岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 106-112

斜方投射をグラフを用いて考察する教材の開発と実践

岩間広祥[1]，愛木豊彦[2]，山路健祐[3]，

以前，数学の有用性を感じられることをねらいとして，斜方投射を題材とする授業実践を行った。そこでは，計算結果と実験結果を結びつけることで，数学の有用性は伝わったものの，いくつかの反省点が残った。本稿で，その反省点を改良した授業の詳細と実践結果を述べる。
＜キーワード＞放物線，グラフ，斜方投射，実験

1. はじめに

以前，発射台から斜方投射される鉄球の軌道について考察する授業を中学３年生を対象に実践した ([1])。その授業では，数学の有用性を実感できるよう関数の利用の仕方が理解できることをねらいとしていた。ねらいの達成のため，計算で求めた値が正しいことを確かめる実験を取り入れた。その結果，ねらいは達成でき，生徒に数学の有用性が伝えられたと考えている。その反面，計算に必要な数値を授業者が提示したこと，その数値に不自然な点があることが課題となった。そこで，今回の授業においては，計算に用いる値を生徒が計測すること，計測する値に不自然さがないようにすることという改善を行った。本論文では，その授業の概要を説明し，実践結果を報告する。

第２節で [1] における授業実践の反省，第３節で今回の改善についてより詳しく述べる。そして第４節で実践報告をし，第５節で考察をし，最後に今後の課題を示す。

2. 前回の授業実践

写真１にある発射台は発泡スチロールボードで作った土台に，配線用モールをはり，鉄球がその上を転がるようにしている。この台の出発点から転がした鉄球は発射点を飛び出した後，放物線を描きながら動く。このとき鉄球がちょうどペットボトルの口に入るようなペットボトルの位置を求める。これが前回の授業で示した問題である。

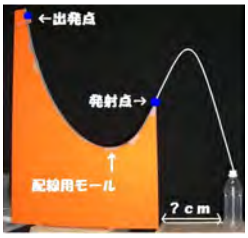

写真１

その授業において，生徒に示した値は次の４つである。(図１)。

(ア) 床から発射点までの高さ　46cm
(イ) ペットボトルの長さ　21cm
(ウ) 発射された後，発射台先端の高さと同じ高さになるまでに，水平方向に進んだ距離　18cm
(エ) 鉄球が一番高いところにあるときの発射点からの高さ　15cm

(ウ) は写真２のような方法で計測した。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部
[3]岐阜大学教育学部附属中学校

写真２

(ア)〜(ウ) は計測して求めた値であるが，(エ) は計測が困難なので，他の数値から計算で求めた値である。それを，授業では写真３のような方法で計測したかのように伝えた。

写真３

次に，(ア)〜(エ) からペットボトルの位置を求める方法を示す。まず， 放物線の頂点を原点Oとし，図１のように座標軸をとる。放物線が y 軸対称なので，(ウ) から点 A の座標は $(-9. -15)$ である。従って，放物線を表す方程式を $y = ax^2$ とおき，座標 A から a の値を求めると，$a = -\frac{5}{27}$ となる。

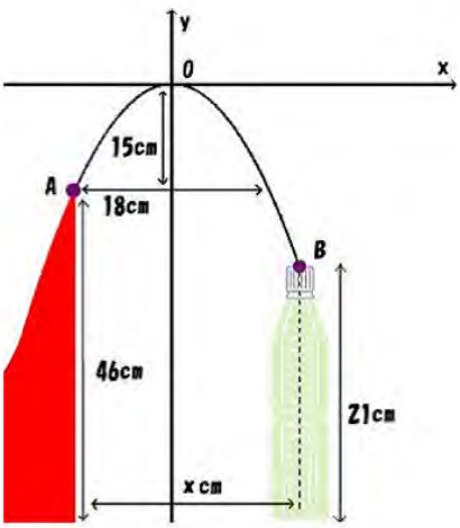

図１

よって，放物線の式は

$$y = -\frac{5}{27}x^2 \tag{4}$$

次に (ア)〜(ウ)，図１より，B の y 座標は，$-15 - 46 + 21 = -40$ である。これを (1) に代入し，B の x 座標を求めると，$x = \pm 6\sqrt{6}$ となり，$x > 0$ より，$x = 6\sqrt{6}$ である。よって，求める長さは

$$\begin{aligned} 9 + 6\sqrt{6} & \quad 9 + 14.6 \\ & = \quad 23.6 \end{aligned}$$

