岐阜数学教育研究
2004, Vol.3, 32-38

身近な現象の自由追究を主題とする授業実践報告

岩崎美奈[1], 愛木豊彦[2]

関数の学習過程では現実事象を題材として取り上げることもあるが，その場合，事象を記述する量の関係は既習の関数として与えられることが多く，生徒自らが事象の中に潜む関数関係を探るような学習は少ない。しかし，数学，特に関数の有用性を実感するためには，事象の中に潜む関数関係を見つけ出し，それらに触れる体験も必要ではないだろうか。本論文は，ペットボトルと水を用いた事象を考察する教材の紹介と，高校生を対象に行った授業実践の結果をまとめたものである。

＜キーワード＞関数的な見方, 実験, ２次関数

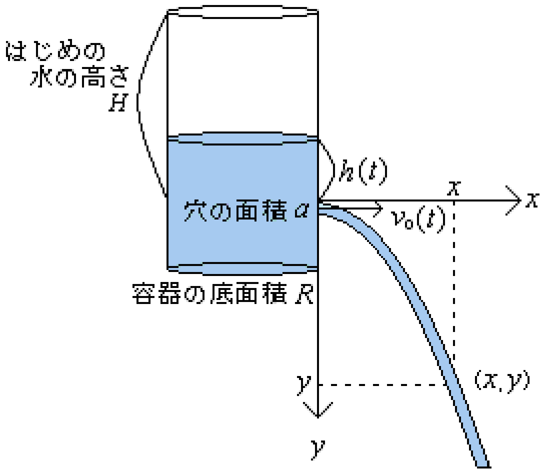
1. はじめに

関数は中学校，高校の数学において重要な学習内容の一つである。そもそも関数は自然現象や社会現象を能率的に考察するために生まれてきたものであるため，学習の過程でも現実事象を題材として用いることが多い。けれども，そのような場合，関係は関数として既に与えられていたり，学習する関数に合うように，数値データが理想化されていたりする。従って，実際の事象に現れる量の関係を関数として捉え，それを生徒自らのアイデアを用いて数式で表現したりする学習は少ない。しかし，数学の有用性を実感するためには，事象の中に潜む関数関係を見つけ出し，その関係や数値データを自分の手で理想化するなどして，数学的に考察する体験も重要であると考える。

そこで，右図のように，穴をあけたペットボトルから水が流れ出る現象を題材とし，そこから自由に性質を発見したり，事象を記述したりする授業を計画し実践を行った。事象を記述することで，本質を明らかにしたり，未来を予測したりすることは，数学の一分野である数理科学ではよく行われている。その一端を体感することは，生徒の数学の世界を広げ，数学への興味・関心を高めるだろう。本論文では教材の紹介と実践結果を報告する。

2. 教材について

次のような下部に円形の穴をあけたペットボトルから水が流れ出る現象を考える。



実験を観察すると，水の流れ出る形は放物線のような形状を描く。他にも，

・水の勢いと時間には関係があるのか。

・水位の減り方には規則性があるのか。

など多くの疑問が浮かぶ。このように各自が

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

素朴に感じた疑問を，実験を行ったり，物理の理論を用いたりしながら，自由に追究する活動を考える。

追究の過程では，水の高さや時間の関係等を関数と捉えたり，穴の形や流れ出る水の形に注目したり，規則性を見つけたりとさまざまな数学的な活動が考えられる。そこでは，2次関数や反比例，空間図形，平面図形など既習の知識を活用することとなる。

通常の関数の学習でも数値データを考察することはあるが，それらは現象から取り出すものではなく，すでに与えられたものが多い。また，そこに潜む関係は学習中の関数となることが殆どである。しかし，このように自由な追求の場合，生徒は自分で数値を設定せねばならない。また，そこに潜む関係は既知の関数で表現できるとは限らない。数値データやグラフから関係を予想し，既習事項をもとに追究していくこととなる。

このような活動を行うことにより，次のような学習効果があると考える。

①現実事象と数学との関係の深さを実感できる。

②数学の有用性を感じ，数学への興味・関心を高めることができる。

③関数的な見方・考え方や既習の数学的知識を活用する能力を高めることができる。

④論理的に考える力を伸ばすことができる。

この教材を通し，与えられた数学ではなく，発見し創り上げていく数学を体感することは，生徒にとって十分に価値があると考える。また，このような「数学を使う」活動は，既習の知識によらず考察を進めることができる（考察には限界がなく，さらなる発展も見込まれる）ことや，これまでの知識や技能の深化，総合化を図ることができることのよさも含んでいる。

