

ダムの倒れにくさに対する考察

小暮あゆみ¹, 愛木豊彦²

ダムを設計するときには, 倒れると滑るという2つの危険性を考慮しなければならない。我々は, その一つであるダムの倒れにくさについて調査していく中で, 高校で学習する内容を倒れにくさの考察において活用できることが分かったので, これを高校生用の教材として提案する。本論文では, これまでのダムを題材とした授業実践との関連についても言及している。

<キーワード>ダム, 倒れにくさ, モーメント, 関数の最大値

1. 研究の動機

筆者は, これまでにダムを題材とした授業実践を2回行った。それらの概要を紹介した後, 本論文で示す研究の動機を述べる。

まず始めに, 小学生を対象に, 土砂を固めて作る「ダム作り」を題材とした実践を行った([1])。そこでは, 2008年9月に改訂された中学校学習指導要領[2]において, 「図形」領域に「投影図」が加わったことから, 投影図を描く必然性が感じられることを意図して授業案を作成した。このときの児童に示した課題は, 「形に着目して, 強いダムを作ろう」であった。

授業の準備の段階で, 多くの実験から, 強いダムの形の特徴がはっきりした。その特徴は, 下の図1のように, ダムの上流面が底面に対し垂直であり, 下流面は底面と鋭角をなして交わっているということである。

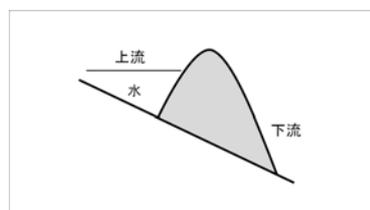


図1

しかし, このような特徴をもつダムが強い

ことを裏付ける根拠がなかった。そこでそれ以降, [3,4,5]を参考にしながら「強いダムの形」を調査した。その結果, 次のことが分かった([3])。

日本では, ダムのいろいろな形式の中で, 重力式コンクリートダム(図2)と呼ばれるものが多く造られている。この形式のダムは, 上で述べた実験から分かった強いダムの特徴を備えている。また, 重力式コンクリートダムは, 自重で水を支えているため, 「倒れる」と「すべる」という2つの危険性を抱えている。

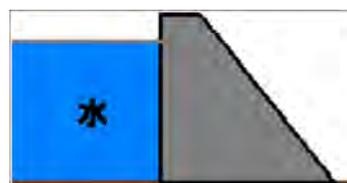


図2

ここで「倒れる」について着目する。ダムの断面図が図3のような三角形であるとする。このとき, 滑らないものとする。つまり, 倒れるときには, 図3の点Bを支点とした回転をするものとする。ダムにかかる力は, ダムの自重による重力と, 静水の圧力である。ここで, ダムにかかる重力の点Bを支点としたモーメントの大きさをP, 上流面にかかる水圧

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

全体の点Bを支点としたモーメントの大きさを Q とすると、 $Q > P$ であればダムが倒れる。

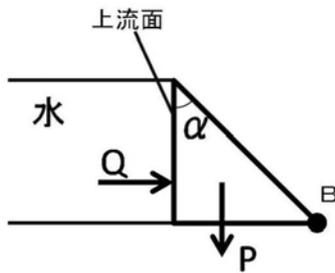


図3

この「倒れる」という現象の考察において、中学校や高校で学習する数学が活用できることを知り、このことを是非子どもたちに伝えたいと考えた。そこで、中学生を対象に、ダムの転倒を題材とした、既習事項の活用ができるような授業案を開発し実践した([6,7])。

この授業では、ダムの「倒れる」という現象を紹介した後、立体の「倒れにくさ」を判断するためには、どこに着目すればいいかを考察していった。そのために、このダムの形を三角柱(写真1)とみなす。そして、水圧による転倒を考察するのは、中学生にとって難しいので、その代わりに、板の上に三角柱を置き、板を傾けて「倒れる」という現象を考えることにした(図4)。



写真1

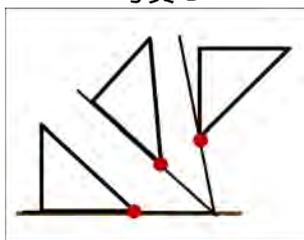


図4

板を傾ける際、三角柱の1辺を板に固定する。図5のように、支点と重心を結ぶ直線が地面に対し垂直になるまでは、三角柱は倒れない。そこから、さらに傾けると三角柱は倒れる。