従って，鉄球が一番高いところにあるときの発射点からの高さを 15cm とすると，発射台からペットボトルへの水平移動距離は約 23.6cm になる。この値は [1] で，(エ) を用いずに求めた 23.59cm とほぼ等しく，実験でペットボトルをおくときには区別ができないくらい近い値である。そこで，図１で条件を示した場合について考えることを中学３年生を対象とする授業の題材とした。

このことを題材として実践した授業の流れは以下の通りである。

(１) 問題提示

発射台から鉄球を発射した後，鉄球が入るようなペットボトルの位置を求めるという問題を提示する。

(２) 課題設定

発射台から発射される鉄球の軌跡が放物線であることと，これまでに学習した放物線の特徴をおさえる。また，発射台や発射された鉄球の描く放物線についての条件を図１のように示し，課題を「放物線の式を求め，ペットボトルに鉄球が入るような位置を計算して求めよう」と設定する。

(３) 個人追究

課題に対し，見通しがもてない生徒は以下の手順を記載したヒントカードを配る。

(a) 発射点の座標を求める。

(b) 放物線の式を求める。

(c) ペットボトル先端の y 座標と放物線の式から，ペットボトル先端の y 座標を求める。

(d) 求めた座標から発射台とペットボトルの間

の距離を求める。そして，計算で求めた値が正しいことを，実験で確かめる。

(4) 全体交流

個人追究した内容を，全体で交流する。放物線の式を利用してペットボトルに鉄球が入る位置を求めることができることを理解する。そして,「これまで学習してきた関数を利用することで，解決できる問題がある」とまとめる。

以下はこの授業を受けた生徒の感想の一部である。

- 最初は難しそうに感じたが計算で求めて１回で入れることができてよかった。
- 関数ではグラフを表したり数値を求めるだけでなくグラフと図を使い，答えが出せることが分かり，楽しかった。
- 割り切れなかったり，平方根があって難しかった。

この授業では，放物線の式や計算を簡単にするために，いろいろな条件を図１のような形で提示した。しかし，感想にもあるように計算が複雑に感じた生徒も多かった。また，(エ) の条件の示し方には不自然であった。これがこの授業での反省点である。

3. 授業案の紹介

3.1 授業の題材

１節の最後に述べたとおり，今回の授業では測定した値をもとに問題を解決していくような展開にした。また，実際に測定する活動も取り入れている。

まず，測定する長さを示す。(図４)

- 発射された後，発射台先端の高さと同じ高さになるまでに，水平方向に進んだ距離　$b$cm
- 床から発射点までの高さ　$c$cm
- 床に着地するまでに進んだ水平距離 $d$cm
- ペットボトルの長さ　$e$cm

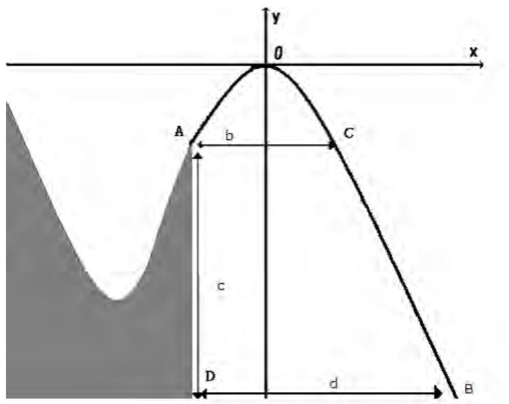

図４

図４のように発射点を点 A，鉄球が床に着地する点を点 B，鉄球が発射されてから次に発射点と同じ高さになる点を点 C，発射点の真下にある床の点を点 D，放物線の頂点を原点 O として，座標軸を導入した。この図において，AC $=b$，AD=c，BD=d としたとき，放物線の式 $y=ax^2$ の a の値を求める。

