

## 自然現象を数学を用いて解明する発展的教材

村岡恵理<sup>1</sup>, 愛木豊彦<sup>2</sup>

近年, 文部科学省は学力向上プランなどを実施し, 少人数指導, 習熟度別指導の実施, 「総合的な学習の時間」で各学校が全体計画を作成することを規定するなど, 個々に応じた指導の場や内容の充実を図っている。岐阜県でも数学好きな小・中・高校生を対象とした「算数・数学セミナー」が平成13年度より開催されている。そのような流れを踏まえ, 数学好きな子どもが通常授業で身につけてきた基礎・基本の知識, 技能を活用して, 問題解決にあたる, といった発展的に学習できる教材の開発を目指し, 「高校数学セミナー」において実践を行った。題材として熊の生態系を扱い, これについて現象にあった数式を立てたり, 実験をしたりするなどの活動を行う。本論文では, 教材の概要及び, 高校生対象として行った実践の経過と結果を紹介する。

<キーワード> 自然現象, 数式, 実験, 高校生(数学I)

### 1. 序

算数・数学セミナーの概要を簡単に述べる。目的は, 「算数・数学に興味・関心をもつ児童生徒が, より発展的な内容を学習することにより, 個々の学力を伸ばすとともに算数・数学への興味・関心を一層高めることを図る。」ことである。よって, 本セミナーにおいては, 県内の数学好き, 数学が得意な児童, 生徒が多く参加する。今回, 高校数学セミナーで授業を行うにあたって目指したことは, 今までに学習した事柄を使って問題解決するような教材を提供することと, 身近な自然現象を取扱った問題を提示することである。その理由は, 以下の2点である。

まず, 1点目は, 数学セミナーに参加する生徒は, 皆数学が得意, もしくは数学が好きな生徒ばかりだということである。よって, 通常授業とは違った発展的な内容が望ましいと考えた。

2点目は, 数学の有用性をより感じ, 積極的に利用してもらいたいと考えたからである。

数学には, 数学それ自体を研究する分野と, 数学を用いて研究していく分野とが存在する。小, 中, 高と学ぶ数学は系統的に構成されており, どちらかといえば, 数学それ自体を学んでいく学習形態となっている。そこで, 今回参加する生徒に, 数学を用いて現象などを解明することを体験してもらい, 数学の良さや有用性をより実感してほしいと思っている。このような点から, 今回, 自然界における現象を数学を用いて説明することを授業の目的とする。

### 2. 教材の概要

本教材では, 寒いところに住む熊が大きいことを数学を用いて説明する。

19世紀半ばステン・ベルクマンによって, 「恒温動物の同じ科や属の動物の種について体の大きさを比べてみると, 失われる熱を少なくするために, 寒い所に行くほど大きくなる。」という法則が発表された。この法則の代表的な例が熊である。世界には様々な種類の熊がいるが, 一般的に寒いところにいる熊

<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部

は大きく、暑いところの熊は小さい。このことを、実験や式、相似比と表面積比、体積比の関係などによって説明する、中学生及び高校生対象の教材である。

この教材は、以下の4つの活動から構成される。

活動① 熊の体温の変化に着目し、(熱量) = (質量) × (温度変化)を元に、体温の変化についての公式を作る。

活動② 活動①で作った体温の変化の公式が現象にあっているか実験と計算を用いて確かめる。

活動③ 空間図形では、(表面積比) = (相似比)<sup>2</sup>、(体積比) = (相似比)<sup>3</sup>となることを様々な空間図形の表面積及び体積を計算することを通して理解し、それらを用いて形が相似な2匹の熊のそれぞれの体温の変化についても考察する。

活動④ 活動③を用いて、形が空間図形に比べて複雑ではあるが、相似である2匹の熊の場合についても(表面積比) = (相似比)<sup>2</sup>、(体積比) = (相似比)<sup>3</sup>となることを証明し、体温の変化について考察する。

