岐阜数学教育研究
2011， Vol. 10， 99-105

シャボン膜の性質を数学的に考察する教材の提案

大原洋平[1], 藤井雄介[1], 松本浩佑[1], 佐治健太郎[1]

シャボン膜の形を題材として中学生または高校生用の平面幾何学に関する授業を提案する。

＜キーワード＞シャボン膜, 最短距離

1. 序

シャボン膜は針金で作った輪を石けん水に浸して取り上げると観察できる膜である。日常生活の中でも簡単に作ることができるが, シャボン膜は「針金の輪に張ることの出来る形の中で面積が極小値をとるように張る。」という性質があり, 数学の研究対象ともなっている。たとえば, 針金の輪をどんな形に作ってもシャボン膜が張ることが1930年初頭にダグラスとラドーによって独立に証明された。また, 実際にシャボン膜を観察すると面積極小性に由来する対称性と独特の透明感があり, きれいだと感じる人が多い。このようなことから, シャボン膜を題材にすると, 幾何学に関して生徒の興味・関心を喚起することができると我々は信じている。本論文では, シャボン膜の形を題材として中学生または高校生 (数学 A) 用の平面幾何学に関する問題を提案する。

2. 問題

問題は「与えられた平面上の三角形 ABC の内部に点 P をとり, 線分の和 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ が最少となるような P を見つけよ。」というものである。

これは次のようにシャボン膜の張り方と関係している。図 1 のような透明なフィルム (堅めの OHP シート) の数カ所に針金を渡した器具を用意し, シャボン液に付けて取り出す。

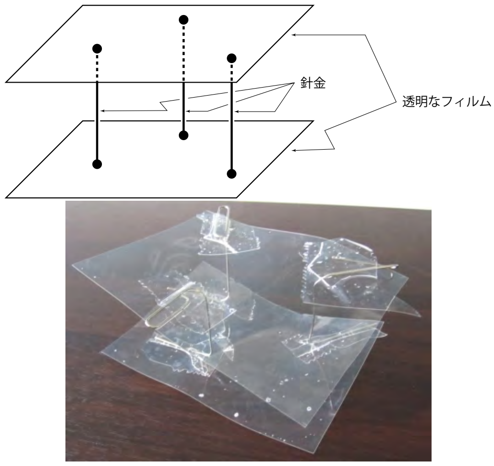


図 1: 用意するもの

取り出すと針金を渡した場所に応じていろいろな形のシャボン膜が張るが, シャボン膜はフィルムに垂直な平面状に張ると考えると, フィルムの外側からシャボン膜が見える線分の長さの和が最少になるように張っているはずである。よって本問題の線分 $\mathrm{AP}, \mathrm{BP}, \mathrm{CP}$ はフィルムの外側からシャボン膜が見える線に対応し, 答えの P はシャボン膜が 3 本に分かれている場所である。

図 2: P の位置

[1]岐阜大学教育学部

この問題の答えはフェルマー点やシュタイナー点と呼ばれており, 高校程度のベクトルや微分法の知識があれば機械的に求めることができる。しかし, 補助線をうまく使えば中学生の学習範囲内でも求めることができる。以下に示すようにここで与える補助線の引き方は中学校における問題演習ではあまり登場せず, このような問題演習の経験を積ませることも本論文の目的の一つである。ここで述べる方法は [1, Section 1.8] による。

(問題の解答) 点 P を三角形 ABC の内部にとり, 三角形 APC を A を中心に 60° 回転させる。P, C の移動先をそれぞれ P′, B* とする (図 3)。

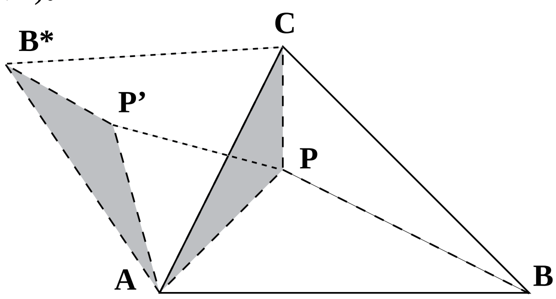


図 3: 補助線

移動の設定から ∠PAP′ = 60° と AP=AP′ が成り立つので三角形 APP′ は正三角形である。従って AP=PP′ である。また, CP=B*P′ である。ゆえに

$$\mathrm{AP+BP+CP=B^{*}P'+P'P+PB}$$

が成り立つ。ゆえに AP+BP+CP が最小となるのは

$$\mathrm{B^{*}, P', P, B}$$

が一直線上にあるときである。すなわち, P は BB* 上にある。ここで B* は AC を一辺とする正三角形を三角形 ACB の外側に描いたときの A, C 以外の頂点である。