放物線は y 軸対称なので点 C の x 座標は $\frac{b}{2}$，$y=ax^2$ より，点 C の座標から y 座標は $\frac{1}{4}ab^2$ となる。同様にして点 A の座標は $(-\frac{b}{2}, \frac{1}{4}ab^2)$ となる。点 D の x 座標は点 A と同じであることから点 D の x 座標は $-\frac{b}{2}$，BD $=d$ であることから点 B の x 座標は $-\frac{b}{2}+d$，点 B は放物線上の点なので座標は $(-\frac{b}{2}+d, a(-\frac{b}{2}+d)^2)$ となる。AD=c であることから点 C と点 B の y 座標の差は c であるので $\frac{1}{4}ab^2-a(-\frac{1}{2}b+d)^2=c$ が成り立つ。これを a について解くと $a=\dfrac{c}{bd-d^2}$ となる。

以上より，床から発射点までの高さ，鉄球が発射された後発射台先端の高さと同じ高さになるまでに水平方向に進んだ距離，鉄球が着地点までの距離が測定できれば，放物線の式 $y=ax^2$ の a の値を求めることができる。

次に，この発射台に対して鉄球が入るようなペットボトルの位置の求め方について考察する。

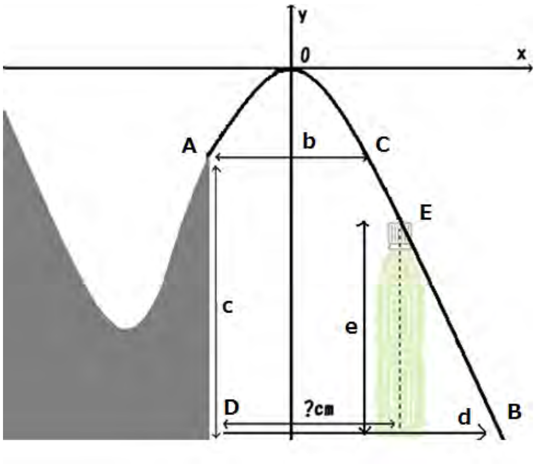

図２

ペットボトルの口の位置を点Ｅとする。点Ｅの y 座標は点Ｂの y 座標にペットボトルの長さ e を加えたものなので $a(-\frac{b}{2}+d)^2+e$，点Ｅが放物線上になるようにペットボトルを置くのでこれを $y=ax^2$ 代入して x について解くと，$x>0$ より

$$x=\sqrt{\frac{a(-\frac{b}{2}+d)^2+e}{a}},$$

よって，ペットボトルの置く位置は

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a(-\frac{b}{2}+d)^2+e}{a}}$$

となる。

3.2 授業の展開

上で示した方法は，b と d の値を具体的に与えれば，中学生で十分考察可能である。さらに，文字を用いた一般化も具体的な数値で計算した経験をふめば，中学生でも考えられると判断した。以上をふまえ，授業の流れを以下のようにした。ただし，授業は２時間構成である。

１時間目

(1) 問題提示

まず，発射台から鉄球を発射した後，鉄球が入るようなペットボトルの位置を求めるという問題を提示する。

(2) 課題設定

発射台から発射される鉄球の軌跡が放物線であることと，これまでに学習した放物線の特徴をおさえる。そして，発射台や発射された鉄球の描く放物線についての条件を扱いやすいように，$b=20$，$c=30$，$d=50$ とした上で，課題を「鉄球の軌道が描く放物線の式を求めよう」とした。

(3) 個人追究

放物線の式の求め方を考察する。式を求められた生徒は発射点の高さ，着地点までの距離，鉄球が発射点と同じ高さになったときまでに進んだ距離を文字で置き，放物線の式を一般化する。

(4) 全体交流

個人追究で考察した内容を全体で交流する。そして,「発射台から発射された鉄球の軌道が描く放物線の式を求めるためには，発射点の高さ，着地点までの距離，鉄球が発射点と同じ高さになったときまでに進んだ距離がわかればよい」とまとめる。