<参考>

水の流れ出る形について簡単に解説する。

$v_0(t)$：時刻 t に穴から飛び出す水の速さ
$h(t)$：時刻 t における水の高さ
$H = h(0)$：はじめの水の高さ
g：重力加速度

とする。

時刻 t のときに，座標 (x, y) にいる点が飛び出してから s 秒かかっているとすると，

$$x = v_0(t-s)\times s \qquad ①$$

$$y = \frac{1}{2}gs^2 \qquad ②$$

と表せる。①より，

$$v_0(t-s) = \frac{x}{s} \qquad ③$$

となる。また，トリチェリの定理より，

$$v_0(t-s) = \sqrt{2g\times h(t-s)} \qquad ④$$

と表せる（武田他 [1]）。

ここで，時間：$t \to t + \Delta t$，水面の高さ：$h \to h + \Delta h$ とすると，(流出した水の量) = (穴から出た水の量) なので，

$$-R\Delta h = a\sqrt{2g\times h(t)}\times\Delta t$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{a}{R}\sqrt{2g\times h(t)}$$

$\Delta t \to 0$ とすると，

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{R}\sqrt{2g\times h(t)}$$

$A = \dfrac{a}{R}\sqrt{2g}$ とおくと，

$$h' = -A\sqrt{h}$$

この微分方程式を $h(0) = H$ として解くと，

$$2\sqrt{h(t)} = 2\sqrt{H} - At \qquad ⑤$$

$$h(t) = \left(\frac{2\sqrt{H} - At}{2}\right)^2 \qquad ⑥$$

⑤より，時刻 t の取り得る範囲は，

$$t < \frac{R\sqrt{2H}}{a\sqrt{g}} =: T$$

となる。

④，⑥から，

$$v_0(t-s) = \sqrt{2g\times\left\{\frac{2\sqrt{H} - A(t-s)}{2}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{2g}\times\frac{2\sqrt{H} - A(t-s)}{2} \qquad ⑦$$

（⑤より $2\sqrt{H} - A(t-s) = 2\sqrt{h(t-s)} > 0$）

③，⑦より，

$$\frac{x}{s}=\sqrt{2g}\times\frac{2\sqrt{H}-A(t-s)}{2}$$

式を整理すると,

$$ags^2+(R\sqrt{2gH}-agt)s-Rx=0 \quad ⑧$$

⑧をsに関する2次方程式とみて,判別式Dを計算すると,

$$D=(R\sqrt{2gH}-agt)^2+4ag\times Rx>0$$

となるので,⑧は解を持つ。$f(s)=ags^2+(R\sqrt{2gH}-agt)s-Rx$とおくと,

$$f(0)=-Rx<0$$
$$ag>0$$

より$f(s)=0$の解α, $\beta(\alpha>\beta)$は,$\beta<0<\alpha$となる。よって,$s>0$より,

$$s=\alpha$$
$$=\frac{-(R\sqrt{2gH}-agt)+\sqrt{(R\sqrt{2gH}-agt)^2+4ag\times Rx}}{2ag} \quad ⑨$$

②に⑨を代入して整理すると,

$$y=\frac{B^2+Cx-B\sqrt{B^2+2Cx}}{4a^2} \quad ⑩$$

(ただし,$B=R\sqrt{2H}-at\sqrt{g}, C=2aR$)

⑩が水の様子を表す式となる。実際に数値を代入して作成したグラフと実験結果とを比べると,上の式でほぼ再現できることがわかる。

次に,⑩の式が放物線に十分近いことを示す。⑩をxについて微分すると,

$$y'=\frac{C}{4a^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Cx}{B^2}}}\right)$$

一般に,$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$とすると,$x$が0に近いとき,

$$g(x)\fallingdotseq\frac{g(0)}{0!}+\frac{g'(0)}{1!}x=1-\frac{1}{2}x \quad ⑪$$

となる。実際のペットボトルから得られる数値を代入すると,xがあまり大きくなく,tがTに近くなければ,$\frac{2Cx}{B^2}\fallingdotseq\frac{4aRx}{2HR^2}=\frac{2ax}{HR}\ll1$,つまり$\frac{2Cx}{B^2}$は0に近いので,⑪より,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Cx}{B^2}}}\fallingdotseq1-\frac{Cx}{B^2}$$

