

## 選択教科「数学」における発展的な学習教材の提案

井上春奈<sup>1</sup>, 愛木豊彦<sup>2</sup>

中学生が現実世界の中で数学がどのように活用され、社会と関わりを持つかを知るとは、数学の学習意欲の向上につながると考えた。本稿では、新たな方向から数学に焦点をあて、数学の有用性を知ることが重視して開発した教材の提案と、中学校2校での授業実践の結果と展望について報告する。

<キーワード> 選択教科「数学」、道路設計、クロソイド曲線

### 1. 序論

最近、算数・数学嫌いの児童・生徒が増加している。その理由の一つとして、算数・数学が役に立たないものと感じてしまっていることがある。児童・生徒が、現実世界の中で数学がどのように活用され、社会と関わりを持っているかを知ることが、算数・数学嫌いを解消し、算数・数学に対する学習意欲の向上につながると考えた。本稿では、数学の有用性を知ることが重視し、中学生を対象とする選択教科「数学」における発展的な学習教材の提案をする。

### 2. 教材について

#### (1) 教材の説明

生徒にとって、非常に身近である自転車を題材として取り上げ「道路設計をしよう!」という題材名で授業実践を行う。曲がりやすい道路をどのように設計すれば良いのかを、曲がりやすさという観点から考察する。道路の一部を扇形(中心角 $90^\circ$ )にした場合、それは連続的につながっている。しかし、実際にその道路を自転車に乗って走行した場合、扇形(中心角 $90^\circ$ )の始まった点と、終わった点とで、ハンドルの角度が不連続に(あるいは急激に)変化する。すなわち、扇形のみで設計さ

れた道路は曲がりやすく、それと同時に危険性も生じる。この危険性を回避するため、現実の道路設計では、クロソイド曲線と呼ばれる螺旋の一種が用いられている。また、この螺旋は、高速道路やジェットコースターにも使用されている。ここで述べた危険性、クロソイド曲線については本節(3)で詳述する。

ここで提案する授業においては、まず、生徒は曲がりやすい道路を設計する。その際、生活の中でよく目にする円弧を採用するものと予想される。そこで、その円弧からなる道路が安全であるかどうかを実際に自転車を使ったり、ハンドルの角度変化をグラフに描いたりすることで確かめる。そして、この活動から、円弧だけを用いた道路では危険性が高いことを理解する。授業の最後に、授業者が現実の道路設計に使用されているクロソイド曲線の概形と式、応用されてきたジェットコースターなどを紹介する。この授業を通して、自らの活動を言葉やグラフでまとめたりすることで数学的な見方・考え方を養うことができる。また、未知なる曲線や式に出会うことで、現実社会の中で生きている数学を知り、数学の有用性を感得できる。

#### (2) 教材の特徴

<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部

本教材の特徴は次の4点である。A) 図形(円)の性質を関数的な見方(グラフ)で捉えることができる。B) 実際に現象を目にすることで、ハンドルの変化を捉えやすく、考察しやすい。C) 不連続な関数を扱う。D) 角度を関数の一変数と見る。以下、この4点の特徴について解説する。

- A) 図形(円)の性質を関数的な見方(グラフ)でハンドルの変化を捉えることができる

高校数学や現実の場面において、図形の性質を関数的な見方を用いて考察することは多いにもかかわらず、中学生にとって、関数領域と図形領域との関連を感じる場面は多くない。道路設計という現実的な問題を考察することを通して、この2つの領域の関連性を体感することで、領域間を統合的にみる見方を養うことができる。

- B) 実際に現象を目にすることで、捉えやすく、考察しやすい

ハンドルの角度の変化は、頭で考えただけでは理解が困難である。実際に目で見ることにより、生徒はそのような難しいことでも捉えやすく、考えやすくなる。この経験を通して、現実の場面に生じる現象について興味・関心を持ち、自ら考察しようとする。

- C) 不連続な関数を扱う

教科書では、不連続な関数として郵便料金や電車の運賃表などを取り上げているが、それらはいずれも与えられたものである。この考察活動を通して自然科学の場面においても不連続な関数、あるいはそれに近いものが存在することを知ることができる。

