岐阜数学教育研究
2004, Vol.3, 54-64

主体的に課題を追究する姿を目指した教材の提案 〜正多面体の性質を追究する活動を通して〜

山田雅博[1], 中野深雪[2], 下村哲[3]

中学生・高校生を対象に, 主体的に課題を追究する姿を目指した教材を提案し, 授業実践を行った。教材は, 正多面体を取り上げた。正多面体を観察し, それらの展開図を作図して, 自ら正多面体を構成するという活動を行う。その過程において, 自ら課題を見つけ, 試行錯誤しながら正多面体の性質を追究するという, 主体的な学習が行われることを目指した。本論文では, その授業実践の結果を報告する。

＜キーワード＞ 主体的, 正多面体, 展開図

1. はじめに

学習指導要領 ([5][6]) が改訂され, 基本的なねらいは, ゆとりの中で自ら学び自ら考える力などの「生きる力」を育成することとなっている。算数・数学科においても, 自ら課題を見つけ, 主体的に問題解決をする生徒の姿を目指して授業が行われている。

今回は, 十分な時間をとれる高校数学セミナーにおいて, 中学校, 高等学校の生徒を対象に実践する機会を頂いた。授業日程は, 平成16年8月11日 (水)・12日 (木), 9:30〜14:00である。途中休憩を1時間はさんで行った。参加人数は16名 (3名が中学校3年生) であった。そこでは, 主体的に追究する生徒の姿を目指して実践を行った。教材は, 正多面体を用いた。その授業実践の結果を報告する。

2. 研究の目的

数学の能力は高いが, 数学が好きではないという生徒が増えている。生徒達が, 数学に対して興味・関心を持ち, 自ら課題を見つけ, その課題に対する自分なりの結論を導くことができたときに, 数学を好きと感じ, 数学の良さを実感するのではないかと考える。また, 自ら追究する課題を見つけることができるような教材であれば, 生徒達の主体的な学習につながるのではないだろうか。よって, 生徒達が主体的に数学に取り組み, 自分なりに納得し, 自ら追究する課題を見つけることができるような教材の提案を目指すことにした。

そこで, 古代から人々を魅了し, 数学者の研究対象ともなってきた正多面体に着目した。正多面体は, 対称性が美しい立体である。サイコロもその一つであり, 生徒達にとっても親しみやすいものである。また, 正多面体には, 様々な特徴や性質が潜んでおり, 追究するための課題を数多く含んでいる。特に, 正多面体が5種類に限られるという事実は興味深い。

以上の理由から, 正多面体は, 生徒達の興味・関心を引き出し, 主体的な追究を行うことのできる教材であると考える。そこで, 正多面体の特徴や性質の考察を教材化し, 実践を行うことにした。

本研究の目的は, 本教材の有効性を考察することである。つまり, 本教材が, 生徒達が主

[1]岐阜大学教育学部
[2]岐阜大学大学院教育学研究科
[3]広島大学大学院教育学研究科

体的に課題を追究するのにふさわしい教材であるかどうかを考察することである。

考察する手段は, 次の (I),(II) である。

(I) 生徒達のアンケート

(II) 授業中における生徒達の様子

これらの考察は, 「7. 授業について」において述べる。

3. 本時の位置付け

生徒達はこれまでに, 小学校, 中学校, 高等学校において算数・数学を学び, 空間図形についての理解を深めている。

本時では, 正多面体を教材として取り上げた。正六面体は, 立方体として, 小学校第 6 学年で取り上げられており, すべての生徒が学習している。その他の 4 種類の正多面体は, 中学校において取り上げている教科書がほとんどであるが, 発展的な内容として取り上げられている場合が多く, 学習していない生徒もいると考えられる。また, 学習していたとしても, 新たな疑問や興味・関心を持ち, 追究することができる教材である。

授業者は以前, 小学校第 3 学年を対象に, 正多面体を教材とし,「算数ワールド」において実践を行った ([4])。そこでは, 展開図から正多面体を構成することと, 正多面体から展開図を追究する算数的活動を通して, 立体図形に対する感覚を豊かにすることを目指した。また, 試行錯誤を通して, 念頭的な操作により, 想像して展開図から立体を組み立てたり, 立体から展開図を予想したりすることができるようにすることも目指した。この実践の際には, 5 種類の正多面体の展開図を用意したり, 各々の正多角形のパーツを用意して, 教材にたくさんの手を加えた。それは, 発達段階上必要なことであった。