### 3. 教材の背景

この教材の題材として扱う熊の生態系について説明する。

熊の体温の変化について、物理のエネルギーに関する法則を用いて説明する。

熊全体が、1つの物質で構成されていると考える。そして、熊を体温よりも非常に低い気温の場所に連れて行くとする。熱力学の第1法則より、物体が外部と熱および力学的に作用し合い、外部から物体に熱 $Q$ が入り、外部が物体に仕事 $W$ をした場合に、その前と後での物体の内部エネルギー $U$ の変化 $\Delta U$ は

$$\Delta U = Q + W$$

である。今、熊の体温よりも外部の気温の方が低く、熊から外部に熱が出るので、 $Q < 0$ 。また、熊の体積は変化しない、定積変化と考えると、 $W = 0$ 。よって、

$$\Delta U = Q$$

ここで、エネルギーの単位をJ、熱量の単位をcalとし、 $1\text{cal} = 4.18605\text{J}$ とすると、

$$\Delta U = 4.18605Q \quad (1)$$

熊の比熱を $c[\text{cal/g}]$ 、質量を $m[\text{g}]$ 、熊の最初の体温を $T[ ]$ 、変化後の体温を $T^0[ ]$ とすると、熊の内部エネルギーの変化は、

$$\Delta U = -4.18605mc(T - T^0) \quad (2)$$

$Q$ は、熊から外部に出た熱である。熊から出る熱は、熊の皮膚(表面)から出ると考えることができる。熊の表面積を $S[\text{cm}^2]$ とする。熊の表面積 $\Delta S$ あたり、時間 $\Delta t$ 間に出ていく熱の量を $\Delta Q$ とすると熊の表面全体 $S$ あたり時間 $t$ 間に出ていく熱 $Q$ は、

$$Q = -\frac{S}{\Delta S} \frac{t}{\Delta t} \Delta Q \quad (3)$$

ゆえに、(1)~(3)より

$$-4.18605mc(T - T^0) = -4.18605 \frac{S}{\Delta S} \frac{t}{\Delta t} \Delta Q$$

$$T - T^0 = \frac{1}{mc} \frac{S}{\Delta S} \frac{t}{\Delta t} \Delta Q$$

熊の密度を、 $k[\text{g/cm}^3]$ 、体積を $V[\text{cm}^3]$ とすると、 $m = kV$ 。よって、

$$T - T^0 = \frac{1}{kVc} \frac{S}{\Delta S} \frac{t}{\Delta t} \Delta Q$$

この式を使って、体の小さな熊と大きな熊を同時に寒いところに連れて行った場合の2匹の熊の時間 $t$ 間の体温の変化を考える。

小さな熊の表面積を $S$ 、体積を $V$ とし、大きな熊の表面積を $S'$ 、体積を $V'$ とする。今、

熊はどちらも全く同じ物質で構成されていると考えると、熊の比熱  $c$  と熊の密度  $k$  は共通である。さらに、熊の表面積  $\Delta S$  あたり、時間  $\Delta t$  間に出て行く熱の量  $\Delta Q$  も同じである。

よって、2匹の熊の体温の変化の比は、

$$\left( \begin{array}{c} \text{小さい熊の} \\ \text{体温の変化} \end{array} \right) : \left( \begin{array}{c} \text{大きい熊の} \\ \text{体温の変化} \end{array} \right) \\ = \frac{S}{V} : \frac{S'}{V'}$$

となる。

ここで、熊の形はほぼ相似であると考えられる。相似比を、 $a : b$  ( $a < b$  かつ  $a, b > 0$ ) とすると、(表面積比) = (相似比)<sup>2</sup> かつ、(体積比) = (相似比)<sup>3</sup> であるので、(小さい熊の体温の変化) : (大きい熊の体温の変化)

$$= \frac{S}{V} \cdot \frac{S'}{V'} = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^3 \cdot b^3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = b : a$$