よって,

$$y'\fallingdotseq\frac{R^2x}{B^2}$$

のようにy'がxの1次式で近似されるため,yは2次関数に十分近いとみなしてよい。

また,この放物線$y=\frac{R^2}{2B^2}x^2$において,

$$b:=\frac{R^2}{2B^2}=\frac{1}{4h(t)} \quad (⑤より)$$

とおくと,水の高さとbは反比例の関係となる。

この現象のよさは,身近な題材であること,実験が容易なこと,2次関数や反比例などが登場すること,簡単に見えるが複雑さも孕んでいることなどである。このような利点から,この現象を用いることとした。

3. 指導計画

平成15年11月8日に高校数学セミナー(岐阜県教育委員会主催)において,高校1年生6名,2年生4名の計10名を対象に実践を行った。高校数学セミナーは,発展的な内容の学習を通して,数学的能力を伸ばすとともに,数学への興味・関心を高めることをねらいとしている。本授業は全6回あるセミナーのうち,第5回目にあたる。また活動時間は約3時間であった。指導計画は以下の通りである。

(1) 題材名「ペットボトルに潜む数学」

(2) 指導上の工夫

本授業はこれまでの数学の知識を活用し考察を進めるという点で,生徒による自由な活動が主体となる。自ら課題を見つけ,考察し,さらにそれを深めていく,という追究活動である。そのために,2つの工夫を行った。

まず1つ目は,活動に入る前に見通しを持たせることである。多くの生徒は自由に考えようと言われても,まず何から手をつけていいのか,どうすればいいのか悩むことが予想される。そこで,考察の前に,自己課題とその追究方法,予想を明確にすることにより,見通しが生まれスムーズに活動に取り組めると考えた。そこで,本授業では活動プリントの左上に「研究計画」を設け,見通しを持った活動が行える工夫をした。しかし,生徒の考

察は自由であることが重要なので，追及を進める上で，この「研究計画」に固執する必要は全くない。これは最初の出発点であり，自分でどんどん発展させていくことも，研究の過程において重要であるからである。

２つ目は自由に実験や観察を行えるよう，用具を教室に配置したことである。生徒の個性は多様なように，生徒の思考も多様である。一人一人が自分の課題に向かい追究するためには，実験を行う必要も出てくるだろう。そのときに，実際に様々な実験ができるような配慮をした。

また，授業の最後には追究の成果を発表する場を設けた。自らの思考を振り返ることにより，論理的考察力をさらに高め，考えを明確に述べる力を育成するためである。

(3) 授業のねらい

現実事象を数学的考察の対象と捉え，自ら課題を設定し，それを既習の知識を活用して追究する活動を通し，数学の有用性を感得し，数学への興味・関心を高めるとともに，論理的に考える力を伸ばす。

(4) 準備物

デジタルビデオ，デジタルカメラ，三脚，パソコン，ペットボトル (凹凸の少ない円柱型) などの実験用具，トレーシング紙，電卓

(5) 展開

	ねらい (○) とそのための指導援助	学習活動	留意点
つかむ	教材を提示する。 「気づくことはないだろうか」 プリントを配布する。 「調べる手順を書いてみよう」 「検証してみよう」	実験の様子を観察する。 ・水が放物線になっている。 ・水位が下がると放物線が急になる。 ・時間と共に急になっていく。 研究計画書を書く。（見通しを持つ。）	・あらかじめ用具を準備しておく。 ・数回実験を行う。 ・放物線が急であるとはどういうことか確認する。
深める	○既習の知識を活用した考察ができる。 ○考察結果を実際場面において解釈できる。	ペットボトルに潜む数学を探ろう。（個別課題） ①放物線の概形の調査 ②水位と放物線の開きの関係 ③時間と水位の関係 ④時間と放物線の関係 ⑤穴の大きさや形 ⑥穴の大きさとペットボトルの太さとの関係	・後で発表すること，グループでもいいこと，課題は発展変更可能なことを告げる。 ・検証するときは，予想を立ててから行うことを告げる。
まとめる	○自らの思考を振り返りながら考えたことを明確に述べることができる。	発表・交流 本時の感想を書く。	・発表用プリントを配布する。