今回の実践は, 中学校第 3 学年と高校生が対象である。授業者側が, できるだけ手を加えない教材を, 生徒達に提示したいと考えた。また, 生徒達は小学生と比べて多くの知識や経験を持っており, より深い追究をすることができる。そこで, 展開図と立体との関係という固定された課題ではなく, 主体的に自ら課題をみつけて正多面体の様々な性質を追究していくことを課題とした。

4. 教材について

正多面体は, 「合同な正多角形の面を持つ凸多面体」という定義では決定することができない。その他に, 次のいくつかの同値条件のうちの 1 つが必要とされる。「すべての頂点の立体角が等しい」, 「すべての頂点は同じ数の面で囲まれている」, 「すべての頂点は 1 つの球面上にある」である。また, 「1. はじめに」でも触れたが, 正多面体は, 追究するための課題を数多く含んでいる。実際に生徒達がどのような課題を追究したかについては, 「7. 授業について (II)」で述べる。

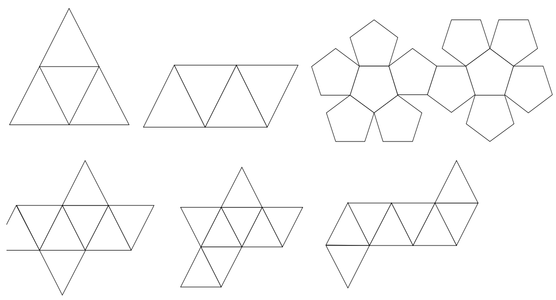
授業では, 1 日目に, 正四面体, 正八面体, 正十二面体の 3 種類の正多面体を提示する。そして, それらの正多面体を観察し, 画用紙に展開図を作図する。次に, 作図した展開図を基に正多面体を作成するという活動を行う。正多面体を観察したり, 展開図を作成する過程において, 疑問に思ったことや気付いたことから, 自らの課題を見つける。2 日目は, 1 日目に提示しなかった残りの 2 種類の正多面体を提示し, それらも仲間に入れて追究する。そして, 自らの課題を追究することを通して, 正多面体の性質を見つけていく。例えば, 各正多面体の面の形や構成要素に着目して, 「1 つの頂点に何枚の面が集まっているか」, 「1 つの辺には 2 つの面が接している」ということから, 頂点や辺の数を求めることができるなどの性質を見つけていく。

2 日間を通して, 生徒達は, 正多面体を実際に作成し, 手で触れ, 観察しながら, 様々な性質を追究するという数学的活動を行う。その過程において, 正多面体が持つ整った数学的な美しさを感じ取ることができると考える。そして, 数学的活動の楽しさや研究活動を味わい, 試行錯誤しながら自らの結論を導いていこうとする姿を育てたい。

5. 本時の目標

正多面体を観察し, それらを構成するという数学的活動を通して, 自ら課題を見つけ, 追究し, 試行錯誤しながら正多面体の性質を追究していくことができる。

6. 本時の展開 (1 日目)

学習のねらい	学習活動	指導上の留意点
	○正四面体, 正八面体, 正十二面体を提示する。	・全員が手に取って見ることができるように十分な数の正多面体を用意する。
試行錯誤しながら展開図を作図することができる	○ 3 種類の正多面体を観察して, 展開図を作図し, それらを作ろう。 ・予想した展開図から正多面体は作れたか。	・正五角形は作図が難しいので, パーツを準備して, 必要であれば使えるようにしておく。
	○ 3 種類の正多面体の展開図を作図する。 	・作図する過程で正多面体の性質や展開図について気付いたこと, 疑問に思ったことを書き出しておくように伝える。 ・進まない生徒に対しては, 正多角形を 1 つ 1 つつないで展開図を作ってみるように助言する。
	○作図した展開図から作った正多面体の性質で, 気付いたことをまとめていこう。	・できるだけ多くの性質に注目するようにする。
自ら課題を見つけ, 追究することができる	自ら課題を決めて 正多面体の性質を調べよう。	・どういう性質を調べていくのかは生徒各自に委ねる。
	【課題例】気付いたことや, 疑問に思ったことから課題化する。 (①〜⑤までが課題例であり, 黒点は, その課題に対して考えられる追究の内容である。)	・一つ一つの正多面体の性質から正多面体の共通した性質へとつなげていけるようにする。

