

## 高校数学セミナー実践報告

坪井健司<sup>1</sup>, 愛木豊彦<sup>2</sup>

学校で扱う数学の問題は全て答えが決まっている。しかし、数学の問題にはそれだけでなく、答えが無数に存在する場合や、全く存在しない場合もありうる。そこで、本論文ではこのような数学の一面を知らせ、さらに数学に対する興味関心を高めることをねらいとした、身近な現象から生じる教材の提案を行う。

<キーワード> 課題学習, 3すくみ, 関数, 一般化

### 1. 研究の意図・目的

学校で扱うような答えが決まっている問題を考えることも一つの数学である。しかし、数学はそれだけではない。数学には無数に答えがある問題や答えのない問題もあり、このような問題を考えることも一つの数学である。そこで、答えが数多く存在する問題を教材にすることにした。こうすることで、数学に対する考え方が広がり、興味関心を高めることができると考え、その題材として3すくみになる条件の考察を取り上げた。

次に、3すくみについて説明する。A, B, Cが存在したとき、AがBに勝ち、BがCに勝ち、CがAに勝つ状態を、3すくみになっているという。以下、3すくみを取りあげた理由について述べる。1つ目の理由として、ゲームや野球、じゃんけんに代表されるように3すくみは、日常に良く現れることからであることがあげられる。このことから、3すくみを身近なものとしてとらえることができ、興味関心をもって問題に取り組めるのではないかと考えた。2つ目として、3すくみになる条件は非常に多く存在することがあげられる(具体的には第3節の生徒の解答例を参照)。このことから、数学に対する考え方が広がるのではないかと考え

た。なぜなら、数学の問題の答えは一つに定まると思っている生徒が少なくない。しかし、この授業を行っていく中で、答えが一つに定まらない場合があることを知り、数学は答えが絶対に一つに定まる学問とは限らないことを知ると判断できるからである。3つ目として、3すくみの条件を求める過程において、自由な発想ができることがあげられる。これにより、独自の考えをもつことができ、独創性、創造性を高めるのに有効であると思われる。

以上に述べたことから、本論文では身近な現象における数理を考えることができ、答えが一つに定まらない教材の提案を行う。そして、研究の目的は以下のことがらを検証することである。

- ①3すくみは、高校生が興味関心を持って取り組める題材であるか。
- ②答えが一つに定まらない問題の解決過程を経験することで、数学に対する考え方が広がるか。
- ③3すくみについて考えることで、独創性、創造性を高めることができるか。

### 2. 教材について

今回の授業では、野球を例に挙げ、打力、守

<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部

備力, 投手力を数で表すことによって, 3 すくみを数学的にとらえられるようにした。ここでは, 3 すくみと順序との関係を述べた後, 授業の流れについて説明する。ある集合において関係  $\leq$  が定義されていて, 集合の各元に対して 3 条件

反射律 :  $a \leq a$

反対称律 :  $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

推移律 :  $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

が成り立っているとき, 関係  $\leq$  を順序関係という ([3])。このうち, 3 すくみは推移律を満たさないことがすぐわかる。高校では順序関係が成り立たない例として複素数の集合が取り上げられるが, 身近なところにもそのような例があることを理解させたい。授業では, 打力, 守備力, 投手力に対し, 各自演算を定義し, その結果を総合力とし, 総合力で勝敗を決めると順序関係を満たすので 3 すくみが起きないということがわかるようにした (第 3 節. 問題 1)。次に, どんな演算を施してもそうなることを, 多変数関数の記号を導入して証明を行った。この点について紹介する。なお, 関数記号  $F$  の指導については, 教科書 [1],[2] を参考にした。

### 関数の表し方

$y = 2x + 3$  を  $F(x) = 2x + 3$  とかくように  $x$  の関数を  $F(x)$  で表すことがある。

これは,  $x$  の値が決まれば  $F(x)$  の値が決まる関数である。しかし, 世の中には, 2 つ以上の値が決まって, 初めて値が決まる関数がある。このような関数を,

$F$ (変数をコンマで区切ったもの) で表す。

例えば, 縦の長さが  $x$ , 横の長さが  $y$ , 高さが  $z$  の直方体の体積を  $F(x, y, z)$  とすると,  $F(x, y, z) = xyz$  となる。

### 問題

打力を  $x$ , 守備力を  $y$ , 投手力を  $z$  で表し, 総合力が関数  $F(x, y, z)$  で表されたとする。A チーム, B チーム, C チームのそれぞれの力は, 下の表のようになっている。

