岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 113-118

絡み目を教材とした授業の提案

田中利史[1]

絡み目を教材とした中学生向けの数学の授業を提案する。学校の算数・数学の授業では空間図形を考察する場合，投影図等により平面の図形として扱うことが有効である。絡み目も平面への投影図としてとらえることが容易であり，また数式化することができるため，そのような有用性をもちいて，生徒が数学の楽しさを感じられるのではないかと考えた。本論文では，絡み目を用いた教材内容と授業の提案について述べる。

＜キーワード＞結び目，絡み目，空間図形，投影図

1. 序文

平成20年3月に告示された現行の中学校学習指導要領では，数学の学習目標として各学年において「図形について論理的に考察し表現する能力を伸ばす」ことが挙げられる。この論文では，数学の対象としても研究が盛んに行われている絡み目を，空間図形の数学的な考察方法を与える教材として新たに用いることを提案する。学習指導要領における目標の一つに「観察，操作や実験などの活動を通して，図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに，論理的に考察し表現する能力を培う。」とある。したがって絡み目を観察し，また動かすなどの操作を通して生徒が図形に実際に触れることにより，空間を認識し学習を進めることができるような授業の開発を行うことにする。

この授業のねらいは，中学校学習指導要領の中学校数学科の改善の具体的事項にあるように，体験に基づく実感的な理解をもとに，身の回りにあるものを図形としてとらえその性質や関係などを明らかにすることや，図形の性質などを根拠を明らかにして筋道を立て説明したり，その説明から新たな性質や関係を読み取ったりする力を育てることである。

[1]岐阜大学教育学部

2. 絡み目について

何本かのロープを用意し，適当に絡めてそれぞれのロープの両端を繋ぐ。これを絡み目と呼ぶことにする。特に1本のロープを用意し，自由に絡め両端を繋いだものを結び目と呼ぶことにする。（図１）

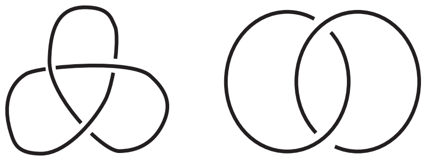


図１

結び目がほどけて平面上に置ける一つの輪となる場合は，この結び目は**自明**であるという。結び目が自明でない場合は**ほどけない結び目**ということにする。絡み目が，平面上にばらばらに置けるいくつかの自明な結び目になる場合は，その絡み目は**自明**であるという。絡み目が自明でない場合は**ほどけない絡み目**ということにする。

結び目が自明な結び目であることを示す場合は，それを実際にほどけばよい。一方で結び目がほどけない結び目であることを示そうとする場合は，問題は格段に難しくなる。このように「絡まった結び目が自明な結び目になるか，または，ほどけない結び目であるか」

ということや,「絡み目がいつ自明な絡み目となるか」ということなどが重要な問題となる。どんなに結び目を動かしても一つの輪にならないから，ほどけない結び目であるとは言えない。一日やってほどけなくても一週間後にできるかもしれない。結び目がほどけないことを示すには，結び目を数理モデルとしてとらえ，数式化することが必要となる。これが**結び目の数学**である。結び目の違いを示すには，**不変量**という考え方を用いる必要がある。結び目をある方法で(一意的に)定式化することができた場合，例えば自明な結び目が 1 に対応し，ある結び目が –1 に対応すればこの結び目は解けない結び目であるということができる。このような対応が不変量である。

3. 絡み目とその図式

この論文では絡み目とは空間の中の端のない折れ線として考える（図２）。

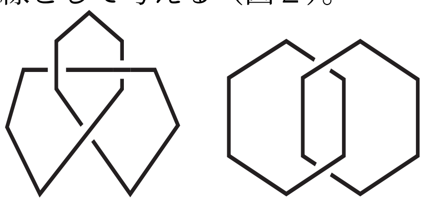


図２

ここで結び目の定義を示す。

＜定義＞

空間の有限個の点 $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ について，線分

$\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \ldots, \overline{v_{n-1}v_n}$

から成る図形

$\overline{v_0v_1} \cup \overline{v_1v_2} \cup \overline{v_2v_3} \cup \ldots \cup \overline{v_{n-1}v_n}$

を**折線**という。特に $v_0 = v_n$ のとき，これを**閉折線**という。また，閉折線がどの二つの辺も，それらの共通の端点以外には，共有点を持たないとき**単純**であるという。単純閉折線のことを**多辺形**という。

空間内の多辺形のことを**結び目**という。空間内の互いに共有点を持たない n 個の結び目 $K_1, \cdots, K_n$ からなる図形 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ を**絡み目**という。

絡み目の平面への投影図を考える。このとき，辺を少し移動することで，絡み目が重なる点は必ず図３のような２重点のみであるとする。

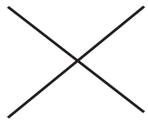


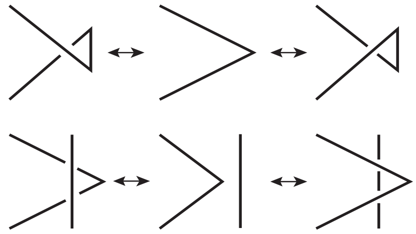
図３

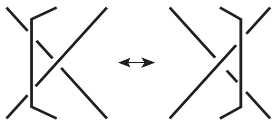
これを絡み目の**図式**といい，そのような 2 重点のことを図式の**交点**という。

