

数理的考察のよさを味わう教材の提案 てこを用いた授業実践報告 II

岩崎美奈¹, 愛木豊彦²

これまで、数学の有用性や面白さを味わうことをねらいとした授業を通して、生徒の数学への興味を高めることを目的に、日常事象に現れる問題の数学による解決を目指した教材を提案してきた。本論文では、その中から「数理的考察のよさを味わう教材の提案 てこを用いた授業実践報告」(岩崎・愛木 [1]) で提案し、実践を行った教材について再考察する。前回の実践で生じた授業時における課題を分析し、それらをふまえ改良を加えて再度授業実践を行った結果を報告する。

<キーワード> 数と計算, 文字式, 一般化, 実験

1. はじめに

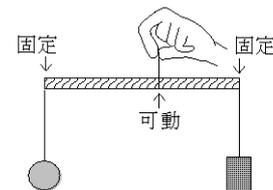
「理数科離れ」や「数学が好きな生徒は多くない」という現状の背景には、数学に興味を持ってない、役に立つと感じられない子どもたちが垣間見える。この原因の一つに、日本での数学の授業では数学と現実との関わりがあまり重視されていないことがあげられる。IEA の第 3 回国際数学・理科教育調査においても「わが国では数学が生徒や社会から離れている」「数学の授業では日常生活に関連することがらが使われることが少ない」と指摘され、「生徒が社会における数学を実感できるようにしたい」と述べられている(国立教育研究所 [2])。

このような現状に対し、生徒が数学に興味を持ち、数学は役に立つと感じるためには、日常事象の数理的考察を通して、数学の有用性や面白さを味わう授業が有効であると考えられる。なぜなら、有用性や面白さを味わうことが、数学への興味につながるからである。「数理的考察のよさを味わう教材の提案 てこを用いた授業実践報告」(岩崎・愛木 [1]) では、「てこ」に関する教材を提案した。実践では、

生徒の興味を高めることにつながったが、課題も何点が残った。そこで、前回の実践から課題点を整理し、改良を行い、再度授業実践を行った。本論文では、課題点の改良による影響を考察した。

2. 教材について

教材について簡単に説明する(詳しくは [1] を参照)。棒の両端におもりを吊り下げ、支点を動かしてつり合わせる「てこ」を考える。



棒の重さを $m\text{kg}$ 、長さを ℓm 、おもりの重さを左右各々 $a\text{kg}$ 、 $b\text{kg}$ とし、支点の位置を左から $x\text{m}$ 、重力加速度を $g\text{m/s}^2$ とする。力のモーメントを考えると、つり合う支点の位置は、次の式から求めることができる。

$$agx + \frac{x}{\ell}mg \cdot \frac{x}{2} = bg(\ell - x) + \frac{\ell - x}{\ell}mg \cdot \frac{\ell - x}{2}$$

しかし、重力加速度 g は等式の性質より両辺から消去できるため、この支点の位置は

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

モーメントを考慮しなくても，小学校理科で学習する「てこを傾げる働き」= (おもりの重さ) × (支点からの距離) を用いて求めることができる。

$$ax + \frac{x}{\ell}m \cdot \frac{x}{2} = b(\ell - x) + \frac{\ell - x}{\ell}m \cdot \frac{\ell - x}{2}$$

$$x = \frac{\ell(2b + m)}{2(a + b + m)}$$

つまり，「てこを傾げる働き」と式の展開 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の学習を終えた中学3年生にとって，支点の位置を求めることは十分に可能である。中学生でも現実の事象を厳密に追及できるのである。

この現象の特徴は，実際につり合わせるのが困難な「てこ」でも，計算で求めた位置に支点を合わせるにより，容易につり合わせることができるところである。実際の「てこ」(鉛筆などで作成可能)の支点の位置を求め，つり合わせる活動から，生徒は数学を用いることの有用性を感じることができるであろう。また，棒の長さ，重さやおもりの重さを一般的に考えることから，文字のよさの感得も可能である。