総合力でチームの勝敗を決めるとき, 3 すくみが起きないことを証明しなさい。

	A	B	C
打力	$a$	$b$	$c$
守備力	$d$	$e$	$f$
投手力	$g$	$h$	$i$

### (証明)

打力を  $x$ , 守備力を  $y$ , 投手力を  $z$  で表し, 総合力が関数  $F(x, y, z)$  で表されたとする。A チーム, B チーム, C チームのそれぞれの力が  $(a, d, g), (b, e, h), (c, f, i)$  で表され, チームの勝敗が総合力によって決まるとする。ここで, 一般性を失うことなく,  $F(a, d, g) \leq F(b, e, h), F(b, e, h) \leq F(c, f, i)$  としてよい。

(1)  $F(a, d, g) < F(b, e, h)$  かつ

$F(b, e, h) < F(c, f, i)$  のとき,

$F(a, d, g) < F(b, e, h) < F(c, f, i)$  より,  
 $F(a, d, g) < F(c, f, i)$

よって, C が最も強くなり, 3 すくみにならない。

(2)  $F(a, d, g) = F(b, e, h)$  かつ

$F(b, e, h) < F(c, f, i)$  のとき,

$F(a, d, g) = F(b, e, h)$  かつ  
 $F(b, e, h) < F(c, f, i)$  より,  
 $F(a, d, g) < F(c, f, i)$

よって, C が最も強くなり, 3 すくみにならない。

(3)  $F(a, d, g) < F(b, e, h)$  かつ

$F(b, e, h) = F(c, f, i)$  のとき,

$F(a, d, g) < F(b, e, h)$  かつ  
 $F(b, e, h) = F(c, f, i)$  より,  
 $F(a, d, g) < F(c, f, i)$

よって, B, C が最も強くなり, 3 すくみにならない。

(4)  $F(a, d, g) = F(b, e, h)$  かつ

$F(b, e, h) = F(c, f, i)$  のとき,

$F(a, d, g) = F(b, e, h)$  かつ

$F(b, e, h) = F(c, f, i)$  より,

$F(a, d, g) = F(b, e, h) = F(c, f, i)$

よって、全て引き分けになり、3すくみにならない。(証明終)

簡単に述べると  $F$  のとる値が実数であり、実数には順序が定義されているので3すくみにはならない、ということである。

こうして、総合力で判断した場合、3すくみが起こらないことを確かめ、どうすれば3すくみが起こるのかを考えることにした。はじめは打力、守備力、投手力の3成分を与え、条件を求めることとした。この場合に3すくみになる条件を求めることができたなら、投手力を考えない2成分で3すくみが起きる条件を求めることにした。

### 3. 実践と成果

平成15年10月11日に、高校生13人を対象に高校数学セミナー(岐阜県教育委員会主催)の一環として実践を行った。

以下、今回用いた問題、課題、課題に対する生徒の答えを紹介する。

#### 問題1

今、3つの野球チームA,B,Cがある。それぞれのチームの打力、守備力、投手力は下の表のようになっている。総合力でチームの勝敗を比べるとき、最も強いチームは決まるだろうか。総合力の求め方を色々と考えて、強さを比較しなさい。

	A	B	C
打力	5	7	11
守備力	3	4	5
投手力	2	3	6

生徒の解答1.

総合力 = 打力 + 守備力 + 投手力

Aの総合力 =  $5 + 3 + 2 = 10$

Bの総合力 =  $7 + 4 + 3 = 14$

Cの総合力 =  $11 + 5 + 6 = 22$

Cの総合力が一番高い。

生徒の解答2.

総合力 = 打力 × 守備力 × 投手力

Aの総合力 =  $5 \times 3 \times 2 = 30$

Bの総合力 =  $7 \times 4 \times 3 = 84$

Cの総合力 =  $11 \times 5 \times 6 = 330$

Cの総合力が一番高い。

生徒の解答3.