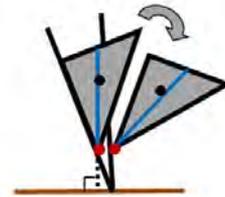


図5

この実験の後、論証、計算という流れで「倒れにくさ」について考えた。この授業における設定で、一番倒れにくいのは、写真2のような形である。

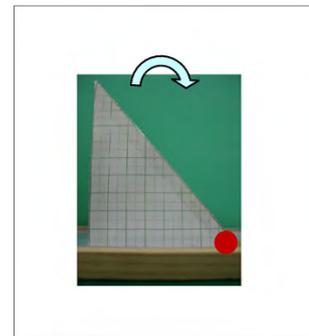


写真2

授業後、水のない場合であれば、写真2の形が一番倒れにくいですが、実際に水がある場合でも同じ結果になるのかということが課題となった。

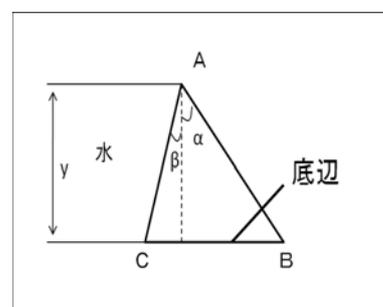


図6

そこで、ダム断面図が図6のような三角形で表される場合、 $\angle ACB \leq 90^\circ$ 、 $\angle ABC \leq 90^\circ$ という条件の下で、最も倒れにくい形について考察した。その結果、分かったことは以下の3つである。

- 倒れにくさは、BCとyの比によって変わる。
- 実際に使われているようなダムにおいては、 $\angle ACB = 90^\circ$ のときが最も倒れにくい。従って、授業[6]における設定は、現実と一致している。
- 倒れにくさに対する考察において、高校で学習する内容が重要な役割を果たす。

次節以後、モーメントなどを用いて、ダムの倒れにくさについて考えていく。

2. ダムの転倒に対する安定条件

ダムの倒れにくさについて考えるために、まず、ダム断面図を三角形とみなす。(図7, 図8)

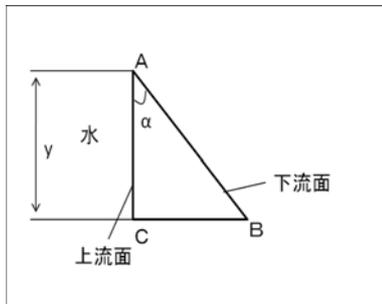


図7

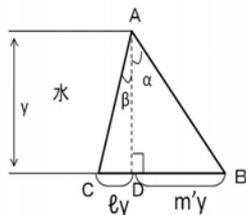


図8

そして、yでダムの高さを表し、 $BC = my$ とする。さらに、点AからBCに下ろした垂線

との交点をDとし、 $\angle BAD = \alpha$ 、 $\angle CAD = \beta$ とする。従って、上流面が傾いていないときは、 $\alpha = 0$ であり、上流面が傾いているときは、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ である。また、 $l = \tan \beta$ 、 $m' = \tan \alpha$ とおくと、 $m = l + m'$ が成り立つ。

本節では、2.1節で静水圧によるモーメントの大きさを求めた後、それをもとに2.2節で、ダムが倒れない条件を示す。

2.1. 静水圧のモーメント

静水圧による力のモーメントの大きさを求める。図9のように、ADをn等分し、その分割された区間では、静水圧が一定にかかるものとする。そして、その静水圧による力のモーメントの和を求める。k番目の区間の中点を P_k 、区間のA側の端点を P'_k とする。さらに、 P_k, P'_k からBCに下ろした垂線との交点をそれぞれ Q_k, Q'_k とする。