他の 3 辺も同様に 60° 回転させて考えると P は AA*, CC* 上にある。ここで, A*, C* のとり方は B* のとり方と同様である。

次に AA*, BB*, CC* が一点で交わることを示す。

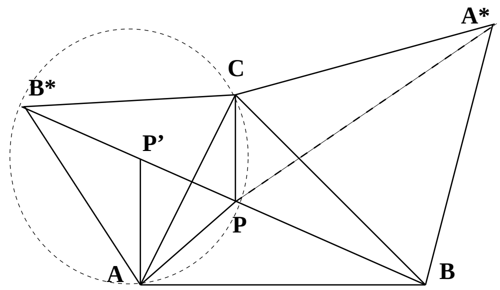


図 4: 一点で交わることの証明

三角形 ACB* は正三角形なので ∠ACB* = 60° である。さらに 三角形 APP′ も正三角形なので ∠APP′ = 60° である。よって円周角の定理の逆より APCB* を通る円が存在する。もう一度, 三角形 ACB* は正三角形なので ∠CAB* = 60° である。ゆえに円周角の定理より ∠B*PC= 60° である。同様に PBA*C を通る円が存在し, ∠ A*BC= 60° なので ∠ A*PC= 60° がいえる。ゆえに PA* と PA のなす角は 180° である。よって P は AA* 上にある。同様にして CC* 上にあることも示せる。したがって P は辺 AB, BC, CA それぞれを一辺とする正三角形を描き, そのもう一つの頂点と, 向かい合う頂点を結んだ 3 つの直線の交点である。 □

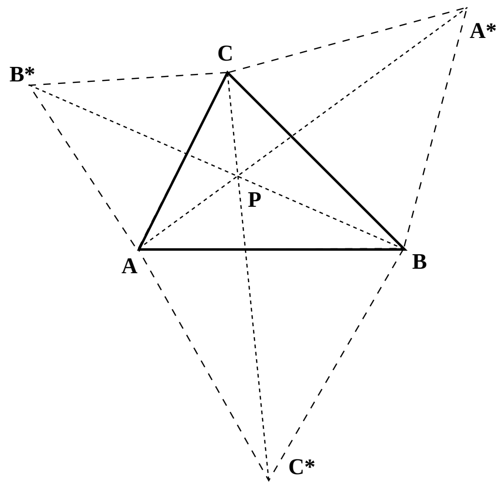


図 5: P の見つけ方 (外側の 3 つの三角形は全て正三角形である)

ここで使った議論は 120° を超える角をもつ三角形に対しては途中でうまくいかなくなる。先ほどの議論で $\angle$A$> 120^\circ$ とする。このとき BB* は三角形 ABC の内部を通らない (図 6)。

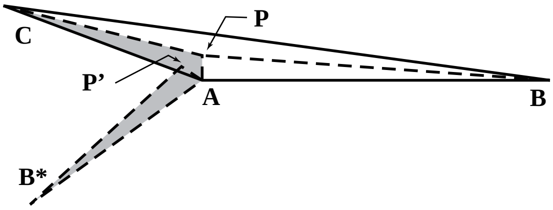


図 6: $\angle$ A$> 120^\circ$ の場合

この場合,

$$\mathrm{AP+BP+CP=B^*P'+P'P+PB}$$

は同様に成り立つ。以下で三角不等式を使って

$$\mathrm{B^*A+AB < B^*P'+P'P+PB} \qquad (*)$$

を示す。余計な部分を消去して, 図 7 で考える。点線は B*A, BA をそれぞれ延長させたものである。

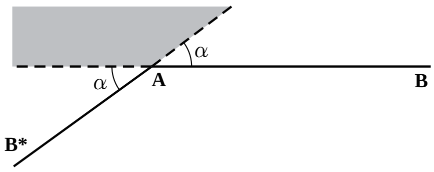


図 7: $(*)$ の証明 1

線分 AB* は AC を 60° 回転させたものなので, 図の角度 α は 60° より小さい。同様に図の影を付した部分の中心角は 120° より大きい, 特に 60° より大きい。ゆえに $\angle\mathrm{PAP'} = 60^\circ$ より, 少なくとも P, P$'$ のどちらか一方は図の影を付した領域内にある。P が影を付した領域内にあるとする。B*P と BA を延長させた線との交点を D とする (図 8)。