となる。今、 $a < b$  なので、小さな熊の方が大きな熊と比べて体温の変化が大きいということになる。

以上のことから、小さな熊の方が寒さに弱いので、寒いところに行くほど熊の体は大きくなるということがいえる。よって、ステン・ベルクマンの法則は成り立つ。

#### 4. 実験方法

熊の体温は実際に測定することはできないが、お湯を使った実験によって温度変化を測定することが可能である。

200ml と 400ml のお湯 (水は 1ml=1g であり、かつ密度は、1g/cm<sup>3</sup> であるので、体積は 200cm<sup>3</sup>, 400cm<sup>3</sup> となる) の入った計量カップを空気中においた場合の温度変化を調べる。予備実験の結果から、200ml と 400ml の表面積/体積の比と、実験から得られる温度変化の比はほぼ同じになることがわかっている。その際、以下の作業④、⑤を手早くした方が実験結果がより理論値に近づく。

準備するものは、以下の4つである。

- ・ 500ml の計量カップ 2 つ (円柱に近い形)
- ・ 温度計 2 本
- ・ 熱湯に近いお湯 (90 度前後が望ましい)
- ・ ストップウォッチ 1 つ

熱湯に近いお湯を使うのは、2匹の熊を寒いところに連れて行く、つまり、体温と気温の温度差が大きい状態を作るためである。

では、実験方法を順をおって説明する。

- ① 計量カップ 2 つに、少しお湯を入れる。
- ② しばらくそのまま放置し、カップを温める。
- ③ 計量カップが温まったところ、お湯を捨て、400ml と 200ml のお湯を別々のカップに入れる。
- ④ 温度計を入れ、温度を読み取る。
- ⑤ 読み取ると同時に、ストップウォッチをスタートさせる。
- ⑥ ゆっくりお湯をかき混ぜながら 3 分間待つ。(熊の体の中では、血液が循環しているので、それと同じ状況を作るため。)
- ⑦ 3 分後、温度を測定する。

#### 5. 先行研究

現象に対して子ども達自身が式を作り出すという教材には、岩崎、愛木による「てこを用いた授業実践」([1])がある。この教材は、中学3年生を対象とした選択数学の時間での実践である。この実践から、てこのつりあいに関して公式を作ることによって、子ども達は数学の良さや有用性を感じる事が報告されている。また、近藤([2])による、数理モデルの考えを用いた実践では、「カイロの良さ」というあいまいなものを、温度、持続時間など、子ども達自身で着目する視点を考え、数式に表す(モデル化する)ことに、子ども達は意欲的に取り組んだということが発表されている。これらの先行研究を踏まえ、今回の教材では、熊の生態系を体温の変化に着目して公式に表すだけでなく、その式の妥当性を確かめるために実験を行う作業を取り入れることとした。さらに、既習の数学の知識(相

似について)を用いて、より詳しくその公式を考察し、熊の生態系について説明することとした。

#### 6. 教材のねらいとその良さ

本教材のねらいは、まず、数学の有用性を感得することである。さらに、自分で習得している数学の知識や技能を用いて、問題を発展させていく力を身につけることも、ねらいの1つである。そして、一連の作業を自分で把握でき、それらを他者へ向けて発信できる表現力をも養いたいと考える。

それらのねらいを踏まえて、教材の良さを2点述べる。まず、1点目は、「寒いところに行くほど熊が大きくなる。」という自然現象に現れる法則を、体温の変化に注目することによって数式で確かめることができ、なおかつ体験的な活動を取り入れて、実際にお湯を用いた実験によってもその式の妥当性を確かめることができる点である。式については、物理を学習した高校生であれば、容易に導き出すことができるであろう。また、中学生であっても、 $(熱量) = (質量) \times (温度変化)$  など、ある程度考えの助けとなるような式を与える、考える時間を多くとる、などの工夫をすれば、式を立てることができる。さらに、実験によって公式の妥当性を感じることができるので、数学で生態系が表せそうだという興味が強い動機付けができ、積極的に数学を用いようとする姿勢が育成できる。