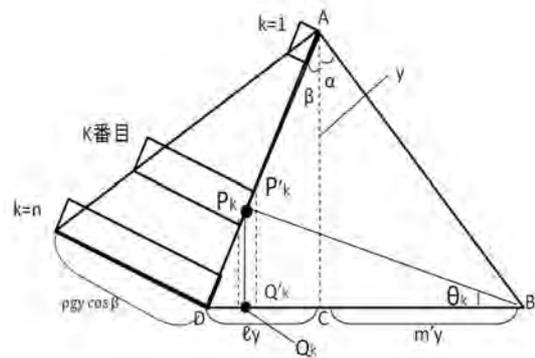


図9

このとき、図9より、

$$BC = y \tan \alpha = m'y, CD = y \tan \beta = ly,$$

$$CQ'_k = CD \times \frac{k-1}{n}, Q'_k Q_k = \frac{CD}{2n}.$$

よって、

$$BQ_k = BC + CQ_k$$

$$= my + ly \times \frac{k-1}{n} + \frac{ly}{2n}$$

$$= my + ly \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right). \quad (1)$$

次に、 $P_k Q_k$ を求める。

$$\begin{aligned}
 P_k Q_k : y &= DQ_k : CD \\
 &= (CD - CQ_k) : CD \\
 &= \left\{ \ell y - \ell y \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} : \ell y \\
 &= \left\{ 1 - \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} : 1, \\
 P_k Q_k &= y \left\{ 1 - \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \\
 &= y \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right). \quad (2)
 \end{aligned}$$

よって、

$$BP_k = \frac{P_k Q_k}{\sin \theta_k},$$

ここで、 $\theta_k = \angle P_k B D$ である。

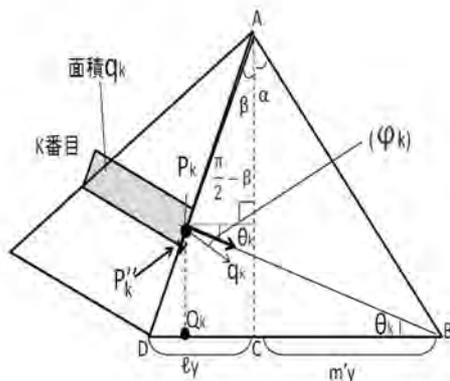


図 10

P_k を通る AD の垂線と BP_k がなす角の大きさを φ_k とする。図 10 より、

$$\angle AP_k B = \theta_k + \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right).$$

また、 $\varphi_k + \angle AP_k B = \frac{\pi}{2}$ より、

$$\begin{aligned}
 \varphi_k + \theta_k + \frac{\pi}{2} - \beta &= \frac{\pi}{2}, \\
 \varphi_k &= \beta - \theta_k.
 \end{aligned}$$

k 番目の区間の D 側の端を P''_k とする。 P''_k にかかる静水圧 q'_k を求める。

$$\text{静水圧} = (\text{水深}) \times \rho g,$$

(ただし、 ρ は水の密度、 g は重力加速度) なので、

$$\begin{aligned}
 q'_k &= \rho g \times AP''_k \\
 &= \rho g \times \frac{k}{n} \times y.
 \end{aligned}$$

よって、 k 番目の区間にかかる静水圧による力 q_k は、 $AD = \frac{y}{\cos \beta}$ より、

$$\begin{aligned}
 q_k &\equiv \frac{AD}{n} \times q'_k \\
 &= \frac{y}{n \cos \beta} \times \rho g \times \frac{k}{n} \times y \\
 &= \frac{1}{n^2} \frac{k \rho g y^2}{\cos \beta}.
 \end{aligned}$$

ここで、モーメントについて簡単に説明する。図 11 のように、力点に力 F がかり、支点 Z と力点の距離が d 、力点と支点を結ぶ直線と力の向きのなす角が θ であるとする。このとき、点 Z を支点としたときの力のモーメントは $dF \sin \theta$ によって定義される。

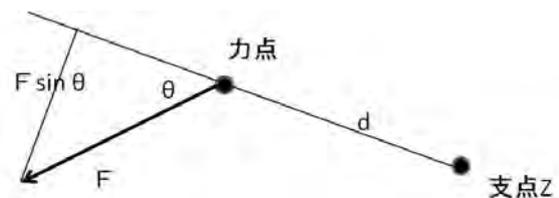


図 11

従って、点 B を支点としたときの q_k のモーメント M_k は、

$$M_k = q_k \times (BP_k \times \sin \varphi_k)$$

である。ここで、モーメントの値は、反時計回りの向きを正の向きとしている。よって、 $\beta < \theta_k$ のときも、 $\varphi_k = \beta - \theta_k$ とすることにより、 $\sin \varphi_k = \sin(\beta - \theta_k) < 0$ なので、逆向きの場合も、この式で表すことができている。

