岐阜数学教育研究
2003,Vol. 2, 32-40

身近な現象を考察する課題学習教材

村岡恵理[1]，愛木豊彦[2]

近年問題にされている数学離れは，子ども達が算数・数学の良さを感得できれば，克服できるであろう。そのために，既習内容をもとに問題を解決していく活動を多く取り入れることによって，数学の有用性を感じることができると考えた。今回は，物体の落下現象を数学的に考察するという関数領域における発展的な課題学習用の教材を開発した。その教材を，選択数学の時間において実践した結果について報告する。

＜キーワード＞数学の有用性，落下現象，発展的な学習，課題学習，選択数学

1. はじめに

教育の大きな目標は，豊かな人間性や社会性を身につけ，主体的な学びの力を発揮できる，などといったこれからの社会で生きていく為の能力を身につけた子ども達を育成することである。

数学を学ぶことは，

1. 実用的価値：生活にも，科学にも有用な道具である。
2. 陶冶的価値：合理的な思考方法・思考態度の育成に役立つ。
3. 文化的価値：数学は最も古く，いまも発展している文化である。
4. 社会的価値：数学は言語同様，有用な社会的交流の手段である。

などの点から（数学教育学研究会 [1]），子ども達の成長において欠くことのできないものの１つである。しかし，近年では数学離れが問題視されている。国際教育到達度評価学会（IEA）が行った国際数学教育調査の結果から（国立教育研究所 [2]，数学教育学研究会 [3]），日本の子ども達は，国際的に成績上位に位置しながら，数学を好きだと感じる割合は下位に属している。

数学は体系的に学び，身につけた知識・技能を基盤としてさらに学習を進めていく系統的な学問である。よって，既習の内容をもとに考えることができ，必要な知識・技能を活用できる教材を提供すれば，数学の有用性を感得でき，数学離れを食い止めることができると考えた。

2. 開発した教材

教材開発にあたって目指したことは，子ども達が問題解決に取り組む際に，身につけた既習の数学的能力から必要な知識・技能を選択できるようにすることである。学習指導要領 [4] では，内容を基礎的・基本的なものに厳選しており，そのため子ども達の普段の学習では，理想化された事象を扱うことが多い。よって，普段の教科学習によって身につけた基礎・基本の能力を活用し，理想化されていない現実の事象に対して考察し，何らかの予想を立てて検証を行う教材が望ましいと考えた。

上記の理由により，物体の落下現象に対して考察する教材を開発した。物体の落下について考えていくことは一見理科の内容に見えるが，数学の知識がなければ落下という現象を簡潔に表現したり，予想を立てて検証する

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

などといった考察は難しい。しかも，中学生で学習する知識・技能で十分考察可能である。(3節に詳しく述べる。)

教材は，大きく分けて次の2つの構成とする。

内容① ある高さからの物体の落下する距離と時間の表を提示し，そこから表にはない高さから落下させた場合の地面までの到着時間を予想する。

内容②底面積の違う物体を落下させた際の落下距離と時間の表を提示し，そこからどんなことが言えるか考察し，既習事項をもとに検証する。

この教材で提示する表は，伴って変わる2量のうち，どちらをxとし，どちらをyとするか，といった独立変数・従属変数の指示はしない。子ども達自身に，距離で変化を考えるのか，時間で考えるのか，その点も考えさせたかったからである。

3. 教材観

2次関数の例としてよく教科書でも扱われているものに，斜面上での物体の転がり方と物体の落下がある。斜面上での物体の運動について，転がる距離と時間の関係が2次関数にならないことは既に長崎 [5] が指摘している。物体落下も同様に，実際に物を落下させた場合，落下距離と落下時間の2量の関係は2次関数にはならない。空気抵抗によって途中からほぼ等速運動となるからである。このことを，運動方程式を用いて解説する。

落下する物体の質量をm，時刻をtととする。$t=0$のときの物体の位置を0として，そこから鉛直下向きに動いた物体の位置をxとする。落下速度をvとする。このとき，物体は風のない空気中を粘性抵抗$-bv$（bは粘性抵抗の係数，$b>0$）を受けながら落下していくとする。この質量mの物体が，時刻$t=0$で静止していたとする。この物体がその後落下していく際の，鉛直下方への落下の運動方程式をたてる。物体に働く力は下向きに重力mg（gは重力加速度），上向きに粘性抵抗bvなので，合力は$F=mg-bv$である。明らかに$F=mg-bv>0$となる。よって，ニュートンの運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-bv>0$$