中間発表をし, 今後の追究の見通しをもつことができる。	①正四面体と正八面体はどちらも正三角形を使っている。他に正三角形を使って作れる正多面体はないだろうか。 ・正三角形を5枚,6枚…と組み合わせて考える。 ②正多面体は何種類あるのかな。 ・面の形に着目して（正七角形, 正八角形…ではできるか）考える。 ・一つの頂点に集まる面の数に着目して考えてみよう。 ③正多面体の面の数, 頂点の数, 辺の数はどうなっているだろうか。 ・数を数える。簡単に計算で求める方法はないかな。 ・表にまとめて考察する。何か関係がありそうだ。 ④正多角形を組み合わせて, 違う種類の立体はできないかな。 ・サッカーボールは正五角形と正六角形を合わせた形だ。それぞれ何枚いるか作ってみよう。 ・色々な正多角形を組み合わせて立体を作ってみよう。 ⑤引き続き展開図は何種類あるか調べてみよう。 ・正六面体の展開図も考えてみよう。 〇これまで調べたことや, 気付いたことを中間発表する。	・「この正多面体の場合はどうなるかな」「このことから他に言えそうなことはないかな」などと追究の幅が広がるよう言葉がけを行う。 ・課題が決まらない生徒に対しては, どんなことが気になったかということから課題を引き出すようにする。 ・正多面体に限らず, 他の多面体を追究する姿も大切にする。

本時の展開 (2 日目)

学習のねらい	学習活動	指導上の留意点
順序立てて自らの追究過程をまとめることができる。	○追究した過程を模造紙にわかりやすくまとめよう。 調べたことを順序立ててまとめよう。 ・相手にわかりやすいように工夫して書く。 ・見取り図を用いてまとめる。	・自分の課題, 追究方法, 追究過程, 追究して得られた結果は何かがわかるように書くことにする。 ・一日目の追究時間が足りない場合は引き続き追究しながらまとめる。
発表を通して, 多面体の性質について理解を深めることができる。	○発表 ・模造紙や模型などを用いて, 追究した内容を発表する。 （プラトンの多面体定理や, オイラー数についての話をする。）	

1 日目の最後に, 生徒一人一人の課題を発表する時間を設けた。他の生徒の発表を聞くことにより, 自分自身の課題に対して新たな疑問が発生したり, 追究を進める際の参考になると考えたからである。

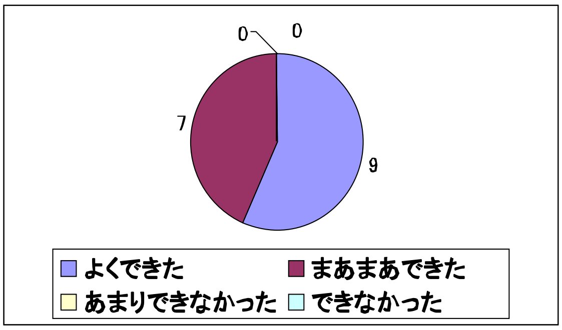
2 日目の最後に, 追究した結果を発表する時間を設けた。追究した結果を模造紙にまとめ, それを用いて発表する。発表する内容を模造紙にまとめる過程では, 順序よくまとめることを目指す。このことにより, 追究した内容を再確認し, 得られた結果を確実なものにすることができる。

7. 授業について

(I) アンケート結果からの考察

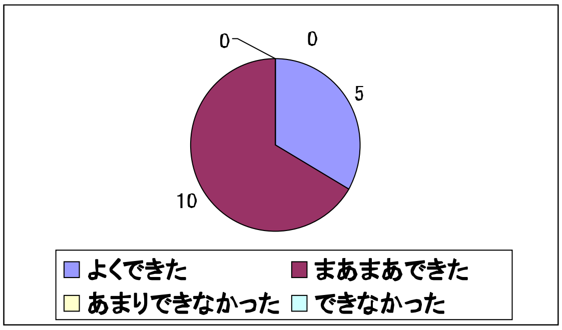
2 日目終了後のアンケート結果に基づき, 本時のねらいに即して考察する。

(1) 正多面体に興味をもち, 活動することができましたか。



この結果より, 「よくできた」, 「まあまあできた」と, 程度の差はあるが, すべての生徒が正多面体に興味をもって活動することができた。実際に, 授業において, 生徒達はとても熱心に取り組んでいた。