3. 前回の実践から

前回の実践で生じた課題点を整理する。

(1) 前回の実践

平成14年12月に中学校3年生17人を対象として，選択数学の時間(2時間分)において実践を行った。てこは鉛筆とたこ糸(第2時では糸)で作成し，全員が共通した計算ができるよう，棒の重さなどは等しくなるようにした。授業の流れは次の通りである。

第1時

「てこの原理」を復習した後，おもりを左右に1個と2個つけた「てこ」を提示し，支点の位置を予想した。既習の「てこ」との違いを理解した後，支点の位置を求める活動を行った。

提示教材のデータ

棒：長さ 17.6cm，重さ 4g，おもり：1個 3g

解答例

$$3x + \frac{x}{17.6} \times 4 \times \frac{x}{2} = 6(17.6 - x) + \frac{17.6 - x}{17.6} \times 4 \times \frac{17.6 - x}{2}$$

$$x = \frac{8 \times 17.6}{13} = 10.830 \dots \approx 10.8$$

第2時

前時の続きを行った。その後，公式をつくる活動を行った。

解答例

$$ax + \frac{x}{\ell}m \times \frac{x}{2} = b(\ell - x) + \frac{\ell - x}{\ell}m \times \frac{\ell - x}{2}$$

$$x = \frac{\ell(2b + m)}{2(a + b + m)}$$

第1時では事象を数理的に考察すること，第2時では公式を作る過程を体験することに重点をおき，数学の有用性やよさを感じる場となるように設定した。

以下は，実践後のアンケート結果である。

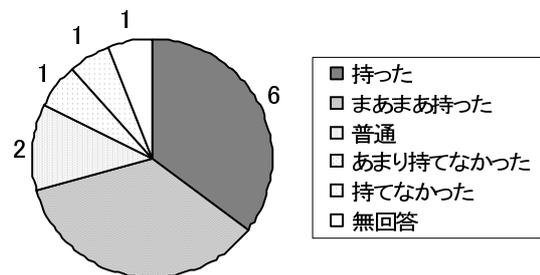


図1. てこのつり合いに興味を持ったか

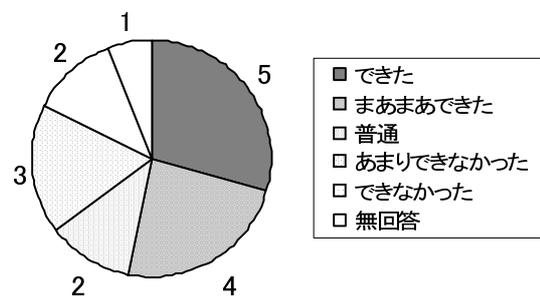


図2. つり合いの式を理解できたか

多くの生徒が「てこ」に対して興味を抱いていたが，つり合いの式への理解度は低かった。また，公式作りの活動も時間が不足し，

十分に取り組むことが出来なかった。

授業についての生徒の感想は、

- ・簡単そうだと思っていたら大間違いでした。
 - ・おもしろかったけどもうあと1時間程やりたかった。
 - ・式は作れたが計算をするのが大変だった。
 - ・立式して公式を作ることもでき面白かった。
- というように、活動自体は面白かったが計算が難しかった、時間が足りなかったなどの意見が多かった。

(2) 課題点

前回の実践での課題は、

- ①方程式が複雑
- ②時間が不足
- ③活動に自由度が低い

である。それぞれについて簡単に分析する。

①方程式が複雑

現実の事象を取り上げているため、式や計算に複雑さが伴った。具体的には、数値に小数が含まれていたこと、方程式自体が複雑であったこと、公式作りの際に文字数が多かったことが原因として考えられる。

数値については、長さ、重さの両方の値が整数となる教具の作成は困難であることから、本教材に登場したものでよいと考える。電卓を用いることで、煩雑さは解消できるのではないだろうか。

方程式については、「計算が難しかった」との感想から、中学生にとってはやや困難であったと判断する。提示教材を再検討するなど、改良が必要である。

文字数については、「文字をたくさん使ったことははじめてなので楽しかった」という感想もあったが、やはり再検討が必要である。

②時間が不足

第2時の公式作りの活動は、時間が十分になく、多くの生徒が途中で終えた。原因としては、内容が詰め込みすぎであったこと、授業展開に工夫がなかったことがある。ほとん

どの生徒が初めて取り組む「てこ」という現実の事象の考察や文字の種類が多い式の計算であったのに、課題を提示した後は生徒の自主的な取り組みに任せる、という授業展開を行ったことは反省すべきである。指導案の再検討が必要である。