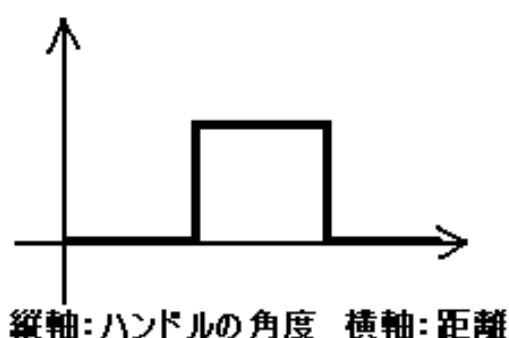
- D) 角度を関数の一変数と見る

本授業は選択教科「数学」であり、生徒の発展的な見方・考え方を養うこと

もねらいの一つである。高校数学では、三角関数を学習する際に角度を変数とみるが、中学校ではこのような見方は扱わない。従って、中学生にとって、角度を変数とみることは未体験であり、容易ではないと思われるが、高校数学学習の基盤を養成できる。

### (3) 教材の数学的解釈

以下、図1で与えられる道路を走行したときのハンドルの角度の変化がグラフ1で与えられることについて解説する。



グラフ1

ハンドルの角度は、道路の曲がり具合によって決定される。道路の曲がり具合は数学的には、曲率半径によって表される。従って、曲率半径は2回微分を含むため、2回微分が不連続であれば、ハンドルの角度変化もグラフ1のような不連続なものとなる。

- ① 二直線を円の一部で結ぶ

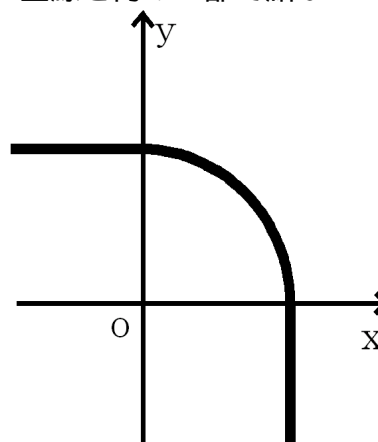


図1

i) 直線について

直線の式を  $f(x) = 1(x < 0)$  とする。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

よって、 $f(x)$  は微分可能であり、 $f'(x) = 0$  である

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = 0$$

よって、 $f'(x)$  は  $x < 0$  で微分可能であり、 $f''(x) = 0$  である。また、曲率半径は  $\infty$  である。

$x = -0$  のとき、 $f'(-0) = 0$ 、 $f''(-0) = 0$  である。

ii) 円弧について

円の式を  $x(t) = \cos t$ 、 $y(t) = \sin t$ 、 $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  とする。

$x(t) = \cos t$  について考える。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -\sin t$$

よって、 $x(t)$  は  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  で微分可能であり、 $x = +0$  のとき、すなわち  $t = +\frac{\pi}{2}$  のとき、 $\dot{x}(t) = -\sin t$  である。

$y(t) = \sin t$  について考える。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \cos t$$

よって  $y(t)$  は  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  で微分可能であり、 $\dot{y}(t) = \cos t$  である。

ゆえに、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

ここで、 $x = +0$  のとき、すなわち  $t = +\frac{\pi}{2}$  のとき、

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

次に、 $\dot{x}(t) = -\sin t$ 、 $\dot{y}(t) = \cos t$  について考える。

$\dot{x}(t) = \sin t$  について、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \\ &= -\cos t \end{aligned}$$

よって、 $\dot{x}(t)$  は  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  で微分可能であり、 $\ddot{x}(t) = -\cos t$  である。

同様に、 $\dot{y}(t) = \cos t$  について、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{y}(t+h) - \dot{y}(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h} \\ &= -\sin t \end{aligned}$$

よって、 $\dot{y}(t)$  は  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  で微分可能であり、 $\ddot{y}(t) = -\sin t$  である。

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \\ &= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} \\ &= \frac{1}{-\sin^3 t} \end{aligned}$$