総合力 =  $\frac{\text{守備力} - \text{投手力}}{\text{打力}}$

Aの総合力 =  $\frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$

Bの総合力 =  $\frac{4 - 3}{7} = \frac{1}{7}$

Cの総合力 =  $\frac{5 - 6}{11} = \frac{-1}{11}$

Aの総合力が一番高い。

#### 問題2

縦の長さが  $x$ 、横の長さが  $y$ 、高さが  $z$  の直方体の表面積を  $F(x, y, z)$  とするとき、 $F(x, y, z)$  を  $x, y, z$  を用いた式で表しなさい。

#### 問題3

打力を  $x$ 、守備力を  $y$ 、投手力を  $z$  で表し、総合力が関数  $F(x, y, z)$  で表されたとする。Aチーム、Bチーム、Cチームのそれぞれの力は、下の表のようになっている。総合力でチームの勝敗を決めるとき、3すくみが起きないことを証明しなさい。

	A	B	C
打力	$a$	$b$	$c$
守備力	$d$	$e$	$f$
投手力	$g$	$h$	$i$

#### 課題

各チームの勝敗をどのようにして決めれば3すくみは起こるだろうか。3すくみになる条件を数式を使って表してみよう。

(1)3成分が与えられた場合

生徒の解答 1.

	A	B	C
打力	3	5	7
守備力	5	7	3
投手力	7	3	5

A,B,Cチームのそれぞれの力を左の図のようにする。

打撃力, 守備力, 投手力のそれぞれの数値を比べる。このとき, 2つ以上の力が相手より上ならばそのチームの勝ちとする。

A 対 B

打力:  $3 < 5$  守備力:  $5 < 7$  投手力:  $7 > 3$  によって, B の勝ち。

B 対 C

打力:  $5 < 7$  守備力:  $7 > 3$  投手力:  $3 < 5$  によって, C の勝ち。

C 対 A

打力:  $7 > 3$  守備力:  $3 < 5$  投手力:  $5 < 7$  によって, A の勝ち。

ゆえに, この場合 3 すくみが起きる。

生徒の解答 2.

	A	B	C
打力	1	2	4
守備力	3	4	2
投手力	9	6	1

(Aの力の最大値) - (Bの力の最大値) =  $a > 0$  とし,

$0 \leq a \leq$  (Bの力の最大値) なら B の勝ち

(Bの力の最大値)  $\leq a \leq$  (Aの力の最大値) なら A の勝ちと定義する。

上の表から

A 対 B  $9 - 6 = 3$   $0 \leq 3 \leq 6$  によって, B の勝ち。

B 対 C  $6 - 4 = 2$   $0 \leq 2 \leq 4$  によって, C の勝ち。

C 対 A  $9 - 4 = 5$   $4 \leq 5 \leq 9$  によって, A の勝ち。

ゆえに, 3 すくみが起きる。

(2)2成分が与えられた場合

生徒の解答 1.

	A	B	C
打力	1	2	3
守備力	-3	1	-2

数値を上のようにする。

勝敗の決め方を, 打力, 守備力, 打力と守備力の和の絶対値の大きさを比べて大きい方が勝ちとして, 2つ以上勝ったほうを勝者とする。

A 対 B

打力  $|1|$  と  $|2|$  で B の勝ち。

守備力  $|-3|$  と  $|1|$  で A の勝ち。

打力+守備力  $|1-3|$  と  $|2+1|$  で B の勝ち。 によって, B の勝ち。

B 対 C

打力  $|2|$  と  $|3|$  で C の勝ち。

守備力  $|1|$  と  $|-2|$  で C の勝ち。

打力+守備力  $|2+1|$  と  $|3-2|$  で B の勝ち。 によって, C の勝ち。

C 対 A

打力  $|1|$  と  $|3|$  で C の勝ち。

守備力  $|-3|$  と  $|-2|$  で A の勝ち。

打力+守備力  $|1-3|$  と  $|3-2|$  で A の勝ち。 によって, A の勝ち。

ゆえに, 3 すくみが起きる。

生徒の解答 2.

	A	B	C
打力	1	3	2
守備力	9	1	5

数値を上の方の表のようにする。

勝敗の決め方を, 打力と守備力がともに相手より大きかったらそのチームの勝ち。どちらかが勝ち, どちらかが負けている場合は, 得点を考える。得点の定め方は, 打力が勝っているチームは相手との差を  $n$  としたときの  $3^n$  とする。守備力が勝っているチームは相手との差  $m$  を得点とする。そして,  $m$  と  $3^n$  を比較して大きい方が勝ちとする。

A 対 B

打力は B の勝ち, 守備力は A の勝ち。

A の得点は  $9 - 1 = 8$  点

Bの得点は  $3^{3-1} = 9$  点

よって、Bの勝ち。

B対C

打力はBの勝ち、守備力はCの勝ち。

Bの得点は  $3^{3-2} = 3$  点

Cの得点は  $5 - 1 = 4$  点

よって、Cの勝ち。

C対A

打力はCの勝ち、守備力は、Aの勝ち。

Aの得点は  $9 - 5 = 4$  点

Cの得点は  $3^{2-1} = 3$  点

よって、Aの勝ち。

よって、3すくみが起きる。

#### 4. 考察と今後の課題

##### 4.1. アンケート結果

1. 新しい数学を発見できましたか。それはどういうところですか。

- ・日常的な出来事を数学的に一般化すること。
- ・今までの知識を組み合わせればわかる問題もあった。どんな問題でもまず試すことが大切だと思った。
- ・幅広い見方や予想が考えられて良かった。
- ・3すくみを関数を使って表せることを知った。