③活動に自由度が低い

支点の位置を求める活動でも、公式作りの活動でも、問題解決の手段が少なかったため、生徒の活動に自由度が低かった。この点についても、検討が必要である。

前回の実践では、このような活動が生徒の興味をひくものであり、数学のよさを感じる場となることを再確認した。これらの課題を克服し、よりよい教材となることを目指していく。

4. 変更点

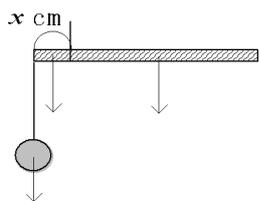
先に述べた課題の克服を目標に、3つの改良を行った。

- (i) 提示教材を両側におもりをつけた「てこ」から、片側のみにおもりをつけた「てこ」に変える。
- (ii) 前回は登場する全ての量を一般化する展開であったが、おもりの重さのみを一般化する展開に変える。
- (iii) 前回は活動の自由度が低かったが、第2時で自由な活動ができるよう授業展開を工夫する。

それぞれ変更の理由は次の通りである。

(i) 提示教材の変更(片側のみ「てこ」)

課題点①にあるように、前回扱った教材では、方程式がやや複雑であり、変数も多かった。そこで、おもりを片側のみにした「てこ」に注目した。



棒の重さを mg 、長さを $l\text{cm}$ 、おもりの重さを ag 、支点の位置を左端から $x\text{cm}$ とすると、

$$ax + \frac{x}{l}m \times \frac{x}{2} = \frac{l-x}{l}m \times \frac{l-x}{2}$$

$$x = \frac{lm}{2(a+m)}$$

という式になるので、以前に比べ、項の数や文字の種類が減り、簡単となるのである。

また、一見不思議な現象であるので、生徒の興味をひきやすく、支点の位置を求めようとする課題意識が持ちやすくなると考えた。

(ii) おもりの重さのみを一般化

前回の実践では、棒の長さ、重さ、おもりの重さなど全てを一般化する展開であった。しかし、その際に登場した文字数は多く、課題点①で述べたように生徒は困難を感じていた。そこで、棒の長さ、重さは固定し、おもりの重さのみを変化させることとした。これにより式を扱うこともかなり簡単となる。また、おもりの重さと支点の位置を関数として見る、という新しい見方もできる。課題点②の時間の不足も改善されるのではないかと考えた。

(iii) 授業展開の工夫

課題点②、③で述べたように、前回は第2時の活動に自由度が低く、時間も不足した。そこで第2時を公式を作る活動から、おもりを重くしていったときの、おもりの重さと支点の位置の関係を調べる活動とした。

この場合、おもりの重さを文字でおく、おもりを規則的に重くしていき実際に測る、前時の式にいくつか重さの数値を代入し計算で求めるなどの追究方法が考えられる。複数の手段があることにより、どのような生徒でも

自分にあった解決の手段で取り組める。また、実際に測ったり計算したりする活動を踏むことにより、文字で使うよさをより実感できることになると考えた。

5. 授業実践の概要と変更点の影響

授業実践の概要と3つの変更点の影響について述べる。

(1) 実践の概要

平成15年11月に中学校3年生2クラス(各19人)を対象とし、選択数学の時間(2時間分)において実践を行った。てこは前回と同様に作成した。授業の流れは次の通りである。