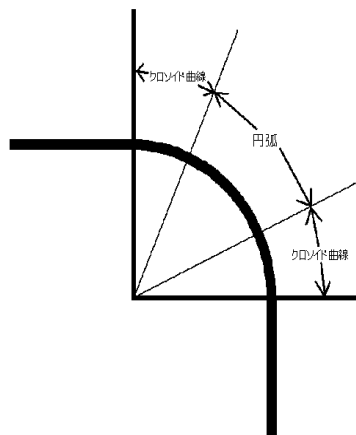
また、曲率半径は 1 である。

$x = +0$  のとき、すなわち  $t = +\frac{\pi}{2}$  のとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1$$

i), ii) より、 $x = 0$  で直線と円弧からなる曲線は連続であるが 2 回微分は可能ではないので滑らかではない。

② 直線と円をクロソイド曲線を用いて結ぶ



i) 直線について

①の i) の計算方法に同じ。

ii) クロソイド曲線について

クロソイド曲線の式は  $x(t) = \int_0^t \cos u^2 du$  , よって  $\dot{y}(t)$  は  $t \geq 0$  で微分可能であり,  $\ddot{y}(t) = y(t) = \int_0^t \sin u^2 du$  ( $t \geq 0$ ) であたえられる (参考 [1][2][3])。  $-2t \cos t^2$  である。

$x(t) = \int_0^t \cos u^2 du$  について考える。

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t+h} \cos u^2 du - \int_0^t \cos u^2 du}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \cos u^2 du \\ &= \cos t^2 \end{aligned}$$

よって,  $x(t)$  は  $t \geq 0$  で微分可能であり,  $x = +0$  すなわち  $t = +0$  のとき

$\dot{x}(t) = \cos t^2$  である。

$y(t) = \int_0^t \sin u^2 du$  について考える。

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t+h} \sin u^2 du - \int_0^t \sin u^2 du}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \sin u^2 du \\ &= \sin t^2 \end{aligned}$$

よって  $y(t)$  は  $t \geq 0$  で微分可能であり,

$\dot{y}(t) = \sin t^2$  である。

ゆえに,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t^2}{\cos t^2}$$

$x = +0$  のとき, すなわち  $t = +0$  のとき,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

次に,  $\dot{x}(t) = \cos t^2$ ,  $\dot{y}(t) = \sin t^2$  について考える。

$\dot{x}(t) = \cos t^2$  について考える。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h)^2 - \cos t^2}{h} = -2t \sin t^2$$

よって,  $\dot{x}(t)$  は  $t \geq 0$  で微分可能であり,  $\ddot{x}(t) = -2t \sin t^2$  である。

$\dot{y}(t) = \sin t^2$  について考える。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h)^2 - \sin t^2}{h} = -2t \cos t^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$= \frac{(\cos t^2 \cdot 2t \cos t^2) - (-2t \sin t^2 \cdot \sin t^2)}{\cos^3 t^2}$$

$$= \frac{2t}{\cos^3 t^2}$$

また, 曲率半径は  $\frac{1}{2t}$  である。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ゆえに, 直線とクロソイド曲線からなる曲線は 2 回微分可能となる。

#### (4) 授業のねらい

ここでは, 4 つの特徴のうち, A) と B) に焦点をあてた授業展開を考え, 次の 2 点をねらいとし, 授業実践を行う。

- ① 実際に現象を目にすることで, 図形 (円) の性質を関数的な見方 (グラフ) で捉えようとする。
- ② 現実社会で使われている新しい曲線の存在を知る。

### 3. 授業内容及び方法

#### (1) 授業内容

平成 15 年 12 月 2 日 A 中学校 3 年生 34 人, 平成 16 年 1 月 13 日 B 中学校 3 年生 24 人を対象として選択教科「数学」の時間に授業実践を行った。

授業の流れは資料 1 (文末) 参照。

#### (2) 授業実践をするにあたって

授業開始前にビニルテープを使い, 図 2 のような図形を床に描き, 生徒が実際に自転車をを使って活動でき, 主体的にハンドルの動き (角度) を考えることができる環境を整えた。また, 授業最後のクロソイド曲線を紹介する場面においては, 実際の道路の図, クロソイ