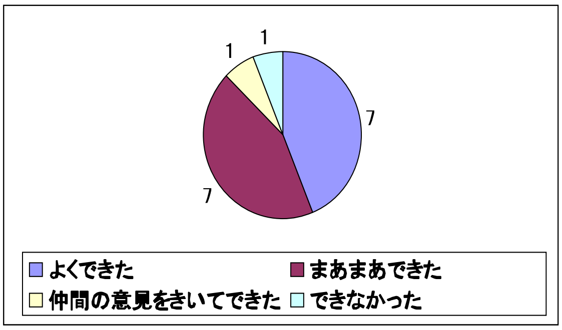
(2) 色々な正多面体の展開図を, 粘り強く何種類も作図することができましたか。



(1) より「よくできた」と回答した生徒は少なかったが, 実際には, すべての生徒がいろいろな正多面体の展開図を粘り強く見つけることができていた。正四面体, 正八面体, 正十二面体の展開図は, すべての生徒が１つ以上の展開図を見つけ, 作図をすることができた。また, 正二十面体の展開図も多くの生徒が発見していた。

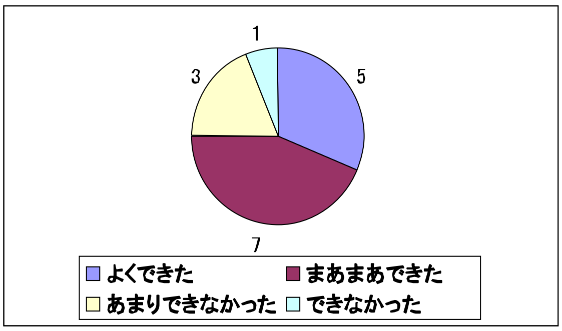
展開図を作図するには, 正多角形のパーツがどこの位置にくっつけばいいかということを念頭で考え, 1 つの正多面体について, 多くの展開図を考えている生徒もいた。

(3) 自分で課題を見つけて, 正多面体の性質を調べることができましたか。



88 %の生徒が, 自分で課題を見つけて正多面体の性質を調べることができていた。生徒は, 自らの興味・関心の赴くままに課題を決めて, 正多面体の性質を懸命に追究していた。「できなかった」と答えた生徒が 1 名いたが, その生徒も仲間の意見を聞きながら追究していた。

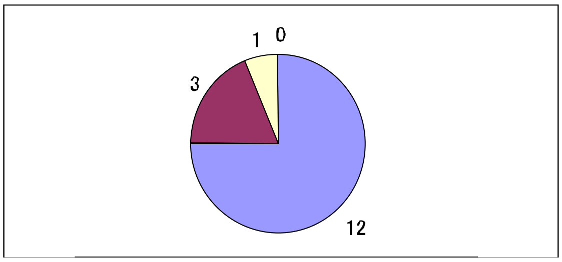
(4) 順序立てて自分の調べた過程をまとめることができましたか。



「まあまあできた」という生徒も含めると, 75 %の生徒が, 順序立てて自分の調べた過程をまとめることができていた。

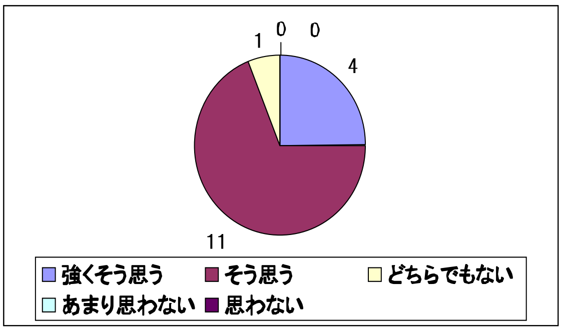
模造紙に書く前に時間をかけて十分に構想を錬り, 課題, 調べた結果, まとめと順序立てを考えている姿が多く見られた。相手に自分の考えを伝えるために, 順序立てて自分の考えをまとめるということは, 非常に大切なことである。