従って,

$$\begin{aligned}
 M_k &= q_k \times (\mathbf{BP}_k \times \sin \varphi_k) \\
 &= q_k \sin(\beta - \theta_k) \times \mathbf{BP}_k \\
 &= q_k \times \mathbf{BP}_k \times (\sin \beta \frac{\cos \theta_k}{\cos \beta} - \sin \theta_k) \cos \beta \\
 &= \frac{1}{n^2} k \rho g y^2 \\
 &\quad \times \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k}{\sin \theta_k} (\tan \beta \cos \theta_k - \sin \theta_k) \\
 &= \frac{1}{n^2} k \rho g y^2 \\
 &\quad \times \left(\mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k \tan \beta \frac{1}{\tan \theta_k} - \mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} k \rho g y^2 \\
 &\quad \times \left(\mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k \tan \beta \frac{\mathbf{BQ}_k}{\mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k} - \mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k \right) \\
 &= \frac{k}{n^2} \rho g y^2 (\mathbf{BQ}_k \tan \beta - \mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k).
 \end{aligned}$$

ここで, (1), (2) を代入して,

$$\begin{aligned}
 M_k &= \frac{k}{n^2} \rho g y^2 \\
 &\quad \times \left[\left\{ m'y + \ell y \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \tan \beta \right. \\
 &\quad \left. - y \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right].
 \end{aligned}$$

モーメントの和を考えると,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n M_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \rho g y^2 \\
 &\quad \times \tan \beta \left\{ m'y + \ell y \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \rho g y^3 \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right). \quad (3)
 \end{aligned}$$

(3) を前半部分と後半部分に分けて計算する。

(前半部分)

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \rho g y^2 \tan \beta \left\{ m'y + \ell y \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \\
 &= \frac{\rho g y^2}{n^2} \tan \beta \\
 &\quad \times \left\{ m'y \sum_{k=1}^n k + \frac{\ell y}{n} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) + \frac{\ell y}{2n} \sum_{k=1}^n k \right\} \\
 &= \frac{\rho g y^2}{n^2} \\
 &\quad \times \tan \beta \left\{ \frac{m'y(n+1)n}{2} + \frac{\ell y}{6}(n+1)(2n+1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\ell y}{2}(n+1) + \frac{\ell y}{4}(n+1) \right\} \\
 &= \tan \beta \\
 &\quad \times \left\{ \frac{m'\rho g y^3}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{\ell \rho g y^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\ell \rho g y^3}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{\ell \rho g y^3}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}
 \text{(上式)} &= \tan \beta \left(\frac{m'\rho g y^3}{2} + \frac{\ell \rho g y^3}{3} \right) \\
 &= \frac{\rho g y^3}{2} \left(m' + \frac{2}{3} \ell \right) \tan \beta.
 \end{aligned}$$

(後半部分)

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \rho g y^3 \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= - \frac{\rho g y^3}{n^2} \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=1}^n k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k \right) \\
 &= - \frac{\rho g y^3}{n^2} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} (n+1)(2n+1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} (n+1) \right\}.
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & \text{(後半部分)} \\ = & - \left\{ \frac{\rho g y^3}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\rho g y^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\rho g y^3}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{(上式)} &= - \left(\frac{\rho g y^3}{2} - \frac{\rho g y^3}{3} \right) \\ &= - \frac{\rho g y^3}{6}. \end{aligned}$$

以上より, モーメントの和は,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n M_k \\ &= \frac{\rho g y^3}{2} \left(m' + \frac{2}{3} \ell \right) \tan \beta - \frac{\rho g y^3}{6} \\ &= \frac{\rho g y^3}{2} \left\{ \left(m' + \frac{2}{3} \ell \right) \tan \beta - \frac{1}{3} \right\}. \end{aligned}$$