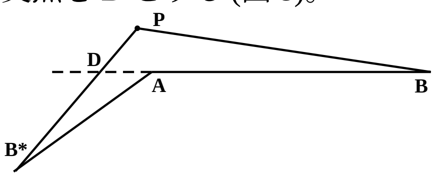


図 8: $(*)$ の証明 2

三角不等式より

$$\mathrm{B^*A < B^*D+DA}, \quad \mathrm{DB < DP + PB}$$

が従う。よって

$$\mathrm{B^*A + AB < B^*P + PB}$$

が成り立つ。さらに三角不等式より

$$\mathrm{B^*P < B^*P^* + P^*P}$$

も得る。従って $(*)$ を示すことができる。影を付した領域にあるのが P$'$ の場合も同様に示せる。ゆえに三角形 ABC の内部の任意の点 P に対して, AP+BP+CP は AB+BC より長い。ゆえにこの場合, 最小値を与える P の位置は A と一致する。

120° を境に三角形の性質が変わる別の現象に関しては [2] でも調べられ, 教材化がなされている。

3. 問題提起と授業の流れ

本論文では問題を生徒に示す前に, いくつかの作業を行ってより生徒の興味・関心を喚起することを考える。

初めに透明なフィルム二枚の間に, 正三角形を作るように三本の針金を渡したものを作り, 石けん水に浸して取り上げる。すると図 9 のようにシャボン膜が張る。

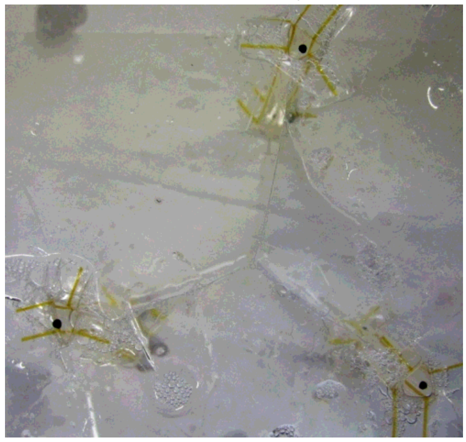


図 9: シャボン膜

ここで, 生徒に正方形を浸すとどうなるか質問する[2]。初めに正三角形を見せられたほとん

[2] このタイミングでこの質問をすることは岐阜大学教育学部の山田雅博氏の示唆によるものであり, 同氏に感謝する。

どの人は図 10 のような形にシャボン膜が張ると予想する。

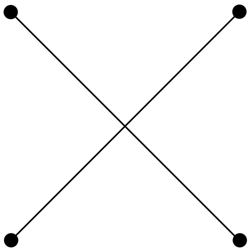


図 10: 正方形の場合の予想

しかし実際に正方形を浸してみると図 10 のように張ることはなく, 図 11 のように張る。

図 11: 正方形の場合のシャボン膜

シャボン膜は一番効率が良い形になろうとするので, 面積が一番小さくなるように張ることはよく耳にする話題である。ここでこの話を生徒にし, 予想と実際のシャボン膜の形では実際のほうが本当に面積が小さいことを検証する。

フィルムの間隔は一定なのでシャボン膜が張っている部分の長さを比べれば良い。それはそれぞれ図 12 のようになっている。

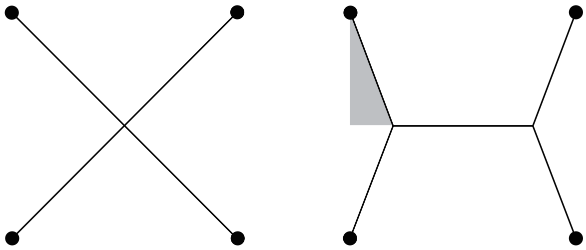


図 12: 正方形の場合の予想と実際

実際に張るシャボン膜の三叉路になっている部分は, バランスがとれるようになっていると考えれば, 三叉路の角度は 120° であると考えられるので, 長さが計算できる。正方形の一辺の長さを 1 とすると, 予想されるシャボン膜の長さは対角線の長さの二倍なので $2\sqrt{2} = 2.828\cdots$ である。実際に張るシャボン膜の長さは図 12 の影を付した直角三角形が内角 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ をもつ三角形であることから, 辺の長さは短い方から $1/(2\sqrt{3}), 1/2, 1/\sqrt{3}$ なので, 長さは

$$4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \sqrt{3} = 2.732\cdots$$

となる。予想された張り方の場合の長さは $2.828\cdots$ なので実際に張るほうが短いことがわかる。

さて, 三角形に針金を渡したものは図 2 のようにある点 P から各頂点へ放射状に線が伸びるような形に張るが, P は重心とは異なる。これは第 2 節でも述べたように 120° 以上の内角をもつ三角形を考えれば, その鈍角をもつ頂点に P が一致することから容易に分かるし, 実際に実験しても確かめることができる。