ド曲線の式、及びクロソイド曲線のグラフを模造紙に印刷し、生徒に提示した。

- 曲がりはじめるところから角度ができる。扇形のところは全て角度が同じだった。

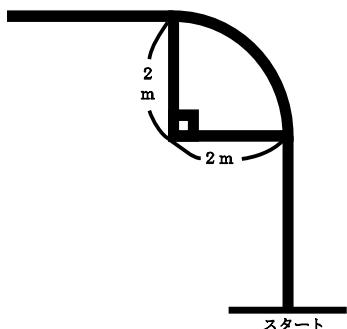


図 2

(3) 中学校 2 校の実践

2つの活動（自転車の使用と机上での考察活動）を行いやすいよう、教室とすぐ外の廊下で授業を行うこととした。また、自転車について、A中学校では、ハンドルはT字、籠なしの比較的ハンドルと車体との関係が見やすい折りたたみ自転車を使い、B中学校は、ハンドルはT字、籠ありの一般的な大きさの自転車を使用した。

4. 授業実践の結果と考察

(1) 生徒の活動

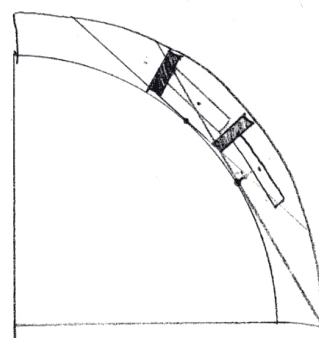
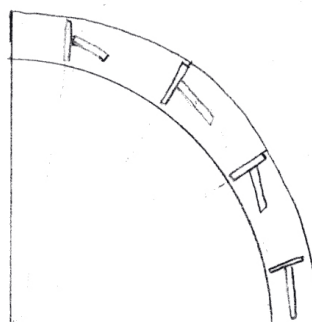
生徒の実際に行った考察活動（言葉・図・グラフ）を紹介する。

i) 言葉で説明

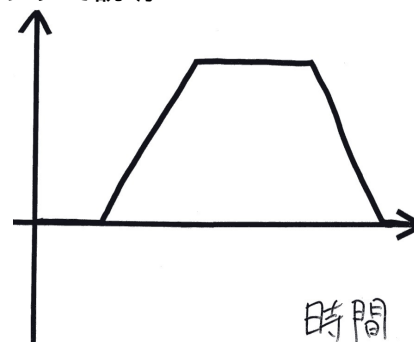
- 曲がりはじめのくらいから角度ができる。曲がっているところは角度が同じになっている。
- 直線の時、ハンドルは0度。曲線の時、ハンドルは45度。だんだん角度が大きくなり、まただんだん小さくなる。
- 円の一部では、進んだ距離が長くなるにつれてハンドルの角度が大きくなる。
- 曲がった道に入りはじめると角度がだんだん大きくなり、直線に戻り始めると小さくなっていく。

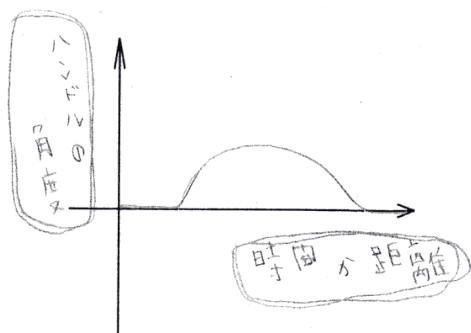
ii) 図で説明

扇形の中心にハンドルを向ける



iii) グラフで説明





## (2) 活動の様子

## i) 自転車を使用した活動



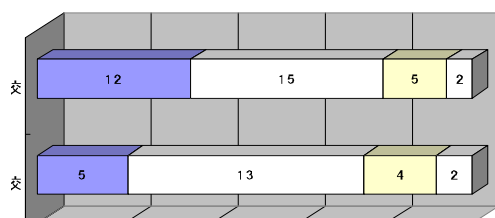
## ii) 考察活動 (シミュレート)