第1時

「てこ」をつり合わせる活動を通して課題意識を高め、小学校での知識をもとに方程式を立てた。その後、各自で支点の位置を計算によって求めた。

提示教材のデータ

棒：長さ 17.6cm 、重さ $4g$ 、おもり： $6g$

解答例

$$6x + 4 \times \frac{x}{17.6} \times \frac{x}{2} = 4 \times \frac{17.6-x}{17.6} \times \frac{17.6-x}{2}$$

$$x = 3.52$$

第2時

おもりを重くしていくときの支点の位置とおもりの重さの関係を、作業、実験等の活動を通して追求した。

解答例

おもりの重さを ag とすると、

$$ax + 4 \times \frac{x}{17.6} \times \frac{x}{2} = 4 \times \frac{17.6-x}{17.6} \times \frac{17.6-x}{2}$$

$$x = \frac{35.2}{a+4}$$

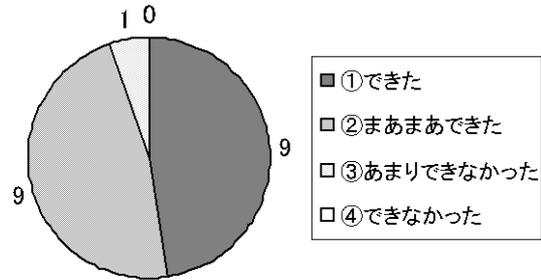
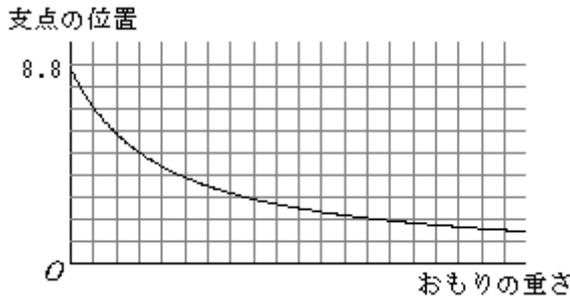


図4.関係を見つけることができましたか

第1時では「てこ」の数理の解明，第2時では作業，実験などの自由な追求に重点をおき，数学の有用性やよさを感じる場となるように設定した。

(2) 変更点の影響

(i) 提示教材の変更 (片側のみでてこ)

方程式が簡単となったことにより，8割強の生徒が15分程度で長さを求めることができた。また，下図にあるように，生徒は片側にしかおもりがない「てこ」に大変興味を抱いたようである

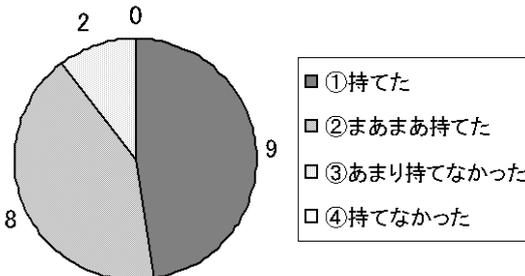


図3.てこのつり合いに興味を持ったか

また，鉛筆がつり合いに影響することに全員が気づくことができた。このことは，生徒の追究を円滑に進めることにつながった。以上より，おもりが片側のみでてこを用いるという提示教材の変更は有効であったと考える。

(ii) おもりの重さのみを一般化

おもりの重さのみを一般化したことで，第2時の活動が大きく変化した。はじめは実際におもりの数を増やして表を作る生徒が多かったが，時間が経つにつれ一般化を始め，授業終了時では多くの生徒が文字を使って関係を調べていた。生徒は文字を使うことのよさを感じつつ，抵抗なく取り組んでいた。

また，上図にあるように，多くの生徒はおもりの重さと支点の位置の関係を自分なりに見つけることができた。これは，いくつかの手段があったからこそ，多数の生徒が関係を見つけたのであろう。以下は生徒の取り組みの様子である。

Diagram labels: x cm, $(17.6-x)$, 0.2 , 0.2 , $17.6-x$, $8.8-\frac{x}{2}$.

$$0.2x + \frac{4x}{17.6} \times \frac{x}{2} = \frac{17.6-x}{17.6} \times 4 \times \frac{17.6-x}{2}$$

$$0.2x + \frac{2x^2}{8.8} = \frac{2x^2}{17.6} - \frac{70.4x}{17.6} + \frac{619.52}{17.6}$$