(5) 正多面体の性質について理解を深めることができましたか。



2 日間を通して, 正多面体の性質について理解を深めることができた生徒は, 「まあまあできた」を含めると全体の大部分を占め, 94 %であった。自由記述の感想にも, 「自分よりもっと鋭いところに目をつけ調べている人がいたので, その人の発表が勉強になった」とあり, 発表を通して他の人の意見を聞いて, さらに正多面体の性質に対する理解を深めることができたようである。

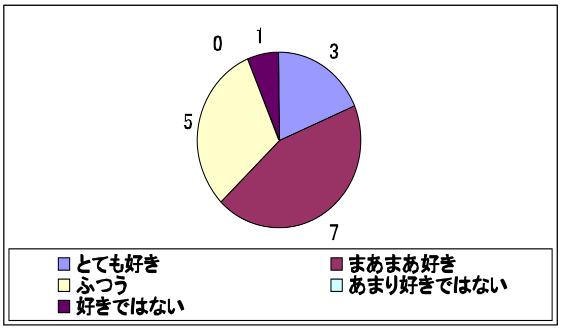
(6) さらに正多面体の性質を知りたいと思いますか。



「強くそう思う」と回答した生徒は全体の 25 %であったが, ほとんどの生徒がさらに正多面体の性質を知りたいと回答していた。こ

の授業を通して, 正多面体に対する興味・関心を深めることができたと捉える。今後も生徒達が, 自分自身で課題を見つけ, 正多面体について追究していく姿を願っている。

(7) 自分で課題を見つけて調べる学習は好きですか。



「まあまあ好き」を含めると, 自分で課題を見つけて調べる学習が好きである生徒は, 66%であった。「好きではない」という生徒が1名いたが, 多くの生徒が自分で課題を見つけて調べる学習を肯定的に受け止めている。課題を与えられた受け身的な学習ではなく, 自ら課題を見つけて取り組む学習では, 生徒自身の主体性が養われる。また, 自分で決めた課題であるので, 最後まであきらめずに追究するという粘り強さも養われる。自ら課題を見つけて調べる学習は, 課題を見つけることができない生徒に対する手立てが十分に必要ではあるが, 生徒達の興味・関心を引き出し, 主体的な学習ができるという点で, 有効な学習形態であると考える。

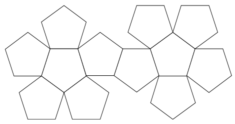
(II) 生徒達の課題追究の様子からの考察

1日目について述べる。正四面体, 正八面体, 正十二面体を作図して構成する活動を行った。正四面体や正八面体は, 面の形はどちらも正三角形であり, 面の数が少ないため, 難なく作図して組み立てていた。

正十二面体は, 面の形が正五角形であるため, 作図するのに苦労していた。活動を行う前に, 正五角形は作図が難しいため, パーツを用意してあり, 自由に使ってよいことを伝えていた。多くの生徒達はそのパーツを利用したが, パーツをなぞって展開図を作図するのではなかった。生徒達は, 授業者がパーツを作図した際の作図の線をじっくりと観察し, 自らその作図方法を見つけようと, 懸命に取り組んでいた。懸命に取り組んでいるものの, 正五角形の作図方法を発見するのは難しく, 追究がなかなか進まなかったため, 正五角形の作図方法を伝えた。そして, なぜそのように作図できるのかということを考えるように助言した。また, 正五角形の一辺の長さと対角線の比が黄金比になることから, そのような比になる線分を作図すればよいということを助言した。このようなことから, 生徒達は作図方法を知り, 正五角形を自ら作図することで, 正十二面体の展開図を作図した。自らのパーツを作り, それをなぞって展開図を作成している生徒もいた。このことから, なぜこのように作図できるかということを課題にする生徒もいた。また, 正五角形を, 折り紙を折って作ることができることを思い出した生徒がいた。そして, なぜそのように正五角形を作ることができるかということを課題にして取り組んでいた。