2点目は、熊を空間図形に置き換えることによって、考察対象が空間図形となり、問題解決の過程において既習の学習事項が使えるようになる。従って、自分で問題を発展させて考えることが可能となる点である。熊を、生徒がよく知っている空間図形に置き換えることで、「解決できそうだ。」という思いが強くなり、自ら問題解決しようとする姿勢が生まれる。そして、「もっと複雑な図形、実際の熊に近い形ににしていけばどうなるだ

ろう。」と発展して考えることができる。体温の変化の公式に $(表面積比) = (相似比)^2$ 、 $(体積比) = (相似比)^3$ を用いれば、より正確に熊の生態系について説明できる。既習の学習事項を用い、なおかつ自分で形を複雑にしていくことで熊の生態系という自然界の現象も説明できることから、数学の有用性が感得できる。

この2点が相互に関わることで上記の教材のねらいが達成できると考えた。

#### 7. 授業のねらい

本授業は、序で述べたように、岐阜県教育委員会が行っている学力向上プランの1つである「算数・数学セミナー」の中の、高校生対象の講座全6回のうち、1回を用いて実践した。

本授業のねらいを、

- ①熊の生態系を、体温の変化に着目して数式を用いて表現することができる。
- ②実験から、公式の作成、相似を用いた考察までの流れを自分の言葉でまとめることができる。

の2点とする。

小、中、高と学ぶ数学は系統的に構成されており、どちらかといえば、数学それ自体を学んでいく学習形態となっている。そこで、今回参加する生徒に、数学を用いて現象などを解明することを体験してもらい、数学の良さや有用性をより実感してほしいと思っている。

#### 8. 授業の概要と手立て

実施日、実施場所は以下の通りである。

実施日 平成15年12月13日

場 所 岐阜大学教育学部

参加者 県内の高校1年生～2年生(13名)

授業は、次のように行った。

1. 温度変化を実験から確かめ、体温の変化と表面積、体積との関係についての式を立てる。

- (a) 寒いところに住んでいる熊の方が体が大きい法則があることを知る。(提示した目標:「ベルクマンの法則を, 数学を使って説明しよう。」)
- (b) 大小2匹の熊を寒いところに連れて行く状況を提示し, 体温の変化に着目させる。
- (c) 実際に, 計算した円柱と同じ形の計量カップを用いて, 温度変化を測定する。
- (d) 絵や図を用いて,
 

- ①熊は熱を持っている
  - ②熱は, 表面から逃げていく
  - ③熱 = 質量 × 温度 (体温) とすることを提示し, 温度変化と表面積・体積の関係に着目させる。
- (e) 以上をもとに, 熊の体温の変化の公式を作る。

2. 空間図形では, (表面積比) = (相似比)<sup>2</sup>, (体積比) = (相似比)<sup>3</sup> となることを計算を通して理解し, それを用いて形が相似な2匹の熊の, それぞれの体温の変化についても考察させる。

- (a) 熊を簡単な円柱に置き換え, 作った公式を用いて, 先ほどの計量カップに入れたお湯の温度変化を計算する。(提示した問題:「実験で使った計量カップの温度変化の比を, 式を使って計算してみよう。計量カップは, 半径が4cmです。高さは, お湯を400mlいれるとちょうど8cm, 200mlいれると4cmです。」)
- (b) 実験から得られた温度変化の比と, 計算して求めた比を比較する。
- (c) 相似な熊について考察する。(発展: 熊の模型を提示する。)
- (d) 自分達のまとめや考えを発表する。