２時間目

(1) 課題設定

前時で学習した内容を確認したうえで課題を「実験から分かった値を使って、鉄球が入るようなペットボトルの位置を求めよう」とした。

(2) 実験・考察

まず， 発射点の高さ，着地点までの距離，鉄球が発射点と同じ高さになったときまでに進んだ距離の計測を行う。計測した結果と前時で考察した方法を用いて鉄球の軌道が描く放物線の式を求める。そして，放物線の式や計測した値，用いるペットボトルの高さを用いて鉄球が入るようなペットボトルの位置を求める。そして計算が正しいかどうか実際にペットボトルを置いて実験を行う。

(3) まとめ

鉄球が入るようなペットボトルの位置の求め方について交流をしたあと「これまで学習してきた関数を用いることによって解決することができる問題もある」とまとめる。

3.3 授業のねらい

前述したように，本授業は数学の有用性を伝えることを意図して開発したものである。その実現のためには，計測と計算から求めた値によって鉄球がペットボトルに入ることが何よりも有効であると考えた。そこで，本授業のねらいを以下の２点とした。

(a) 放物線の性質を用いて発射された鉄球の描く放物線の式を求めることができる

(b) 自分で必要な値を計測し，ペットボトルに鉄球が入るような発射台とペットボトルの距離を求めることができる

4. 実践報告

講座名：「IN 鉄球?入ってる?」

実践日：平成 22 年３月１日（火）１時間目

３月２日（水）２時間目

対象：岐阜大学教育学部附属中学校３年生 (３３名)

4.1 活動の様子

１時間目

(１) 導入

一人の生徒にペットボトルを適当な位置に置いて，鉄球が入るかどうかを試させた。(写真４)

写真４

(２) 課題設定

発射台から発射された鉄球の動きを，動画で示し，軌道が放物線であることを確認したあと，放物線の特徴を次のようにまとめた。

・放物線は原点を通り y 軸対称である。

・放物線の式は $y = ax^2$ で表すことができ，$a > 0$ のとき上に開き，$a < 0$ のとき下に開く。

(３) 個人追究

連立方程式や y 座標の差を利用して放物線の式を出すことができている生徒がほとんどであった。また，放物線の式の一般化についても少数ではあるができている生徒もいた。

(４) 全体交流

放物線の式の求め方を，生徒が具体的な数値の場合で発表をした。その後，文字で置いた場合の一般化についても，生徒が発表した。

２時間目

(１) 導入～課題設定

１時間目の学習した内容を振り返り，課題を「実験から分かった値を使って、鉄球が入るようなペットボトルの位置を求めよう」とした。

(２) 実験～課題追究

必要な値の計測を行う。実験には１班に対して実験用の道具を１セット渡した。１班につき大学生一人がついて実験を進める。

(３) まとめ

時間が足りなくて，鉄球が入るようなペットボトルの位置を求めることができず，実験を行った生徒が少なかった。そのため「実際に計測した値を扱うのは複雑である」とまとめた。

5. 考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

(１) 鉄球が通る放物線の式を求めることはできましたか。またそれは簡単でしたか，難しかったですか。

簡単にできた …１１人
難しかったけどできた …２７人
できなかった … ０人

（2）鉄球が通る放物線の式を求めるために何を用いましたか

・台の高さ
・距離の平均
・方程式
・$y = ax^2$ の式
・代入法
・計測した長さからわかった座標
・レールと同じ高さでの進んだ距離
・レールの高さ
・二次関数
・文字式

（3）鉄球が通る放物線の式を使って鉄球が入るペットボトルの位置を求める方法の良さを書いてください。

・正確な位置を求めることができる
・ペットボトルの大きさが変わっても求めることができる。
・ペットボトルの位置を何回も変える必要がないこと，一発でできる。
・鉄球が当たる場所など，他のことにも応用できる。
・何回も調べなくても１発で正確にペットボトルに入れることができる。
・確実である。
・数はややこしいが，正確に求めることができる。
・感覚だけで求めなくてもよいところ。
・３つの長ささえ分かれば，式が求めることができ，ペットボトルの位置を求めることができる。
・実際におきていることを文字や式で表すことができ，ペットボトルの位置を求められること。
・放物線の式を使うことによって何回も実験したりせず，少ない回数で結果が出せる。
・正確なデータを求めることができる。