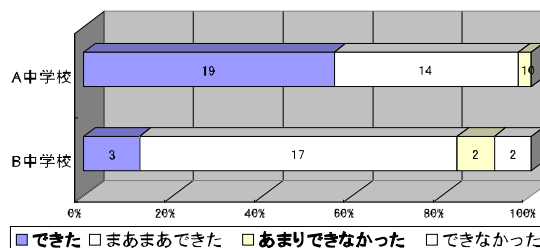
## (3) アンケート結果

授業後に行ったアンケート結果を示す。

## Q.1 道路設計に興味を持ちましたか？

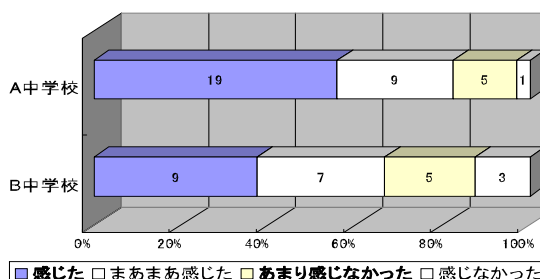


## Q.2 ハンドルの動きを自分で考えることができましたか？



## Q.3 道路設計にクロソイドが有効であると思いましたか？

## Q.4 数学と社会とつながりを感じましたか？



## (4) 生徒の感想

生徒の感想を紹介する。

- 道路は適当に作っているものだと思っていたのでちゃんとした式や曲線に基づいていることにびっくりしました。数学は改めているんなことに役立っているんだなぁと思いました。
- クロソイド曲線という言葉はまったく知らなかったので少し驚きました。数学と道路設計の関係があることを実感しました。
- ハンドルの動きをグラフにするのがむつかしかった。道路の設計であんなに高度のことがあったなんてびっくり。

- 道路を作る時にクロソイド曲線という変な式を使うことがわかった。身近なところでたくさんの数学が使われている。高校でもっと詳しく知れるといいなと思った。
- 実際にハンドルを操作したり、身近なできごとを課題にしたりして、とてもおもしろい授業で数学について探求心がわいた。

#### (5) ねらいに対する考察

① 生徒にとって自転車は、非常に身近であったことから、積極的に活動に取り組んだ。しかし、活動は行っても、ハンドルの動き(角度)を関数的な見方(グラフ)で考えることにおいては、多少困難を示していた。ハンドルの動き(角度)を言葉や図によって表現することはできるが、その言葉や図をどのようにグラフ化すればよいのか分からず、つまずきを感じていた生徒もいた。

② クロソイド曲線という、生徒にとって未知なるものが道路設計と関わりをもつということを知り、驚くと同時にクロソイド曲線の式やグラフに興味を持っていた。アンケートQ・3、Q・4から、道路設計においては、比較的多くの生徒が、現代社会において、数学が有効であると感じることができたと言える。

#### (6) 2校の実践結果を比較して

A中学校ではハンドルの動きが考察しやすく、グラフ化につながる生徒が多かった。それに対してB中学校では、自転車の違いから、考察しにくかったせいか、Q・2に大きな差が見られた。さらに、Q・2の結果が、Q・3、

Q・4にも影響を及ぼしていたと考えられる。授業の中で、生徒が積極的に活動するだけでなく、自分自身で考えることができ、初めて数学の有用性を感じ、数学と社会との関連を認識することに繋がると言える。

#### 5. 今後の課題

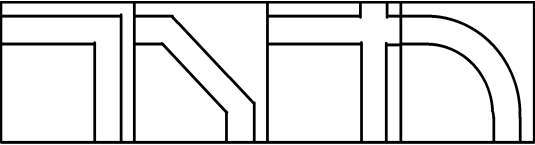
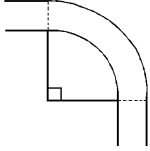
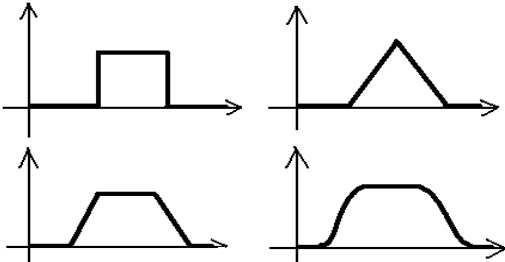
授業実践では、教具の違いによりその差が歴然であり、教具の質の重要性が再確認された。今後は、教具の質をできる限り考慮し、生徒が主体的に思考活動ができるよう、改良していきたい。また、この教材は、クロソイド曲線を扱うため、高等学校での教材(微分積分)として発展可能である。高校生を対象とした授業展開も考え、実践したい。さらに、授業後の生徒の感想から数学の有用性を感じることができたと言え、社会の中で生きる数学に対する興味関心を高めることにつながったと言える。今後もこのような数学の有用性を感じることができる発展的な教材を開発していきたい。