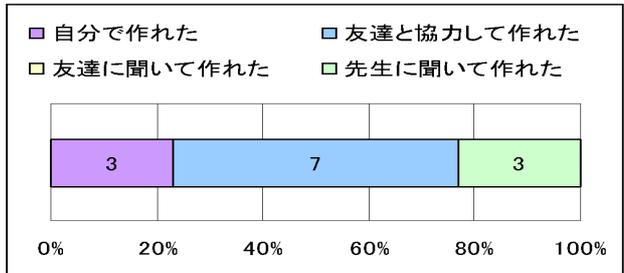
9. 生徒の活動

授業のねらいである, 現象の公式化とまとめについて, 生徒のプリントを一部紹介する。

生徒の作った公式

物理を学習済みの生徒と, そうでない生徒とに進度の開きはあったが, 全員が公式を作ることができた。(グラフ1参照)

体温の変化について公式を作ることができたか



<グラフ1>

生徒が作った公式を一部紹介する。

A

- ①時間... $t$ ,  $1\text{cm}^2$  あたり逃げる熱の量... $P$ , 表面積... $S$

$$tPS = \text{逃げた熱}$$

- ②質量... $m$ , 最初の温度... $a$ , 最後の温度... $b$

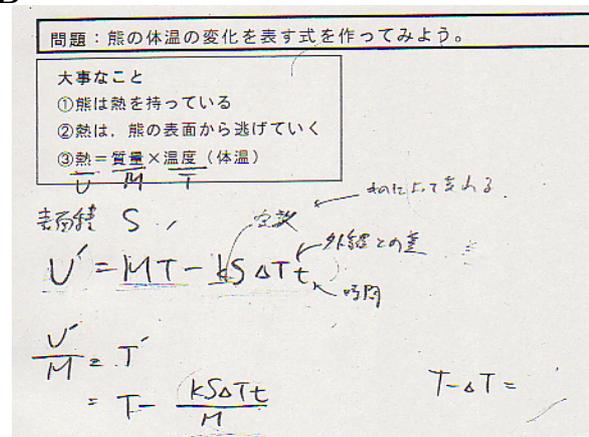
$$\text{逃げた熱} = m(a - b)$$

- ①, ②より

$$tPS = m(a - b)$$

一定の時間に  $1\text{cm}^2$  あたり逃げる熱を熊から逃げる熱の量の規準として式を作ろうとしている。

B



熊から逃げる熱を (定数) × (表面積) × (外部の気温と熊の体温の差) × (時間  $t$ ) と表現し、最初に熊が持っている熱の量から、それを引き算して考えている。

C

③熱 = 質量 × 温度 (体温)

(1: 小さい熊, 2: 大きい熊) とする

熊の表面積の比を  $S_1, S_2$ , [cm<sup>2</sup>]  
 表面積 1 [cm<sup>2</sup>] に対する逃げる熱量を  $a$ .  
 熊の質量を  $m_1$  と  $m_2$ , 始めの体温を  $T_0$  とすると

小さい熊の熱量  $Q_1$  は  $Q_1 = m_1 T_0 - a S_1$   
 大きい :  $Q_2$  は  $Q_2 = m_2 T_0 - a S_2$

よって 小さい熊の体温  $T_1$  は  $T_1 = \frac{Q_1}{m_1} = \frac{m_1 T_0 - a S_1}{m_1} = T_0 - \frac{a S_1}{m_1}$   
 大きい :  $T_2$  は  $T_2 = \frac{Q_2}{m_2} = \frac{m_2 T_0 - a S_2}{m_2} = T_0 - \frac{a S_2}{m_2}$

この生徒は、物理を学習しているので、熊の熱量  $Q$  について考え、次のような式をたてている。 $Q = mT_0 - aS$  ( $m \cdots$  質量,  $T_0 \cdots$  始めの体温,  $a \cdots$  表面積 1cm<sup>2</sup> あたり逃げる熱の量) さらに、小さい熊と大きな熊、それぞれに関する式にしている。(部分)

