分母は

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{(1-s_\theta s_\varphi+c_\theta c_\varphi)(1-s_\theta s_\varphi-c_\theta c_\varphi)}\\
=\ &2\sqrt{1-2s_\theta s_\varphi+s_\theta^2 s_\varphi^2-c_\theta^2 c_\varphi^2}\\
=\ &2\sqrt{s_\theta^2+s_\varphi^2-2s_\theta s_\varphi}=2|s_\theta-s_\varphi|
\end{aligned}
$$

となる。ゆえに

$$
\cos A=-\sin\varphi\frac{\sin\theta-\sin\varphi}{|\sin\theta-\sin\varphi|}
$$

である。絶対値の中身は

$$
\sin\theta-\sin\varphi=\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}
$$

より, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$ のとき, $\varphi<\theta<\pi-\varphi$ の範囲で正である。よって $\cos A=-\sin\varphi$ となり, θ に依らない。中心角の半分であるという主張と残りの主張も $\cos A=-\sin\varphi$ を見れば示されている。 □

定理 15. 任意の三角形に対して正弦定理, 余弦定理が成り立つ。

証明. 三角形を $\triangle$OAB とする。正弦定理は式 (9) を見れば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\\
&=\frac{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}{\sin O}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{\sin A}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{\sin B}
\end{aligned}
$$

となっているので示される。これが外接円の直径に等しいことは円周角の定理を用いて示せる。

余弦定理は $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ から

$$
|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos O
$$

となるので示される。 □

注意 16. 余弦定理から三平方の定理がすぐに従う。

2.8 三角形の合同条件

これまでで示した道具を使って三角形の合同条件を示そう。

定義 17. 2 つの三角形は, ユークリッド変換が存在して重ね合わせることが出来るとき, **合同**という。すなわち, 三角形 ABC と三角形 $\mathrm{P_1P_2P_3}$ が合同であるとは $f\in\mathrm{Euc}(2)$ が存在して $f(\triangle\mathrm{ABC})=\triangle\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ をみたすときをいう。ただし, $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$。

定理 18. 三辺の長さがそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である。

証明. 2 つの三角形を $\triangle$ABC と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ とし, $\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$, $\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$, $\mathrm{CA}=\mathrm{C'A'}$ とする。これらの三角形が対称移動 3 回以下で重ねあわせられることを示せばよい。A を $\mathrm{A'}$ に移す対称移動を r_A とする。$r_\mathrm{A}(\mathrm{B})=\mathrm{B_1}$, $r_\mathrm{A}(\mathrm{C})=\mathrm{C_1}$ とする。$\mathrm{B_1}$ が $\mathrm{B'}$ と等しくない場合, $\mathrm{B_1}$ を $\mathrm{B'}$ に移すような対称移動を r_B とする。これは $\mathrm{B'},\mathrm{B_1}$ の垂直二等分線 l に関する対称移動であるが, $\mathrm{A'B'}=\mathrm{AB}=\mathrm{A'B_1}$ なので l は A を通る。よって $r_\mathrm{B}(\mathrm{A'})=\mathrm{A'}$ である。$r_\mathrm{B}(\mathrm{C_1})=\mathrm{C_2}$ とする。$\mathrm{C_2}$ が $\mathrm{C'}$ と等しくない場合, $\mathrm{C_2}$ を $\mathrm{C'}$ に移すような対称移動を r_C とする。$\mathrm{AC}=\mathrm{A'C_1}=\mathrm{A'C_2}$, $\mathrm{BC}=\mathrm{B_1C_1}=\mathrm{B'C_2}$ より, $\mathrm{C},\mathrm{C_2}$ の垂直二等分線は $\mathrm{A'},\mathrm{B'}$ を通る。従って $r_\mathrm{C}(\mathrm{A'})=\mathrm{A'}$, $r_\mathrm{C}(\mathrm{B'})=\mathrm{B'}$ である。ゆえに

$$
\begin{aligned}
r_\mathrm{C}\circ r_\mathrm{B}\circ r_\mathrm{A}(\triangle\mathrm{ABC})&=r_\mathrm{C}\circ r_\mathrm{B}(\triangle\mathrm{A'B_1C_1})\\
&=r_\mathrm{C}(\triangle\mathrm{A'B'C_2})=\triangle\mathrm{A'B'C'}
\end{aligned}
$$

となる。 □

定理 19. 二辺とその間の角が等しい 2 つの三角形は合同である。

証明. 2 つの三角形を $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ とし, $b=b', c=c', A=A'$ とする。余弦定理から

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$(a')^2 = (b')^2 + (c')^2 - 2b'c'\cos A'$$

であるが, 後者の右辺は $b=b', c=c', A=A'$ から前者の右辺に一致する。よって $a=a'$ が成り立つ。ゆえに定理 18 から $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同である。 □

注意 20. この定理から円周角の定理の逆が示される。

定理 21. 一辺とその両端の角が等しい 2 つの三角形は合同である。

証明. 2 つの三角形を $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ とし, $a=a', B=B', C=C'$ とする。定理 12 から $A=A'$ が従う。ゆえに正弦定理から