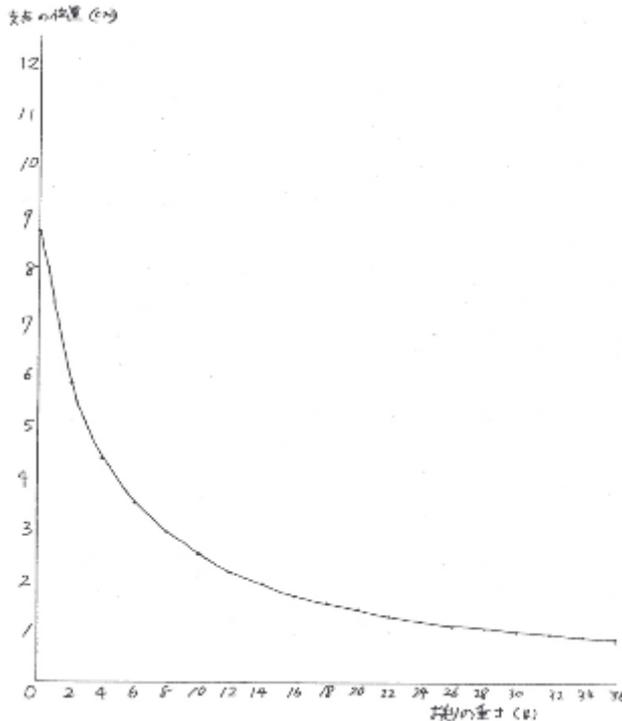
$$= \frac{x^2}{8.8} - 4x + 35.2$$

$$0.2x = -4x + 35.2$$

$$0.2x + 4x = 35.2$$

$$x(4.2) = 35.2$$

$$x = \frac{35.2}{4.2}$$



以前より時間に余裕があり、生徒が十分に考察できた。前回の実践での課題は、おもりの重さのみを一般化することにより、改善できたと考える。

(iii) 授業展開の工夫

(ii) の考察で述べたように、多数の生徒が自ら考えた方法で積極的に取り組むことができた。また、実際に長さをはかって表を作成した生徒も、後の交流で式を用いる方法を知り、式のよさを感じ取っていた。

以上より、今回の工夫は実践において大変有効であり、ねらいの達成に大きな影響を与えた。教材自体を改良し、生徒の実態に応じた指導方法の検討をすることは、とても重要である。

今後、このような教材を扱う際には、生徒にとってその学習内容は適切であるか、生徒が意欲を持って取り組むことができる内容であるか、追究する過程で数学以外の内容（理科の知識など）でつまづく場面はないか、などの教材の検討と、教師主導の一方的な授業にはならないか、課題は焦点化されているか、

生徒の実態に応じているか、などの指導案の吟味が重要である。このような教材を扱うことにより、生徒の興味や意欲を減退させては全く意味がない。適切な教材を用いた適切な指導により、数学への興味や意欲をより高めていくことが大切である。

6. 今後の課題

2度の実践を通して、日常事象に現れる問題の数学による解決を目指した教材では、教材の工夫や生徒の実態に応じた指導の工夫が非常に重要であることを痛感した。また、問題自体の難易度や教材の位置付けなど多くの課題も明らかになった。

- しかし、今回の実践での感想にも、
 - ・すごく楽しかった。またやってほしい。
 - ・数学が楽しかった。
 - ・今まで習ったはんいでも、こんな難しい関係とか見つけられることが分かった。
 - ・自分たちが今まで勉強してきた事の応用として、いろいろなことに使うことができるんだなあと思った。
 - ・時間があつたらもっともっとやりたかった。
- これを数学の式でだせるなんてすごい!!!

というものがあるように、この授業を通して、数学への興味を高める姿がうかがえた。このような教材が魅力的であると再確認できた。

今後は、今回の実践での課題点を分析し、それらを克服する手立てを考えていきたい。また、これまでは中学生を対象としてきたが、高校生にも用いることが出来ないか、検討していきたい。

最後に、授業実践にあたり、多大なご協力をいただいた北方町立北方中学校の森誠先生、植田一弥先生、生徒の皆様から感謝いたします。

引用文献

[1] 岩崎美奈・愛木豊彦, 2002, 数理的考察のよさを味わう教材の提案 てこを用

- いた授業実践報告 , 岐阜大学教育学部数学教育研究会, Vol.1, pp.54-63.
- [2] 国立教育研究所, 1997, 中学校の数学教育・理科教育の国際比較 第3回国際数学・理科教育調査報告書 , 東洋館出版社.