D

①熱 = 質量 × (始めの温度 - 後の温度)  
 ①熊が失った熱 = ②熊から逃げた熱  
 ②熱 = 表面積 × (始めの温度 - 気温)  
 質量 × (始めの温度 - 後の温度) = 表面積 × (始めの温度 - 気温)

この生徒は、熊の体温と外界の気温との差にも注目し、式を作っている。

こちらが想定していなかった、気温と熊の体温の差に注目する生徒が数人いた。また、物理を学習済みの生徒は、1時間もたたないうちに公式を作りあげた。その後、その式を用いて、実験に用いた計量カップについて温度変化を計算する作業を、進んで行った。

生徒のまとめ

A

同じ量の重し物 (ほぼ同じ密度) では、体積が大きければ大きいほど温度変化が小さくなり、体積が小さければ小さいほど温度変化が大きくなる。  
 よって、寒い地方に行くほど体積が大きくなるという、「ヘルクマスの法則」は成り立つんではないかと思う。

B

まとめ

1m<sup>2</sup> (cm<sup>2</sup>...) あたり逃げる熱 × 表面積 × 時間  
 = 質量 (始めの体温 - 後の体温)

$\frac{25}{3}\pi$

相似比が  $k$  :  $Q$  の動向がいつとすると  
 体温の変化の比は  $\frac{1}{k} = \frac{1}{a}$

$k$  が大きい方、 $Q$  が小さい方とすると  
 この式より...

$k$  の方が体温の変化が小さくなる  
 寒い地方に行くほど体積が大きくなる!

上記のように、生徒は、自分の言葉や作った式を使って「寒いところに住んでいる熊の方が体が大きい」ことをまとめた。ここでは、一部の生徒のプリントのみだが、全員のプリントを見ると、物理を学習していない生徒も、等しい関係にある量 (熱) を見つけ、質量、体積、比熱、時間、表面積などに注目して公式を作っていることがわかる。

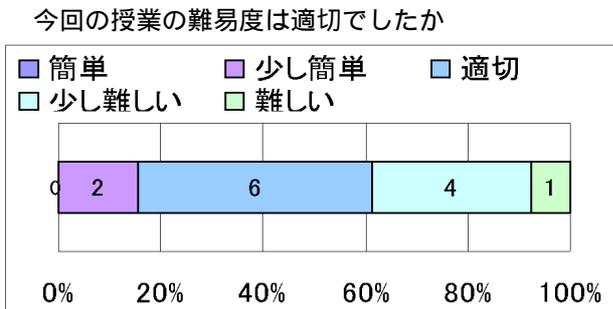
簡単な空間図形の (表面積比) = (相似比)<sup>2</sup>, (体積比) = (相似比)<sup>3</sup> をもとに、複雑な空間図形でも、同様のことが言えることを考察することに関しても、自ら相似比を設定したり、また熊の模型を簡単にしたりなど、既習の知識が使える形にして学習を進めていた

10. 授業のまとめ

授業の様子及び、授業後にとったアンケートの結果から、まとめを行う。

学年や、物理を学習しているしていない、相似な空間図形の学習の有無といった個々の学校での進捗は違ったものの、すべての生徒は、公式を作成でき、自分の言葉で考察結果

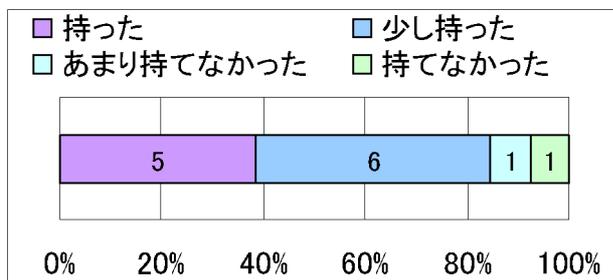
をまとめることができた。また、本授業の難易度について、以下のような調査結果となった（グラフ2参照）。