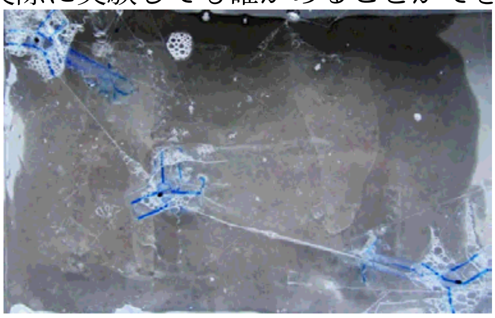


図 13: 120° 以上の内角を持つ場合（一番長い辺以外の 2 辺に膜が張っている）

図13は120° 以上の内角を持つ三角形にシャボン膜を張らせたもので, 一番長い辺以外の２辺に膜が張っており, p は重心と異なることがわかる。

ここまで導入し, 生徒の興味を喚起した上で第２節の求め方を生徒に考えさせる。

4. 授業案について

本節では指導案を示すことにより, 授業の提案を行う。指導案は文末につける。

引用文献

[1] H. S. M. Coxeter. 1989, Introduction to geometry. Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York.

[2] 原田和樹, 愛木豊彦. 2011, 円錐上の最短経路を題材にした教材の開発と実践. プレプリント.

（資料）

学習指導案

1、単元名

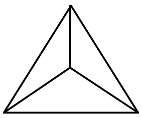
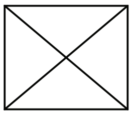
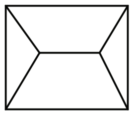
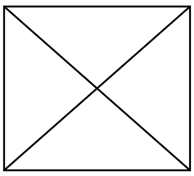
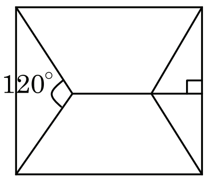
シャボン玉と数学

2、展開

2.1　本時のねらい

身近にあるシャボン膜の最小面積で張るという性質を使って，正三角形，正方形では，シャボン膜はどのように張るのか考え，本当に最小面積になっているのかを計算で確かめる。

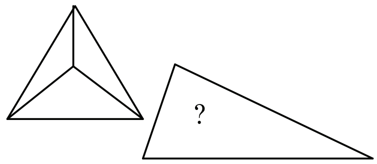
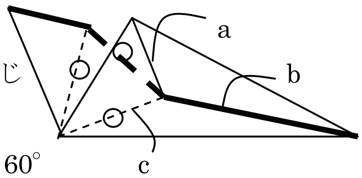
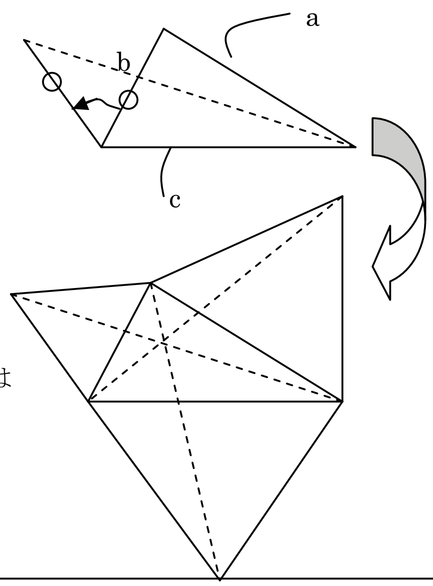
2.2　本時の展開(1/3)

学習活動	指導・援助
○課題づくりをする ・シャボン玉の性質の説明（面積が一番小さくなるように張ることを実例を交えて簡単に説明） ・正三角形の形の場合どのように張るか？  ・正方形はどうなるか？　生徒予想 　結果  ○課題を設定し，課題追求に向かう 課題　予想よりも結果の方が小さいことを計算で確かめよう。 ○考えを進める 予想  三平方の定理より 対角線の長さは$\sqrt{2}$ よって $2\sqrt{2}=2.828\cdots$ 結果  三平方の定理より $(\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times 4)+(1-\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{3}{\sqrt{3}}=2.732\cdots$ まとめ　数値を比べて，結果の方が短いことが分かる。	・正三角形はどのように張るかは大体感覚で分かる。 ・正方形は生徒に予想させる。生徒の予想と結果は違うことが予想される。そこに疑問や興味をもたせる。 ・実際にシャボン玉で体験させる。 ・正方形は 1 辺 1 cm とする。 ・角度については生徒に測らせる。 ・予想と結果という文字は図形の絵に置きかえる。