2.2. ダムの重量のモーメント

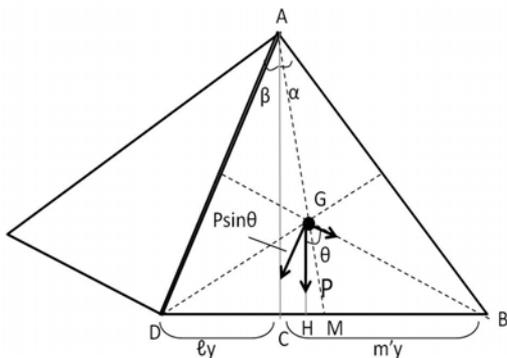


図 12

図 12 より, 重量 W は,

$$W = \frac{w y^2 (\ell + m') g}{2},$$

ここで, w はダムの密度である。次に, BD の中心を M , 三角形 ABD の重心を G , G から

BD に下ろした垂線の足を H , $\vartheta = \angle BGH$ とすると,

$$BG \sin \vartheta = BH, BM = DM = \frac{m' + \ell}{2} y$$

となる。

i) $m' \geq \ell$ のとき

$MC = MD - CD$ かつ, H は CM を 2:1 に内分するので,

$$\begin{aligned} HM &= \frac{1}{3} MC \\ &= \frac{1}{3} (MD - CD) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{m' + \ell}{2} y - \ell y \right) \\ &= \frac{(m' - \ell) y}{6} \end{aligned}$$

となり, $BH = BM + HM$ と合わせて,

$$BH = \frac{2m' + \ell}{3} y$$

を得る。

ii) $\ell > m'$ のとき

$MC = BM - BC$ かつ, H は MC を 2:1 に内分するので,

$$\begin{aligned} HM &= \frac{1}{3} MC \\ &= \frac{1}{3} (BM - BC) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{m' + \ell}{2} y - m' y \right) \\ &= \frac{(\ell - m') y}{6} \end{aligned}$$

となり, $BH = BM - HM$ と合わせて,

$$BH = \frac{2m' + \ell}{3} y$$

を得る。

i), ii), 図 12 より, 点 B を支点としたとき,

重量 W のモーメントは、

$$\begin{aligned} & W \sin \vartheta \times BG \\ &= BG \sin \vartheta \times W \\ &= \frac{1}{3}(2m'y + \ell y) \times \frac{wy^2(\ell + m')g}{2} \\ &= \frac{(2m' + \ell)(\ell + m')}{6} wy^3 g \end{aligned}$$

と表される。

2.3. 倒れにくさに対する考察

このときの倒れない条件は、 W のモーメント + Q のモーメント ≥ 0 である。よって、 $(m' + \frac{2}{3}\ell) \tan \beta \geq \frac{1}{3}$ ならば、 Q のモーメントの値も正となり、ダムは絶対に倒れない。

ここで、

$$(m' + \frac{2}{3}\ell) \tan \beta < \frac{1}{3} \quad (4)$$

とする。このときの倒れない条件は、

$$\begin{aligned} & \frac{(2m' + \ell)(\ell + m')}{6} wy^3 g \\ &+ \frac{\rho g y^3}{2} \left\{ (m' + \frac{2}{3}\ell) \tan \beta - \frac{1}{3} \right\} \geq 0, \\ & \frac{(2m' + \ell)(\ell + m')}{6} wy^3 g \\ &\geq \frac{\rho g y^3}{2} \left\{ \frac{1}{3} - (m' + \frac{2}{3}\ell) \tan \beta \right\}, \\ & \rho \leq \frac{(2m' + \ell)(\ell + m')w}{1 - (3m' + 2\ell) \tan \beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

(5) をもとに、倒れにくさを次のように考えていく。実際のダムでは、雨が降ったときなど、川の水が土砂等を含み、川の水の密度が高くなる場合がある。このようなときでも、倒れないダムが必要である。従って、ダムの倒れにくさを (5) の右辺の量とみなす。つまり、ダムが倒れる限界の川の水の密度を倒れにくさと考えることにする。そして、

$$\rho(\beta) = \frac{(2m' + \ell)(\ell + m')w}{1 - (3m' + 2\ell) \tan \beta}$$

とおき、 $0 \leq \tan \beta \leq m$ の範囲で、これを最大とする β の値を求める。ただし、(4) が成り立たないときは、 ρ は、全ての値を取り得るので、 $\rho(\beta) = \infty$ と考えることにする。