<グラフ2>

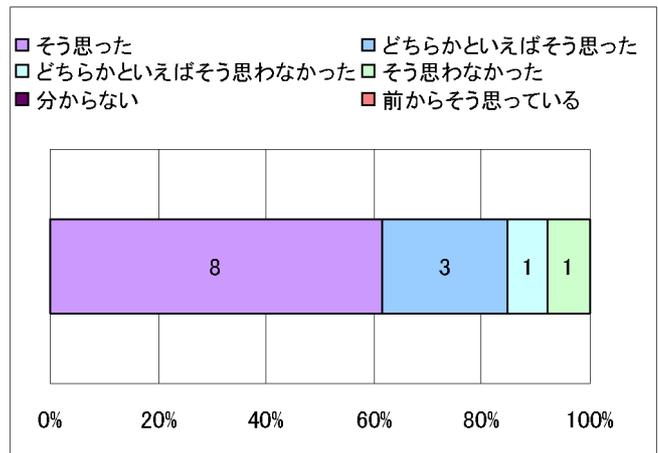
適切と答える生徒の割合がもっとも高い。また、少し難しいと答える生徒もいるが、全員が公式を作れたことや、学習の様子から、少し難しくても積極的に考えていたといえる。これは、最初に「熊の生態系を数学で説明する」といった普段の授業では扱わないような課題を提示したためだと考えられる。グラフ3から、生徒の13人中11人が、題材に「興味を持った」、「少し興味を持った」と回答している。さらに、そのような自然現象が数学で説明できることから、普段の生活や社会にでたときに、「役立つ」、「どちらかといえば役立つ」と答える生徒が多くなったといえる（グラフ4参照）。

熊のような自然の生態系を数学を用いて説明することに興味をもちましたか



<グラフ3>

数学を勉強すれば、普段の生活や社会にでたときに役立つと思いましたが



<グラフ4>

今回のような、数学好きな生徒が集まる講座において、数学を使って問題を解決できるような本教材は、次のような感想が多くあったことから、有効であったといえる。

- 今までは、こんなことは考えたことがなかったので驚きでした。今度は周りの温度との関係も調べてみたい。
- いつもは答があるものを解いているから、掘り起こすみたいなおもしろかった。
- 普通に暮らしていて、なんとなく大きい方が温度変化が少ないような気はするけれど、「なんで？」って言われると「え？」って感じだった。だから謎が解明できてうれしかった。
- 式がどんどんわかっていくうちに、温度の秘密がわかってきて、おもしろかったです。
- 物理も数学も好きなので、今日のこの課題はとても考えやすくおもしろかった。こういった、2つの教科を連合させたものも、とてもおもしろいと思った。
- 高校数学とは違い、いろいろと考えることができた。
- 今日は、考えがたくさん浮かんできて、公式も自力でつくれたのですごくうれしかった。この問いは、いろいろな要素を考えれば、どこまでも考えられる。

### 11. 今後の課題

当初は、全員が同じ進捗で順番に活動を進めていく予定であったが、生徒がどんどん自分で学習を先へ先へと進めていったので、途中から、個人学習（あるいはグループ学習）の形態となった。公式を作る時も、一人一人が時間、周りの気温、比熱などに注目し、完成へと向かうことができた。

しかし、個人で先へ進めていく形態なので、進捗に差が出たことを忘れてはならない。授業難易度を「簡単」と答える生徒はいなかったが、感想で「もっと難しい問題でもいい。」

と述べる生徒もいたことから、先へ学習を進めていける子どもへの対応、教材の再考察が、今後の課題である。

### 引用文献

- [1] 岩崎美奈, 愛木豊彦, 2002, 数理的考察のよさを味わう教材の提案, 岐阜数学教育研究, Vol.1, 54-63.
- [2] 近藤法和, 2002, モデリングの考え方を活用する授業のあり方についての一提案, 岐阜数学教育研究, Vol.1, 41-53.