4. 絡み目のライデマイスター移動

＜定義＞

絡み目の図式において，次の変形（図４）をライデマイスター移動と呼ぶ。





2 つの絡み目の図式がライデマイスター移動の有限回の操作で移りあうとき，それらの絡み目は**同じ**であるという。

4. 絡み数

＜定義＞

結び目の**向き**とは多辺形である K に沿って１周する方向のことである。表示に関しては矢印を用いる。一般に，絡み目の向きは絡み目を構成するすべての結び目に向きを与えることで定める。n 個の結び目からなる絡み目には 2^n 通りの向きの指定の仕方がある。

$L = K_1 \cup K_2$ を結び目 K_1，K_2 からなる結び目とする。L の図式を D_L とする。D_L の交点のうち，K_1 の辺と K_2 の辺との間にできる交点に対して次の図のように +1 または –1 を

対応させる。

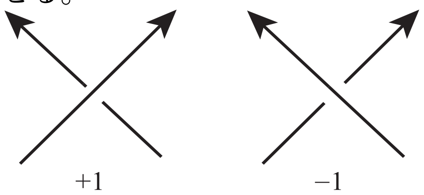


図 2

このとき，そのような数全体の和を K_1 と K_2 の**絡み数**という。参考文献 [4] において次の 2 つの定理が示されている。(証明については [4] の証明と同様であるが，参考のために与えておく。)

＜定理＞

絡み数は，２つの結び目からなる向きのついた絡み目の不変量である。

（証明）

絡み目が同じであることの定義より，絡み数がライデマイスター移動で変わらないことを示せばよい。

・$R1$ での不変性について

$R1$ 変形については，局所的に一方の結び目しか現れないため，その変形により絡み数は不変となる。

・$R2$ での不変性について

局所的に表れる 2 つの部分に対して，それらが同じ結び目に属する場合は，$R1$ の証明と同様に不変である。2 つの部分がそれぞれ異なる結び目に属する場合は，現れる交点の符号の和が 0 となるため，変形前と後で絡み数は変わらないことがわかる。

・$R3$ での不変性について

局所的に表れる 3 つの部分に対して，それらが同じ結び目に属する場合は，$R1$ の証明と同様に不変である。

局所的に表れる 3 つの部分のうち 2 つの部分が同じ結び目に属する場合でも，変形前と後で局所的に現れる交点の符号の和は変わらないことがわかり，絡み数は変わらない。

以上より，絡み目が不変量であることがわかった。

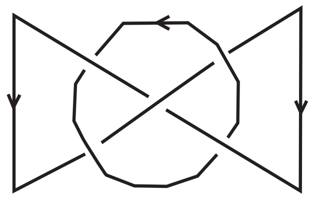
＜定理＞

自明な絡み目の絡み数は 0 である。

（証明）

自明な絡み目は交点を持たない図式を持つ。したがって，絡み数の定義と上の定理より，自明な絡み目の絡み数は 0 である。

この定理の逆は一般に成立しない。たとえば次の絡み目の絡み数は 0 であるが，自明な絡み目ではないことが知られている。([4])



5. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業の教材は，絡み目である。

本授業では絡み目の投影図及び絡み数について考察する。絡み目は学習指導要領では扱われていない空間図形であるが，結び目の投影図を題材として扱う理由を以下に示す。

1. 日常の生活の中でひもを結んだり，絡まったひもを解こうとすることはよくあることであり，身近に感じられ数学の有用性が生徒に伝わりやすい。

2. 絡み目は空間図形としてとらえることができ，直方体や円錐などの図形に比べ容易に形を変えることができるため，多様な活動ができる。

3. 最先端の理論であり，現在も活発に研究されているため，教材として多面的に利用可能である。

4. 不変量（図形を区別するための数量）を容易に定義できる。

5. 予備知識をあまり必要としない。

(2) 授業の構成

授業の流れは以下の通りである。

1. (導入)　針金を用いて作成した絡み目を提示し，絡み目について紹介する。
2. 針金を用いて作成した絡み目を一人に一つずつ配布し，その投影図（立面図と平面図）をかく。
3. 2 つの投影図を比べ，その特徴を上げ，交点数などを比べることで違いがあることに気付く。
4. (展開)　次の図のような 3 つの絡み目がほどけるかという問題を提示し，ほどけるかを考える。

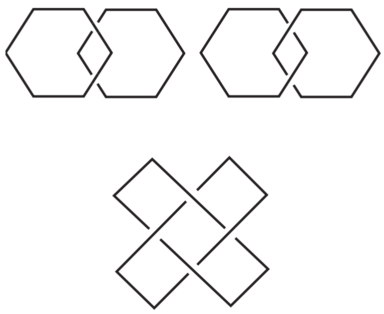


図 5

（教師が右上の絡み目がホップ絡み目であることを黒板を用いて生徒に伝える。）

課題

これらの絡み目はほどくことができるか?