このように, 正多面体を観察し, 展開図を作成する過程において疑問を持ち, その疑問を課題として追究する姿が見られた。

正十二面体の展開図は, 大部分の生徒が下図のものを考えていた。



上下が対の形であるということを発見し, この展開図を導いていた。また, それ以外の展開図を考えている生徒もいた。その考え方は, 上記の展開図において, 正五角形のつなげ方を少しずつ変える方法である。つまり, 正五角形の辺と辺が重なる場所を考え, 正五角形を少しずつ移動させて異なる展開図を考えていた。

約8割の生徒が, 1日目において, 正四面体,

正八面体, 正十二面体の 3 種類の立体を完成させた。完成することができた生徒から, 自らの課題を決めて, 正多面体の性質の追究を行った。課題は, 様々なものがあった。何人かの生徒は, 正多角形で作ることのできる他の正多面体はないかと追究していた。そして, 正三角形のパーツを組み合わせて, 正二十面体が作成できることを発見している生徒が数名いた。中間発表では, 各々の課題を簡単に発表した。1 人 1 人が異なった課題であり, 2 日目が楽しみであった。

2 日目について述べる。導入において, 正多面体のサイコロを用いて, 正六面体と正二十面体を提示した。そして, 3 種類の正多面体に, それら 2 種類の正多面体を合わせて, 5 種類の正多面体の性質を追究した。1 日目において, 正多面体を 3 種類完成していない生徒は, 作成を続けた。多くの生徒が, 正二十面体の展開図にも挑戦していた。ほとんどの生徒が, 他の生徒とは異なった展開図を作図して, 正二十面体を作成した。

2 日間を通して, どの生徒も自ら作った正多面体に愛着をもち, じっくりと観察をしながら追究を行った。そして, 調べた結果を 1 人または 2 人で模造紙にまとめ, 発表する活動を行った。以下で, 生徒達の行った追究について報告する。

生徒達は, 様々な課題を見つけたが, 分類すると以下のようであった。

(一) 正多面体の性質と特徴を調べよう。

(二) 正六角形でどんな正多面体ができるか調べよう。

(三) 正多面体のできる条件を調べよう。

(四) 折り紙で正五角形を作れるのはなぜか調べよう。

(五) 正多面体の辺の数と面の形の規則性について調べよう。

(六) 正多面体の面の数, 辺の数, 頂点の数, 面の形, および 1 つの頂点のまわりの面の数の関係について調べよう。

課題に対して, 大きく分けて次の 6 つの追究があった。各々, 課題 (一)〜(六) に対し, 追究 (i)〜(vi) が対応している。

(i) 5 種類の正多面体の面の数, 辺の数, 頂点の数を表にし, それらの間の規則性を追究した。

(ii) 1 つの頂点のまわりに集まる正多角形の角度に着目して, 正六角形では正多面体を構成することができないことを導いた。

(iii) (ii) と関連して, 1 つの頂点のまわりに集まる正多角形の角度に着目して, 正多面体が 5 種類より多く構成することができないことを導いた。

(iv) 正五角形が折り紙で作れるのはなぜかを追究した。

(v) 正多面体の面の数と辺の数に着目して, それらの間の規則性を追究した。

(vi) 正多面体が 5 種類に限られることを, オイラーの公式を用いて証明した。

最初に, (i) に関連するグループの追究について述べる。言葉がけをしたこともあり, 多くのグループが, 5 種類の正多面体の面の数, 辺の数, 頂点の数を調べて, 表にしていた。正二十面体は, 面の数が 20 であるということには触れずに, 立体だけを提示したため, どのような立体であるかを追究していた。あるグループは, 面の形が同じ正四面体, 正八面体, 正二十面体については, 正八面体, 正二十面体の面の数と辺の数が, それぞれ正四面体の 2 倍,5 倍になっていることを発見した。また, 辺の数が等しい正多面体では, 各々の面の数と頂点の数が入れ替わっていることを発見した。この追究は, (v),(vi) のグループの追究にも関わっているが, それらのグループの追究については, 後で述べる。

次に, (ii),(iii) に関連するグループの追究について述べる。5 種類の正多面体を構成する正多角形は, 正三角形, 正四角形, 正五角形のみである。そこで, 正六角形で作れる正多面体