2.3　本時のねらい

一般の三角形に対して，シャボン膜の面積が最小となる点を見つけ出すことができるようにする。

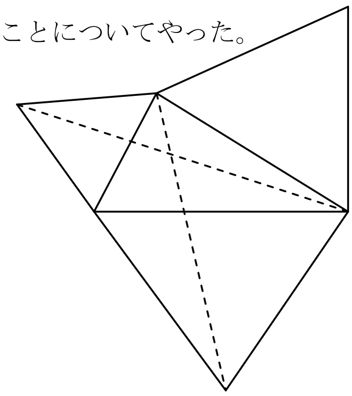
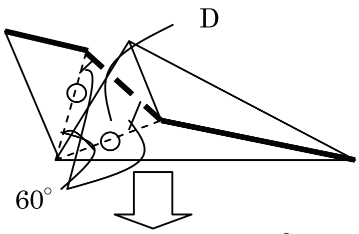
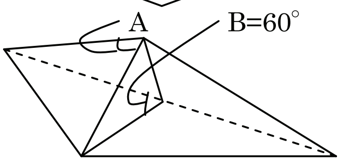
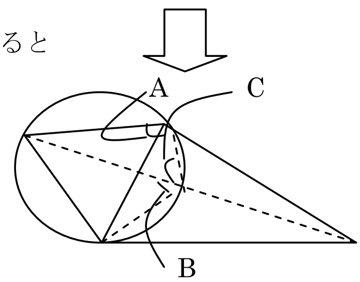
2.4　本時の展開(2/3)

学習内容	指導・援助
○課題づくりをする ・前回やった内容を簡単におさらいする。 ・正三角形のときは，どう張るか？ ・一般の三角形では？  ○課題を設定し，課題追求に向かう 課題　正三角形以外の三角形の最小になる点を探そう。	・前時の実験から正三角形は最小になる点がどこかはわかる。しかし他の三角形でははっきりとは分からない。どうやれば求められるのか考えさせる。
○途中までは教師がやる 左図の三角形を 60°回転させる。 細点線同志は回転移動させているので同じ 間の角は 60°回転しているので 60° 二等辺三角形のため太点線の両端の角は 60°  よって点線でできた三角形は正三角形 よって細点線＝太点線 太線＝a+b+c となる。 太線が最小になるとき，最小の点になる。 太線が最小になるのは？ グループごとの作図を比較，太線の長さを計測する。 ↓ 直線に近いほど短い　→ 最小になるのは直線になるとき	・グループごとに分かれて行う。 ・どんな三角形でも求められることを実感するためグループごとに好きな三角形を書かせる。 ・少し難しくすべて生徒が考えるのは厳しいので途中までは教師がやる。
○各自で考えを進める a を 60°回転させる。 点線を結ぶ b，c についても同じことを行う  点線が交わるところが最小の点 各 a，b，c の線から作った三角形は 正三角形であることもわかる。 この点はフェルマー点という。 まとめ　三角形の各辺から正三角形を作り結び，3 本が重なるところが最小の点になる。	・最小＝直線のときということに気付かせる。 ・本当に 3 本の線が 1 点で交わるのか疑問を持たせ，次の授業につなげる。

2.5　本時のねらい

前時の内容と，平面幾何の既習事項を用いて，3 本目が 2 本の線の交点を通ることを証明することができるようにする。

2.6　本時の展開（3/3）

学習内容	指導・援助
○課題づくりをする ・前回は三角形の各辺について正三角形をつくりそれぞれ頂点と頂点を結んだ線の重なった点がフェルマー点であることについてやった。 ・本当に 3 本目は交点を通るのか？ 	・本当に 3 本の線が 1 つの点で交わるのか疑問をもたせる。
○課題を設定し，課題追求に向かう 課題　3 本目の直線が交点を通ることを証明せよ。	・フェルマー点を求める手順を思い出す。
○考えを進める 三角形 D を 60°回転しているので図のようになる。  太線は直線なので右図のようになる。 角 A についても同じことを考えると $\angle A = 60°$  	・角度に視点に合わし考えていく。
$\angle A = \angle B$ から円周角の定理の逆を考えると右図のような円がかける。 角 C も同じように考えれば 60°だとわかる。 よって $\angle C + \angle B = 120°$ 他の辺についても考えると，残り 2 つの角も 120°になる。 $60° + 120° = 180°$ より 3 本目の直線は交点を通る。  まとめ　角度に注目して，円周角の定理，円周角の定理の逆をうまく使えば，3 本目の直線も交点を通ることを証明することができる。	・他の辺でも同じように円周角の定理から考えれば、C，B のように 60°の角が二つできる。このことから交点を通ることが証明できる。