最後に、授業実践にあたり、多大な御協力をいただいた千葉大学教育学部附属中学校の皆様、並びに岐阜県川辺町立川辺中学校の皆様に心から感謝いたします。

#### 引用文献

- [1] 内山一男, 2001, 「道路工学通論」, 技術書院.
- [2] 社団法人 日本道路協会, 1983, 「道路構造令の解説と運用」, 日本道路協会.
- [3] 大塚勝美, 木倉正美, 1971, 「道路の線形設計」, 技術書院.

## 資料 1.

	ねらい	学習活動	留意点
導入	<p>○普段利用している道路を思い浮かべ、道路について興味を持つことができる。</p> <p>○曲がりやすい道路を理由をつけて考えることができる。</p>	<p>1. 2本の道路のつなぎ方を考える。</p>  <p>2. 曲がりやすい道路について考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・スピードを落とさずに曲がれる。</li> <li>・対向車が見える。</li> <li>・膨らまない。</li> <li>・急ハンドルを切らない。</li> </ul>  <p>円が曲がりやすそうだ。</p>	<p>・プリントを配布する。</p> <p>・つなぎ方にはいろいろな方法があることを感じさせる。</p> <p>・スピードは一定、膨らまないで曲がることを強調する。</p>
展開	<p>○曲がりやすさがハンドルの動きに関係していることを理解することができる。</p> <p>○ハンドルの動きに着目し、言葉やグラフに表現しようとすることができる。</p> <p>○実験により、言葉やグラフにしたことを検証する。</p>	<p>3. 曲がりやすさを調べる時、ハンドルの動き(角度)に着目することを理解する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ハンドルを急に動かさないほうが曲がりやすい。</li> <li>・ハンドルの角度を調べたらどうか。</li> <li>・スピードを一定にしたほうがいい。</li> </ul> <p>課題: ハンドルの動き(角度)を調べ、曲がりやすいか考えよう。</p> <p>4. 実際に自転車を押し、ハンドルの変化について考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・最初まっすぐで、後から曲げる。</li> <li>・30°くらい曲がりやすそう。</li> </ul> <p>5. 言葉やグラフでプリントにまとめる。</p>  <p>縦軸: ハンドルの角度 横軸: 時間</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・円のところは一定。</li> <li>・徐々に曲げていく。</li> <li>・一度曲げたら、動かさない。</li> </ul> <p>6. まとめたことを発表する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・グラフは滑らかになりそう。</li> <li>・グラフにすると台形になりそう。</li> <li>・グラフは曲線になりそう。</li> <li>・グラフは、まっすぐ、上がって、下がる。</li> </ul> <p>7. 道路設計に、螺旋(クロソイド曲線)が使われていることを知る。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・高速道路、線路、ジェットコースター</li> </ul> <p>8. 本時の感想を書く。</p>	<p>・ハンドルの動き(角度)に着目するよう助言する。</p> <p>・安全を考え、自転車は押す。</p> <p>・5, 6人実際に活動を行う。</p> <p>・ハンドルの角度が捉えられない生徒に対して、図を使って説明する。</p> <p>・言葉で表現できるようであれば、グラフ化するように助言する。</p> <p>・自由に意見が出せる環境を設定する。</p> <p>・実際の螺旋の図と式を見せる。</p> <p>・螺旋の図・式のプリントを配る。</p>
まとめ	<p>○螺旋のように生活の中で、生かされている図形があることを知る。</p>		