- ・3すくみを使った数学。
- ・3すくみの不思議が分かった気がする。
- ・学校で学ぶ数学が数学の全てでなく自分で条件を考えたり、何通りもの答えがあるものも楽しい数学だと発見できた。
- ・数値を考えるだけでなく、じゃんけんや野球のようなものまで数学を使ってできることにはとても驚かされた。

- ・発見したというより、見せつけられた。
  - ・単純なことほど見つけづらいところ。
2. 関数を使うと便利だと思うときはどんなときですか。

- ・具体化されていない数を扱うとき。
- ・式を立てるだけで解ける。

- ・どんな数を入れてもできる。
  - ・複数の場合を想定して考えるときには、とてもはやく考えることができると思う。
  - ・計算が面倒なとき。
  - ・図形にも使えていい。
3. 感想を自由に書いてください。
- ・もっと多くのことを知りたい。
  - ・数学が面白い。いっぱい問題を解いて、いろいろと解けるようになりたい。
  - ・難しくて分からないことが多いがチャレンジしたい。
  - ・3すくみの関係を初めて考えて、とても面白かった。
  - ・発想の転換が大事だと思った。
  - ・解く数学ではなくひらめく数学ができてとても面白かった。
  - ・楽しく結果を出すことができたので良かった。

- ・当たり前のことなのに、それを証明しようと思ってもできない。本当に数学は難しいものだと思う。
- ・自分でいろいろ考えて、規則を見つけていくのが、楽しかった。
- ・3すくみになる条件を見つけ出すことは容易ではないと思った。このような問題は趣味として面白くていいなと思った。

##### 4.2. 研究目的の考察

研究目的に対し、授業の様子、授業後のアンケートをもとに考察を行う。

①3すくみは、高校生が興味関心を持って取り組める題材であるか。

「日常的な出来事を数学的に一般化すること、じゃんけんや野球のようなものまで数学を使ってできることにはとても驚かされた。」という感想から数学が身近にあることを知り、数学に対する興味関心を高めることができたと思う。

②答えが一つに定まらない問題の解決過程を経験することで、数学に対する考え方が広がるか。

「学校で学ぶ数学が数学の全てでなく自分で条件を考えたり、何通りもの答えがあるものも楽しい数学だと発見できた。」という感想から、数学の中にもいくつもの答えが存在する問題があることを知ることで、数学は限られた答えを求めるための学問ではないことを知ったと判断できる。

③3すくみについて考えることで、独創性、創造性を高めることができるか。

生徒が様々な方法で、3すくみになる条件を求めていたこと、及び、「解く数学ではなく、ひらめく数学ができてとても面白かった。」という感想から独創性、創造性を高められるといえる。これらの点で、ねらいを達成できたと考ええる。

#### 4.3. 今後の課題

研究目的は達成できたが、課題も多く残った。総合力では3すくみが起きないことの証明を考えるときに説明が不十分であった。なぜなら、授業において証明の途中で混乱が起きてしまい、生徒がどうすればよいか分からなくなり、集中力がなくなってしまう姿が見られたからである。当初、課題追究の場面に

おいて、2成分では3すくみは作れないであろうと思っていた。しかし、授業の中で2成分でも3すくみを作る方法を発見した生徒がいた。このことから、教材研究が不十分であったといえる。そこで、今度は、自然な流れで3すくみが起きないことの証明が考えられるようにし、2成分が与えられたとき、どのようにして、3すくみをつくることができるかを考えるとともに、4すくみ以上のすくみ現象を作るにはどうすれば良いかを考え教材化していきたい。

最後に、授業実践にあたり、多大な御協力をいただいた岐阜県教育委員会の皆様、及び参加して下さった高校生の皆様に感謝いたします。

#### 引用文献

- [1] 大矢雅則・岡部恒治ほか13名, 2002, 新編数学I, 数研出版.
- [2] 中井三留, 1999, 微分法と積分法, 学術図書出版社.
- [3] 内田伏一, 2000, 集合と位相, 裳華房.