となる。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$$

より,

$$m\frac{dv}{dt}=mg-bv$$

となる。

$$mg-bv>0$$

より,

$$\frac{1}{\frac{mg}{b}-v}\frac{dv}{dt}=\frac{b}{m}$$

両辺をtについて積分すると，置換積分の公式から,

$$\int\frac{1}{\frac{mg}{b}-v(t)}\frac{dv}{dt}dt=\int\frac{b}{m}dt$$

$$\int\frac{1}{\frac{mg}{b}-v(t)}dv=\int\frac{b}{m}dt$$

$$-\log\left[\frac{mg}{b}-v(t)\right]=\frac{b}{m}t+C$$

Cは積分定数とする。次に，$C'=e^{-C}$とおくと,

$$|\frac{mg}{b}-v(t)|=e^{\frac{b}{m}t-C}$$

$$|\frac{mg}{b}-v(t)|=e^{-\frac{b}{m}t}C'$$

ここで,

$$\frac{mg}{b}-v(t)>0$$

なので,

$$\frac{mg}{b}-v(t)=e^{-\frac{b}{m}t}C'$$

また，$t=0$のとき，$v(t)=0$なので,

$$\frac{mg}{b}=C'$$

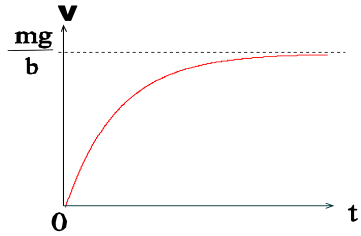
よって，

$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

となる。従って，

$$t \longrightarrow \infty \text{ のとき}, v(t) \longrightarrow \frac{mg}{b} \text{である。}$$

この v をグラフで表すと，次のようになる。



〈グラフ 1〉

このように，落下速度は，t が小さいときは時間とほぼ 1 次関数の関係にあるが，途中から，$\frac{mg}{b}$ に近づいていく。この最終的な速度を終端速度という。従って，落下距離と落下時間の関係は 2 次関数ではなく，途中からほぼ 1 次関数の関係に近づいていくといえる。

この現象に対して，2 節で述べた 2 つの教材を開発したわけだが，学習過程において，どんな既習事項が使えるのかを述べることにする。

まず，内容①についてだが，これは落下距離と落下時間の 2 量に対して変化の割合，単位量あたりの考えを用いて考察すれば，容易にその関係は 1 次関数に近づいていくことがわかる。ほぼ 1 次関数とみなすことができれば，例えばグラフを延ばす，式を立て値を代入する，といった方法で，表にはない落下時間が予測可能となる。つまり，「1 次関数」まで学習済みであれば考察可能である。

次に，内容②については，2 次関数まで学習済みであれば，より多様な考え方が導き出される。例えば，空気抵抗が少なくなれば落下距離と落下時間の関係が 2 次関数に近づいていくことを検証することができる。落下距離と落下時間のグラフを描き，最も空気抵抗が少なくなるグラフの近似曲線を描いて検証する。2 次関数の式をたて，そこに値を代入して，実際の値との差を検証するなどの方法が可能である。

その他にも，落下距離を一定とした場合，落下時間や落下速度と底面積などの別の伴って変わる 2 量に着目することも可能である。よって，中学の関数の学習を一通り終えた中学 3 年生であれば今までに身につけた基礎・基本となる知識・技能を活用して，十分検証可能な教材であると言える。

さらには，速さが変化していくことにも注目すれば，高等学校で学習する微分の考え方にもつながる。

4. 授業方法

この教材を，以下の要領で実践した。

講座名 「みんなでガリレオ」
実施日 平成 15 年 1 月 16 日，31 日
場　所 千葉大学附属中学校
参加者 中学 3 年生（15 名）

主な授業の流れは次の通りである。

1. 「落下距離と落下時間」の表を提示。表にはない高さから落下させた場合の落下時間を予測する。
   (a) 直径 15cm の筒が 5 階の高さから落下する映像を提示し，落下の様子を実感させる。
   (b) 5 階の高さからの「落下距離と落下時間」の表を提示。（落下距離は，5 階を 0m とし，その後階ごとに距離を測定したもの。）
   (c) 表をもとに，既習事項を活用して 7 階からの予想時間を計算する。
2. 筒の直径を小さくしていった際の「落下距離と落下時間」の表を提示。表からどんなことが言えるか検証する。

(a) 1時間目に提示した直径15cmの筒を，2.5cmずつ細くしていった六つの筒を見せる。

(b) その筒を7階から落下させた時の，「落下距離と落下時間」の表を提示する。

(c) 表から，自分達で伴って変わる2量を見つけ出し，どんな関係があるといえるか，既習事項をもとに検証する。

1. を1時間目に行い，2. を2時間目に行った。

今回は，子どもに考えの方向を具体的に提示してしまうのではなく，それぞれが自分の中に「どんな関係があるだろうか。」という問いを持ち，それを解決するための試行錯誤を行い，多様な考え方を導き出すことを望んでいる。そこで，2時間目の課題は個人追求では解決が難しいと考え，1時間目に行った追求の根拠に従ってグループ分けを行い，グループ活動によって課題を追求していくこととした。