はないかと追究を進めていた。正多面体は, 1 つの頂点のまわりに面が 3 つ以上ないと構成することができない。多くの生徒がすぐに, この性質に気付いていた。さらに, 正六角形を 1 つの頂点のまわりに 3 つ組み合わせると平面になってしまい, 正多面体を構成することができないことを導いていた。そして, このことから正多面体を構成する正多角形の種類を調べ, 正多面体が 5 種類より多く構成することができないことを帰納的に説明していた。以下, それについて述べる。正四面体は,1 つの頂点に正三角形が 3 つ集まり, 頂点のまわりの角度は $60\ ^\circ\times 3 = 180\ ^\circ$である。以下同様に, 正八面体は,4 つ集まり,240 °, 正二十面体は,5 つ集まり, 300 °である。正六面体は, 正四角形が 3 つ集まり, $90\ ^\circ\times 3 = 270\ ^\circ$, 正十二面体は, 正五角形が 3 つ集まり, $108\ ^\circ\times 3 = 324\ ^\circ$である。ところが, 正三角形を 1 つの頂点のまわりに 6 つ集めると 360 °になってしまい, 正六角形の場合と同様, 正多面体を構成することができない。また, 正四角形を 1 つの頂点のまわりに 4 つ集めても同様である。正五角形については, 4 つ合わせると, $108\ ^\circ\times 4 = 432\ ^\circ$であり, 360 °を超えてしまっているため, 頂点のまわりの角錐を形作ることができない。よって, 正五角形を 1 つの頂点のまわりに 4 つ以上集めて正多面体を構成することができないことに気付いた。以上のことから, 正多面体は, 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の 5 種類に限られることを導いた。

この条件を以下のように数式で表現しているグループもあった。

正 n 角形で作る正多面体は, α を正 n 角形の 1 つの角とすると,

(1)1 つの頂点を作る面が 3 面以上

(2)(1 つの頂点を作る面の数) $\times\alpha < 360\ ^\circ$の両方を満たすときにできる。

この追究をした後に, 正八角形で構成される正多面体がないかを追究するグループがあった。正八角形を組み合わせると隙間が空いてしまうことから, 正多面体ができないということを説明したグループや, 正八角形を組み合わせたときの隙間に正三角形をはめ込み, 切頂六面体 (正六面体の角を切り落とした多面体) を作成したグループがあった。これに関連し, 1 つの頂点のまわりに集まる面の数に着目して, 正二十面体は, 一番面の数が多い正多面体であることを導いたグループもあった。正二十面体は, 正多面体を構成する多角形の中で, 辺の数が一番小さい正三角形でできている。そして, 1 つの頂点のまわりに正三角形が 5 つ集まっている。1 つの頂点のまわりに正三角形を 6 つ集めて正多面体を構成することはできない。このことから, 正二十面体の面の数が, 正多面体の中で最大であると導いていた。

また, 正三角形でどんな多面体が作れるかを調べていたグループもあった。正多面体を作るための上記 2 点の条件に着目し, 正三角形をたくさん作り, 条件にあうような多面体をたくさん作っていた。正四面体や正八面体, 正二十面体の他に, 十面体を構成することができることを発見した。

次に, (iv) に関連するグループの追究について述べる。正五角形が折り紙で作れるのはなぜかということを追究した。実際には, 正確な正五角形ではないが, ほぼ正五角形と等しい形を作ることができた。作り方についての詳しい説明は省略するが, 作り方の経過が分かるように, 順序立ててわかりやすくまとめていた。また, 発表する際に実演し, 聞いている生徒は驚いていた様子であった。中学校 3 年生の生徒で, 三角比の学習をしてないため証明は難しかったようである。しかし, 仮定と結論をしっかりとまとめており, 高校生になり, 解明できる日を楽しみにしていた。2 日間, 一生懸命に考えており, 高校生になって理解することができた時の喜びは大きいであろう。