5. 絡み数について説明する。
6. 生徒が実際に絡み目を作成し，絡み目に矢印を辺ごとに張り付け，投影図をかく作業を行う。2 色のアルミの針金（太さ 2.5mm，長さ 2m) をそれぞれ一本ずつ，ビニールテープ（灰），ペンチ，矢印型のプラスチック（一人につき 20 個）を配布する。（矢印型のプラスチックについては，プラスチックのフォークを加工し，あらかじめ準備しておく。）針金の端どうしを繋ぐときはビニールテープを用いる。
7. 生徒が投影図（平面図）を書く。
8. 生徒が投影図を用いて 3 つの向きを付けた絡み目の絡み数を計算する。
9. 生徒が成果を発表する。

気付いたこと

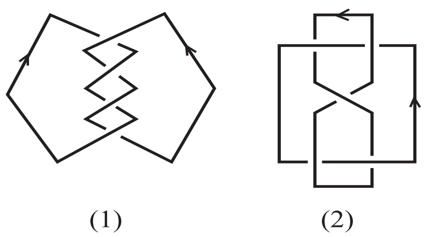
・ほどける絡み目の絡み数は 0 である。

・ホップ絡み目はほどけない。

10. 3 つの向きを付けた絡み目のうちの 2 つがほどけないことを絡み数と現物を動かしてみることにより確認する。
11. 生徒が追加課題を解く。

(追加課題)

問. 次の絡み目の絡み数を計算して，ほどけるかどうかを調べよ。



(1)　(2)

図 6

（解答）図 6 の（1）の絡み目について絡み数を計算すると 4 であるから，ほどけない絡み目である。(2) の絡み目の絡み数は 0 であるから，ほどけるかどうかは分からない。（実際は他の不変量を用いてほどけないことが分かるが，ここでそれには触れずこの絡み目を作

成したものを配布し，ほどけないことを実物を使って確認する。）

まとめ

空間図形は投影図の特徴を明らかにすることで，その性質を調べることができる。

教師の指導・援助

・自己紹介。
・絡み目を配布する。
・絡み目の説明を行う。
・絡み目を提示しその投影図の書き方及び注意点を説明する。
・絡み目を作るための道具（アルミ製の針金（2 色），ビニールテープ，ペンチ，矢印型のプラスチック）を配布する。
・理解が困難となっている生徒には完成した絡み目の例を見せ作成を促す。
・追加課題の絡み目を配布しほどけないことの確認を行う。

この授業では実際に空間図形を作成する作業を取り入れている。数学においてこのような実験を体験することはあまりなく新鮮であり，生徒の関心を高めることができると考える。

はじめに絡み目を観察しながらその投影図（立面図と平面図）を考える。その 2 つの投影図の違いを考えることを通して，絡み目を平面図形としてとらえる場合の多様さを感じることができると考える。絡み目の投影図を通して絡み目の特徴を調べることは，絡み目から数量を与える際の足掛かりとなるため，ここで考える時間を設定した。

本作業における操作活動とは，針金，ビニールテープ，ペンチ，矢印型のプラスチックをもちいて絡み目および，その向きを作り，さらにその投影図をかくことである。絡み目に向きという情報を付加することにより，数量が定義できることを学べる。また，実物を用いて解決策を考える時間をとり，絡み数が絡み目がほどけないことの根拠となっていることに気付くことを目標としている。授業の最後に絡み数の計算問題を提示し，絡み数の値から絡み目がほどけないことを示す活動を取り入れた。これは，絡み数を用いて解決することで，授業に対する達成感を生徒が味わえることを意図している。

6. これまでの実践例との違い

結び目を用いた教育研究プロジェクトが 2005 年より 5 年間，大阪で行われている。その中でも特に中学校での実践例について見る。

参考文献 [1] においては，モールを用いて結び目を生徒に作らせているが，形が安定せず，一人で作ることが難しいなどの反省点が挙げられている。参考文献 [2] では，実物は作成されていない。参考文献 [3] では紐や針金をもちい絡み目を作成している。

それらに対して，この授業では比較的太いアルミ素材の針金を用いて，多辺形の結び目を作ることを提案する。その理由は，絡み目が安定し向きを記しやすく，また交点の符号を調べる際にわかりやすいからである。

参考文献 [3] でも，絡み数に関連した実践がされているが，その際はソロモン王の絡み目が用いられている。この授業では，ホップ絡み目（図 5 の右上の絡み目）を加えることで，絡んだ 2 つのリングを外すリンキングリングの手品 [5] と関連させることができる。したがって，より生徒の興味を引くことができると予想している。

引用文献

[1] 河内明夫・柳本朋子編, 2005, 「結び目の数学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動研究報告書, 第 1 号.
[2] 河内明夫・柳本朋子編, 2007, 「結び目の数

学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動研究報告書, 第 2 号.

[3] 河内明夫・柳本朋子編, 2009, 「結び目の数学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動研究報告書, 第 3 号.

[4] 鈴木晋一, 1991, 結び目理論入門, サイエンス社.

[5] 日本奇術連盟, リンキングリング（奇術連盟教本）.