今、 $m' = m - \ell$ 、 $\ell = \tan \beta$ なので、

$$\begin{aligned} \rho(\beta) &= \frac{(2m - \ell)mw}{1 - (3m - \ell) \tan \beta} \\ &= \frac{(2m - \tan \beta)mw}{1 - (3m - \tan \beta) \tan \beta} \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $\tan \beta = x$ とおくと、 $0 \leq \tan \beta \leq m$ なので、 $0 \leq x \leq m$ である。また、(4) を x を用いて表すと、 $x^2 - 3mx + 1 > 0$ となる。従って、 $x^2 - 3mx + 1 \leq 0$ ならば、 $\rho(\beta) = \infty$ なので、 $m > 0$ に対し

$$I_m = \{x \geq 0 | x \leq m, x^2 - 3mx + 1 > 0\},$$

とおき、 $x \in I_m$ に対し $f_m(x) = \rho(\beta)$ とする。つまり、

$$f_m(x) = \frac{(2m - x)mw}{1 - 3mx + x^2} \quad (x \in I_m)$$

である。

以下、 $m > 0$ 、 $x \in I_m$ に対し、 f_m を最大にする x の値を求める。

まず、 x の範囲が $0 \leq x \leq m$ のとき、常に $x^2 - 3mx + 1 > 0$ が成り立つ m の範囲を求める。

$$x^2 - 3mx + 1 = (x - \frac{3}{2}m)^2 + 1 - \frac{9}{4}m^2$$

なので、 $y = x^2 - 3mx + 1$ のグラフは、グラフ 1 のようになり、 $0 \leq x \leq m$ の範囲で、 $x = m$ の値 $-2m^2 + 1$ が最小値なので、 $-2m^2 + 1 > 0$ 、つまり、 $m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ならば、

$$x^2 - 3mx + 1 > 0 \quad (0 \leq x \leq m)$$

が成り立つ。

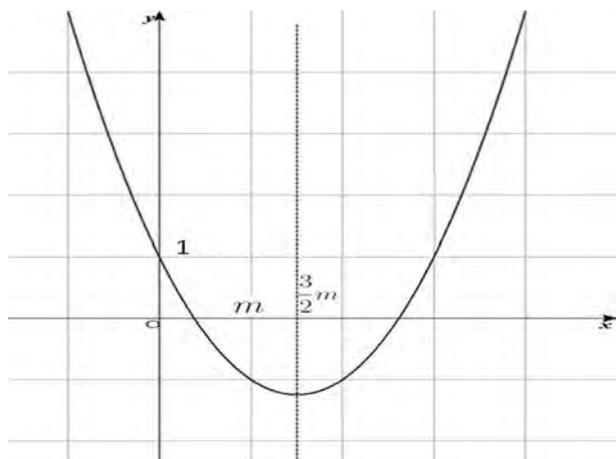


図 12

これ以後、I) $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときと、II) $m \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときとに場合分けして、 f_m が最大となる x の値を求める。

I) $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 \leq x \leq m$ のとき

$$f_m(x) = \frac{mw(2m-x)}{x^2-3mx+1}$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{mw} f'_m(x) \\ &= \frac{-(x^2-3mx+1) - (2m-x)(2x-3m)}{(x^2-3mx+1)^2} \\ &= \frac{x^2-4mx+6m^2-1}{(x^2-3mx+1)^2}. \end{aligned}$$

($f'_m(x)$ の分子) = 0 の判別式を D_1 とすると、

$$D_1 = 4 - 8m^2 > 0$$

である。よって、 $f'_m(x) = 0$ は 2 つの実数解

$$x = 2m \pm \sqrt{1-2m^2}$$

をもつ。ここで、

$$2m - \sqrt{1-2m^2} < 0 \iff 0 < m < \frac{1}{\sqrt{6}}$$

である。

従って、 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき、 $2m - \sqrt{1-2m^2} < 0$ かつ、 $2m + \sqrt{1-2m^2} > m$

なので、 $0 \leq x \leq m$ に対し、 $f'_m(x) < 0$ である。ゆえに、 f_m は単調減少なので、 $f_m(0)$ が最大値である。

次に、 $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする。このとき、 $2m - \sqrt{1-2m^2} \geq 0$ なので、 $2m - \sqrt{1-2m^2} > m$ かどうかを考えなければならない。今、

$$2m - \sqrt{1-2m^2} < m \iff m < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。よって、 $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、 f_m の増減表を書くと、

| | | | | | |
|--------|----------|------------|----------------------|------------|----------|
| x | 0 | ... | $2m - \sqrt{1-2m^2}$ | ... | m |
| f'_m | + | + | 0 | - | - |
| f_m | $f_m(0)$ | \nearrow | | \searrow | $f_m(m)$ |