次に, (v) に関連するグループの追究についい

て述べる。5種類の正多面体の面の数, 辺の数, 頂点の数を表にしたものを基に, 正多面体の面の数と辺の数についての規則性を調べていた。

すべての正多面体において, 辺の数を面の数で割ると, 0.5になっている事を発見した。このことから正多面体の辺の数は, 正x面体を構成する面を正y角形とすると,

$$x \times y \times 0.5$$

で求めることができるという式を導いていた。また, 別のグループでは, 以下の関係を導いた。

正三角形でできている正多面体の辺の数は,

$$(面の数) \times 1.5$$

正四角形でできている正多面体の辺の数は,

$$(面の数) \times 2$$

正五角形でできている正多面体の辺の数は,

$$(面の数) \times 2.5$$

そして, 辺の数が小数になることがないことに着目した。つまり, 面の数に1.5や2.5をかけて整数になることから, 面の数は偶数であると導いた。

このことに関連し, 面の数がなぜ奇数にならないのかという疑問を持ち, 追究をしていたグループがあった。そのグループは, 正多面体の辺にはすべて2つずつの面が重なり合うことに着目し, 正三角形と正五角形によって構成される正多面体には, 偶数個の面が必要であることを導いていた。

次に, (vi)に関連するグループの追究について述べる。5種類の正多面体の頂点の数, 辺の数, 面の数の表を作成し, オイラーの公式

$$(頂点の数) - (辺の数) + (面の数) = 2$$

を導いた。また, 辺の数の求め方が2通りあることに気付いていた。それは, 以下のようである。

$$\begin{aligned} &(辺の数) \\ &= (面の数) \times (面の辺の数) \div 2 \\ &= (頂点の数) \times (頂点に集まる面の数) \div 2 \end{aligned}$$

そして, この式を変形してオイラーの公式に代入した。このことから, 面の形と1つの頂点のまわりに集まる面の数の関係式を導き出した。そして, その式が成立する条件から, 正多面体は5種類に限られることを説明した。

以上のように, 各々のグループが, 様々な正多面体の特徴を発見した。追究の過程では, 次々に課題を見つけ, 主体的に活動に取り組んでいた。また, 発表では, 皆の前で緊張した様子は見せながらも, 自分で調べた正多面体の性質を, 自信をもって堂々と発表することができた。

8. 授業のまとめ

「7. 授業について」においても述べたように, 生徒達が主体的に課題を追究することのできる教材であったと考える。「普段ではそんなにやらないことをやってすごく楽しかった。これからもいろんなことを追究したいと思った。」という感想があった。授業者にとって, とてもうれしい感想である。自分の興味の赴くままに, 主体的に追究をすることのできる教材を提案できたと考える。生徒達が一生懸命に課題を追究する姿が印象的であった。

長時間にわたる実践であったため, 具体的操作活動を十分に取り入れることができた。このような時間をとることは, 本時のような実践においては可能であるが, 通常の数学の授業内においては, 物理的に難しい。時間配分を工夫したり, グループ学習などを効果的に取り入れることにより, この教材を課題学習の時間に取り入れることが可能ではないだろうか。空間図形の学習において, 具体的操作活動を取り入れることは, 重要である。なぜならば, 具体的操作活動を繰り返すことにより, 念頭での操作ができるようになり, 空間図形に対する感覚が豊かになると考えるからである。このような, 具体的操作活動を取り入れた教材を大切にしていきたい。

9. 終わりに

実践に関わって, 今後の課題について述べ

る。生徒達が主体的に課題を追究する授業においては, どのような課題が出てくるかわからない。どのような課題が出てきても対応できるような十分な教材研究が必要であり, 授業者自身の数学の力を高めるということが今後の課題である。

授業者は, 正五角形を作図することは生徒達にとって難しいと考え, そのパーツを用意して授業に望んだ。しかし, 作図方法は知っていたものの, その作図の意味をしっかりと理解していなかった。生徒達はそのように作図ができる意味を見つけようと懸命に取り組んでいたが, 十分なアドバイスが出来なかった。同様のことが, 折り紙で正五角形を作図している生徒に対しても言える。自分自身が何事にも興味・関心を持ち, 十分な授業準備をしていく必要があるということを強く実感した。

引用・参考文献

[1] 一松　信, 2002, 正多面体を解く, 東海大学出版会.

[2] PR. クロムウェル, 2001, 多面体, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社.

[3] 数学教育協議会　銀林　浩, 2002, 算数・数学なぜなぜ事典, 日本評論社.

[4] 中野深雪・山田雅博, 2003, 岐阜数学教育研究, Vol.2, pp. 106-115.

[5] 文部省, 1999, 中学校学習指導要領解説－数学編－, 東洋館出版社.

[6] 文部科学省, 2002, 高等学校学習指導要領解説－数学編－, 東洋館出版社.