（4）授業の感想を書いてください。

・数学の応用で，難しかったけれど，実験を通して楽しく式を求めることができてよかった。
・難しい計算で数も大きかったけど，ペットボトルに鉄球が入った時はうれしかったです。数学でこのようなことができることがあらためてわかりました。
・今までは数学なんて難しくて面倒くさいだけだと思っていたが，鉄球がペットボトルに入ったのを見たときは嬉しかった。
・放物線の式を求めれた時はとても楽しかった。
・自分で距離をはかり，計算をしてペットボトルの位置を求めて入ったときは嬉しかった，はじめて数学で感動した。
・式を求めたけど入らなかった。
・現実で起きていることを文字や数によって表すことができるところがとても面白いと思った。
・はじめは難しかったけど計算していくにつれて式に近づくことができたのでうれしかったです。
・計算は面倒な小数だったが，今回の実験のように日常的にあるものを式から求められることは面白いと思った。
・これまで数学で実験することがあまりなかったから楽しかったし，計算は難しかったけど式ができたからうれしかった。
・普段の授業のようなただ求めるだけでなく，現実と関わっていてよかった。
・習ったことを問題だけやるのではなく日常的なことを二次関数を使ってやることがよかった。
・おもしろかった，他にもやってみたい。
・難しかったけど今まで考えたことのないことをやって実験とかは面白かった。
・実際に実験をしながら数値を求めていったのでおもしろかった。
・簡単なことだし，たまたま入るものだと思っ

ていたらすごく数学的に正確な数を出して場所を求めるのは面白いと思いました。
・数学は嫌いだけど，楽しめた。
・身近な話題にふれていて楽しかったし，求めれたときは嬉しかった。
・式を求めるのに時間はかかったけど，式が実際の現象とつながっていると思うと面白いと思った。
・いつもの授業と違って様々な道具を用いて行ったためすごく楽しかった。またどうしたら入るかと自分で考えながらできたので入ったときは達成感があった。

本授業のねらい (a), (b) について考察する。
(a) 放物線の性質を用いて発射された鉄球の描く放物線の式を求めることができる

アンケート (1) の回答について，できなかったという回答がなかったことから，この狙いに関しては達成できたと考える。
(b) 自分で必要な値を計測し、ペットボトルに鉄球が入るような発射台とペットボトルの距離を求めることができる

２時間目の授業で計測･実験を行ったが，授業者の説明不足ということもあり，班についた大学生が指示を出さなければ計測を行えない事態になってしまった。また，計測した値をもとに計算を行った際，値が複雑なため，途中の計算で時間がかかってしまい，発射台とペットボトルの距離を求めることができることができた生徒は少なかった。従って，このねらいについては不十分だったと考えている。

6. 今後の課題

今回２時間目の授業において，実験の説明での不手際や計測した値による計算の複雑さにより，ペットボトルに鉄球が入るような発射台とペットボトルの距離を求めることができた生徒が少数となってしまった。実験の説明に関しては実験方法の提示の仕方などの工夫によって解決できる。また，計測した値による計算の複雑さに関しても，次のような準備が可能であった。１時間目の授業で発射点の高さ，着地点までの距離，鉄球が発射点と同じ高さになったときまでに進んだ距離を文字で置いた場合の放物線の式の一般化を行っているので，これを元に授業者が計測した値から放物線の式をパソコンで処理できるようにしておく。こうすれば一部の複雑な計算の短縮をし，ペットボトルに鉄球が入るような発射台とペットボトルの距離を求めることができる生徒が増えたのではないかと考えている。

引用文献

[1] 岩間広祥･愛木豊彦，2010，斜方投射について考察する中学生用の授業について，岐阜数学教育研究，vol. 9，49-53.