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'}$$

となるので $b=b'$ を得る。同様に $c=c'$ も得られるので定理 18 から $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同である。 □

注意 22. 球面幾何や双曲幾何において, 三角形の合同条件を示す際はこのような流れで示すことが多い。

3. 学生の意見とそれに対するコメント

講義の内容について学生に自由に記述してもらったり, 学生が講義中に言ったことの中から学生の意見とそれに返した著者のコメントを参考のためここに記す。意見は主張に変化がない程度に, 語尾等を改変し, 表現を統一している。

● 幾何学の授業が代数学で勉強した「群とその作用」の範囲で, 代数学の復習かなと思っていたが, そこから, 位相幾何学や, 線形代数学への関係を学んで, 自分が思っていたような, 数学が分野ごとに分かれているわけではなく, 関わりがあるのだと知った。以前ユークリッド原論から, 三角形の合同条件などについて学習をしたが, 幾何学の中で, 認められている公理からスタートするのとは異なる切り口からみれて, 改めて視点を変えても結論が同じとなることに感動した。

(返答) 前半:講義でやったようなことを考えていくかどうかはともかく, 変換群からスタートするのが現代的だと思います。ユークリッド原論の議論は前提条件が難しく, 参照関係が複雑なので議論の練習としては意味があると思いますが, 平面幾何学の基礎がこの方向だけというのはよくないと思います。また例えば, 証明で, 二つの円の交点をとることがよくありますが, その二つの円が本当に交わっているのかどうかは多分ユークリッド原論の議論の中では示せないでしょう。後半:はい。なんとなく住み分けはあるけど分野には分かれてないと思います。

● 群・線形写像といった言葉を聞くと代数学を思い出す。幾何学とはいえ, 他の分野の知識も大切だということを実感した。内積・正弦・余弦定理など, 既習内容となる部分もあったが, 角度の定義を用いた証明はとても新鮮に思えた。

(返答) その辺はまあ他の分野というよりは, 基礎ですね。角度の定義を使った証明は成り立つことなので証明できることはもちろん分かっていましたが, ああいうふうになるとは思わなくて, 準備してても楽しかったです。

● 中学校の数学と高校の数学がつながっていた。

(返答) 数学なので全部つながっています。それはともかく, 正弦定理, 余弦定理から合同条件がでてくるところはちょっと意外というか, 面白いですね。

● 任意の $x, y \in G$ に対し, ある $a \in G$ が存在して $f_a(x) = y$ ならば群はどの点でも近くが同じということが未だに理解できていない。どの点でも近くが同じ, ということは具体的にどうなることなのかを教えて欲しい。
(返答)「任意の $x, y \in X$ に対し, ある $a \in G$ が存在して $f_a(x) = y$ ならば X はどの点でも近くが同じ」ですね。「どの点でも近くが同じ, ということは具体的にどうなることなのか」について「どの点でも近くが同じ」は数学の用語として定義していません。イメージとして,「どこの点に立って周りを見渡しても同じように見える」と説明しました。まあイメージの説明なので分からなかったならその説明は自分に合わなかったと思って, 自分が分かりやすい理解の仕方を考えるのがいいと思います。

● 証明の計算が大変だったが, できたときの達成感があった。
(返答) はい。いろいろ消えてきれいになるんで気分がいいですね。

● 絶対値と内積が自分の中で曖昧になっていたのが, 今回の幾何を通して違いが分かるようになった。
(返答) はい。

● ユークリッド変換が $\boldsymbol{R}^2$ の等長変換で $\mathrm{Euc}(2)$ とかいてきたが, $\boldsymbol{R}^3$ だったら $\mathrm{Euc}(3)$ があるのか?
(返答) はい。一般に $\boldsymbol{R}^n$ も同様の距離で距離空間で, その上の等長変換はユークリッド変換といい, $\mathrm{Euc}(n)$ とあらわします。ただし, 2 次元の場合のように簡単な行列では表示できません。

● 代数学の大切さがわかった。
(返答) 抽象的に性質だけを取り出して一般的に議論すると見通しがよくなることがあります。代数の強力さがわかった?

● ある直線に関する対称移動が一つの行列の形で表すことができるということに驚いた。
(返答) なるほど。 確かに一個の行列でしかもあんなにわかりやすい書かれ方で書けるという気がしませんね。線形代数でやったように, 線形写像ならば行列で表せます。原点を通る直線に関する対称移動はベクトルの和とスカラー倍に関してどちらを先にやってもよいことがすぐに分かるので, 線形写像であるということが分かります。よって行列で書けるのです。その行列があんなに簡単な形, しかも回転の形と似ているというのはちょっと驚きですね。

● 角度の定義

$$\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)$$

が今まで慣れ親しんできた角度と一致することが不思議だ。
(返答) なるほど。でもよく考えてみると今まで慣れ親しんできた角度って実はこれなんです。

● これで三角形の内角の和が 180° であることに自信がもてる。
(返答) それはすばらしいですね。