4. 実践の結果とその考察

生徒の取り組みや感想を紹介するとともに，アンケート結果を参考に，本授業のねらいの達成度，及び教材の有効性について考察する。

(1) 生徒の取り組み

生徒はグループまたは個人で課題を設け，追究を行った。生徒が取り組んだ課題は，

・流れ出る水の形は放物線か探る。
・穴の大きさと放物線の関係を探る。
・水の高さと放物線の関係を探る。
・ペットボトルを傾けて水の形を調べる。
・理論と現象の一致を確かめる。
・時間と放物線の傾きの関係を探る。

である。２組の生徒の活動を簡単に紹介する。

◇１年生５名の取り組み

流れ出る水の形は放物線か，穴の大きさは関係するのか，水の高さとはどのような関係かを探った。

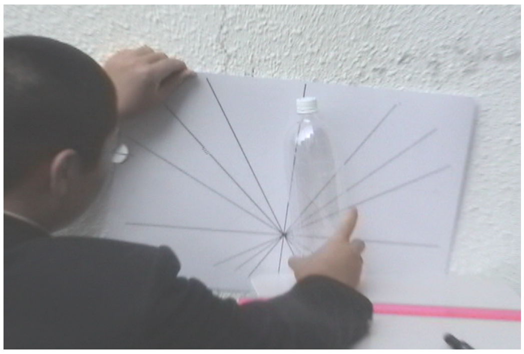
まず，流れ出る水が放物線かどうかを調べた。水の流れ出る様子をとらえた写真から，水のかたちをトレーシング紙で座標軸上に写し取り，放物線であるという予想のもとに，関数 $y = ax^2$ の定数 a を調べた。いろいろな場所における a がほぼ等しい値であったため，放物線であると判断した。その後，穴の大きさや水の深さが異なる写真を撮影し，a との関係を，グラフを作成して考察した。水の高さと a のグラフについては，さまざまな既知の関数である可能性を議論しながらも，最終的には反比例の関係であると結論付けていた。

◇２年生１名の取り組み

ペットボトルを傾けた時の飛び出る水の形に注目した。$0°$，$60°$ などいくつかの角度で実験を行い，その様子をとらえた写真をトレーシング紙で写し取って追究した。放物線と予想をしていたが，頂点が原点にないため，定数 a を調べても判断できない。そこで，変化の割合に注目し，考察を進めた。

授業の中でどの生徒もとても意欲的に活動した。普段，自由な追究ができる場はあまりないため，生徒は積極的に取り組むことができるか心配していたが，実践では非常に熱心に取り組んでいた。

(2) 活動の様子，生徒の感想



・とても楽しく出来て，最後グラフをかいて結果を見たとき，感動しました。
・自分で課題をもって動いて‥が楽しかった。時間がすごい短く感じるくらいだった。
・実際に起こる現象について，自分たちで行動して実験して，式とかも求められて楽しかった。こういう数学をたくさんやりたい！
・どんどん興味がわいてきてこの授業を受けてよかったなって思った。身近なことだけど深いところに数学が潜んでいて，もっと他のことも調べてみたいなぁって感じた。
・数学っぽく式にしたり表，グラフにしたりすることで具体的な値が出てきて，最終的には自分なりのまとめができた。数学ってすごいと思った。

(3) 本授業のねらい，及び教材の有効性

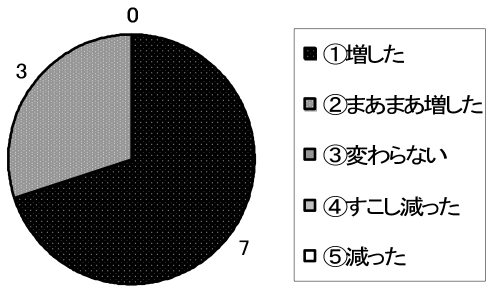
セミナーでは，授業の終わりにアンケートを実施した。その結果をもとに，本授業のねらい，及び教材の有効性について探る。