となる。ゆえに、 $x = 2m - \sqrt{1-2m^2}$ のとき、 f_m は最大値をとる。

次に、 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると、 $2m - \sqrt{1-2m^2} > m$ なので、 $0 \leq x \leq m$ で、 $f'_m(x) \geq 0$ である。従って、 $f_m(m)$ が最大値となる。

以上より、 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、最大値をとる x の値をまとめると、

$$\begin{aligned} 0 < m < \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ のとき} & \quad x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \leq m < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき} & \quad x = 2m - \sqrt{1-2m^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq m < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & \quad x = m, \end{aligned}$$

となる。

II) $m \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$x^2 - 3mx + 1 > 0$ となる $x > 0$ の範囲を求めると、 $m \geq \frac{3m - \sqrt{9m^2 - 4}}{2}$ なので、

$$0 < x < \frac{3m - \sqrt{9m^2 - 4}}{2}.$$

よって、

$$I_m = \{x \geq 0 \mid x < \frac{3m - \sqrt{9m^2 - 4}}{2}\},$$

である。まず、 $D_1 \leq 0$ より、 $0 \leq x < \frac{3m - \sqrt{9m^2 - 4}}{2}$ で f_m は単調増加である。よつ

て、 $f_m(m)$ が最大値である。さらに、 $x_0 = \frac{3m - \sqrt{9m^2 - 4}}{2}$ とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_m(x) = \infty$$

が成り立つ。

以上の結果から、最も倒れにくいダムの形をまとめたものが、図 13 である。

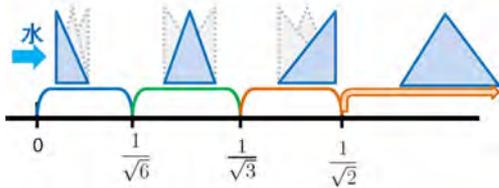


図 13

これらをダムに置き換えて考えると、 $m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合は重力式コンクリートダムを考えるとみなすことができる。この場合のダムはコンクリートでできているので、敷地を使わないスマートな形になり、全ての形で倒れる可能性がある。その中でも、最も倒れにくい形が、図 13 で示した形である。

$m > \frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合は、ロックフィルダムと考えることができる。このダムは、土を使って作るため、敷地を多くとり、たくさんの土を使う。そのため、絶対に倒れない形が存在する。それがロックフィルダムの形である。

3. 今後の課題

本論文で示したように、ダムの倒れにくさは、高校数学を使って考えることができた。従って、この内容を高校生用の教材にするこ

とが可能だと考えている。また、ダムの転倒を考える上では、モーメントなど理科と関連する内容も必要となる。このように、理科と数学のつながりを実感できるような授業も考えられる。

生徒たちが、既習の内容を活用できたり、数学の有用性を感じられるような教材にしていきたい。

引用文献

- [1] 小暮あゆみ, 愛木豊彦, 2009, ダム作りを題材にした授業案の開発と実践, 数学教育学会誌研究紀要臨時増刊, 2009 年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 97-99.
- [2] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説, 数学編.
- [3] A.Bourgin, 1953, The design of dams, London sir Isaac Pitman Sons,Ltd.
- [4] 松岡元, 1999, 基礎土工学シリーズ 土質力学 森北出版株式会社.
- [5] W.P.Creager, J.D.Justin, J.Hinds. 1944 年, 重力ダムの設計 農林省農地局建設部建設課.
- [6] 小暮あゆみ, 愛木豊彦, 2010, 図形領域における数学的活動を取り入れた授業方法の開発と実践, 数学教育学会誌臨時増刊, 2010 年度数学教育学会春季年会発表論文集, 181-183.
- [7] 堀江侑加, 愛木豊彦, 2006, 日常に潜む数学教材の提案・実践, 岐阜数学教育研究, 第 5 号, 16-25.
- [8] 小暮あゆみ, 愛木豊彦, 2010, ダムの転倒を題材とする授業案について, 岐阜数学教育研究, 第 9 号, 70-83.