本授業のねらいについて

本授業のねらいについて考察する。

①数学への興味・関心を高める。

生徒は自ら課題を設け，積極的に活動に取り組んだ。アンケートにおいても，



今日の授業を受け，数学への興味は増しましたか。

という結果があった。つまり，このような活動が生徒の数学への興味・関心を高めるものであったといえる。

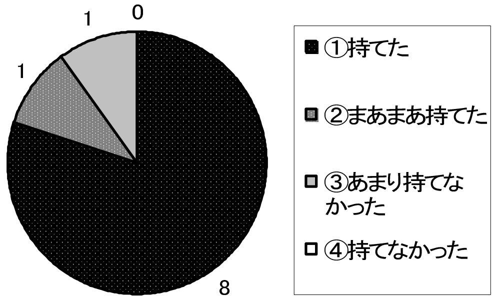
②論理的に考える力を伸ばす。

本実践では，生徒が非常に熱心に取り組んだことから，考察の時間を延長した。そのため，このねらい達成のための中心的活動であった，追求結果の発表ができなかった。したがって，生徒の論理的思考力を高めることができたか，という点については，不十分であった。しかし，一部の生徒はプリントに，はじめに，課題，解決のための方法，結果という考察の流れを明確にしてまとめていた。考察を振り返りまとめを作成することは，生徒の考えを整理するために有効である。発表を行うことによる影響については，今後の課題とする。

教材の有効性について

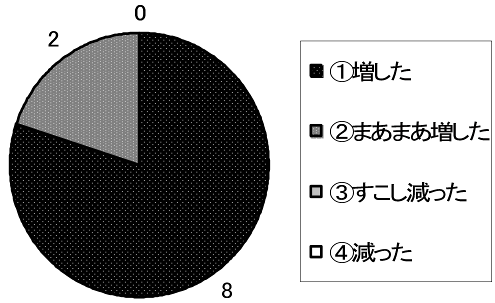
上述のように，本教材を通して，生徒は数学への興味･関心を高めた。このような数理科学的な教材については，次のようなアンケート結果も得られた。

◇題材に対する興味



授業のはじめ,「ペットボトルと水の様子」に興味を持ちましたか。

多数の生徒が導入時に興味を抱いたが，あまり持てなかったという生徒も１名みられた。



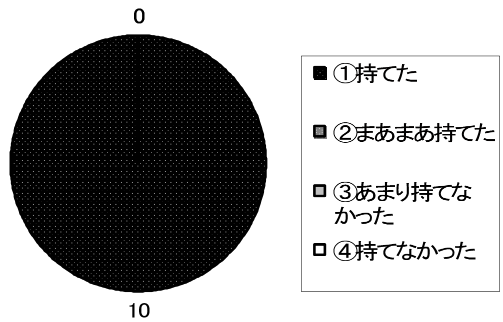
追究を進めるうちに,「ペットボトルと水に潜む数学」への興味は増しましたか。

しかし，追究を進めるうちに，全員興味が「増した」,「まあまあ増した」と回答していることから，追究を進めるほど，興味を高める題材であるといえる。導入段階で「あまり持てなかった」とする生徒もこの質問で「増した」と回答している。

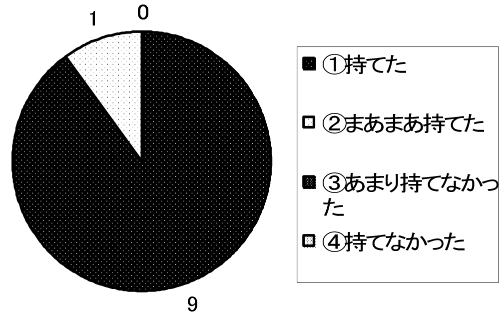
これらの結果からは，現実の事象を考えることが，生徒の興味を惹き，熱心な取り組みを生むことを示している。

◇自由な追究活動

今回のような追究活動については，次のようなアンケート結果もあった。



自分で課題を見つけ，追究していく授業は興味を持てましたか。



数学を使って現実のものを追究する活動に興味を持てましたか。

これらの結果からは，自己課題を設けて追究する授業や，現実事象を考える授業に生徒は強い興味を抱くことが分かる。

以上より，本教材は生徒が大変熱心に取り組む内容であり，学習を通して数学への興味・関心を高めるものであった。また，授業では現実事象とのつながりを感じて驚く姿もたくさん見られた。よって，このような現実事象に潜む数学を追究するという教材は，高校生にとって十分に価値があると結論づけた。

5. 今後の課題

今回は数学セミナーという特別な場で，複数の学年の生徒を対象に実践を行った。今後はさらに対象を絞り，数学Ｉの単元「２次関数」でこの教材を用いることができないかを検討していきたい。また，中学３年生を対象とした実践についても，今後検討していきたい。

引用文献

[1] 武田義章・境孝祐・新田正義・森山茂・兼房慎二・三野正洋，1991，基礎物理学，開成出版.