グループ活動には，次のような良さがあると考えている。グループ追求を行うことで，自己の考えの見直しや，使った根拠の確認ができ，さらに互いの考えのよさを認め合ったり，違いを感じることで，考えの融合と成長が図れると考えている。よって，自己評価の手段ともなり得るであろう。

5. 選択数学

選択数学について学習指導要領 [4] の記述は，以下のようになっている。

通常の教科内容その他の内容で，課題学習，作業，実験，調査，補充的な学習，発展的な学習などの学習活動を行うこと，そして，生徒の特性等に応じたような学習活動が展開できるよう各学校において適切に工夫して取り扱うもの，としている。

今回の実践を行った選択数学のクラスは，数学を得意としている子どもが多い。よって，課題学習・発展的な学習として，この教材を実践することは可能だと判断した。

本実践は，選択数学での学習活動の一例として挙げられている課題学習といえる。落下という身近な現象を取り上げていること，現実の事象を検証する過程において数学を思考の道具として使うこと，その際，どんな数学的知識が必要か子どもが自分で考えて学習を進めていかなければならないことから，[4] で示されている課題学習のねらいと一致するからである。また，具体的な事象の考察から何らかの規則性を発見していくという点から，関数領域の発展的な学習ともいえる。

6. 子どもの活動

子どもの活動の様子を，1時間目と2時間目に分けて紹介する。

6.1. 1時間目

次は，生徒に提示した，筒の5階からの落下距離と落下時間の表である。

落下距離（m）	0	3.5	7	10.5	15
筒の落ちる時間（秒）	0	1.03	1.72	2.39	3.29

〈表1　落下距離と落下時間の関係〉

落下距離は，落下させる5階を0mとして，そこから4階・3階・2階・1階（地面）までの距離とした。5階から2階まで階ごとの距離は同じ3.5mだが，2階から1階は，地面までの距離となるので4.5mである。

1時間目の子ども達の考えを，どの既習事項をもとにしているかまとめて紹介する。

I. 階ごとにかかった時間の増加分を調べた。（任意単位量あたり）(6名)

(a) 値を数字で予想できた。(4名)

i. 4階以降3.5mあたり平均0.69秒（または0.7）で落下していることに気づく。(3名)

ii. グラフで考えた。(グラフ上ではおおよその値を予想できた。)(1 名)

(b) 予想までたどりつかなかった。(2 名)

i. 3.5m あたりにかかった時間が最初とその後で違うことに迷った。(1 名)

ii. 途中である。(式を作ろうとしている。)(1 名)

II. 1m あたりの時間を出す。(普遍単位量あたり)(2 名)

(a) 値を数字で予想できた。(1 名)

i. 全体の距離を時間で割って 1m あたりの時間を出し，予想する。(1 名)
(A)$22 \times 0.2 = 4.4$ 秒
7 階から地面までの距離 22m にかけている。
(B)$18.5 \times 0.2 + 1.03 = 4.75$ 秒
7 階から 6 階は，5 階から 4 階と同じように落下時間が遅いと考える。
さらに，その後，文字式を用い，一般化している。
(A)$0.2a$
(B)$1.03 + 0.2(a - 3.5)$

(b) 予想までたどりつかなかった。(1 名)

i. 階ごと（3.5m ごと）の時間をもとめ，そこから 1m あたりを出す。(1 名)

III. 落下速度を計算する。(普遍単位量あたり)(3 名)

(a) 予想したが，数字化していない。(3 名)

i. 落下速度のグラフを描く。(階ごとの落下速度を出す。)(3 名)

IV. 平均落下速度と，1m あたりの時間の 2 つの方法で考える。(2 名)

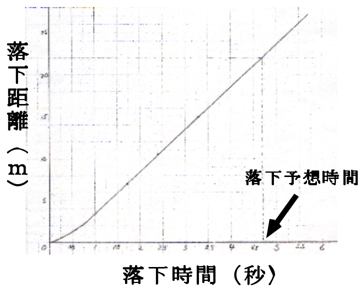
(a) 予想までたどりつかなかった。(2 名)
・落下速度については，2 人とも，5 階からそれぞれの階までの距離をかかった時間で割って，平均速度を求めた。

i. 平均速度を出した後，平均の 1m あたりの時間を出し，約 0.25 秒と考える。(1 名)
(プリントより)
・落下距離と速さは比例になると予想。式を出そうとするが定数が求められない。
式:時間 $= 1/2 \times$ 落下距離 $\times$ 定数

ii. 時間と落下距離でのグラフを描くが予想できなかった。(1 名)
(プリントより)
・落下速度の差を出すが，予想まで至らず。その後，提示した表をグラフに直すが，すべて直線で結び，なぜ原点を通るグラフにならないのかに悩む。

V. 階ごとの時間のグラフから予想する。(2 名)

(a) グラフ上で予想できた。(2 名)
・5 階から 4 階は，2 次関数と考え曲線で結び，その先は直線にする。(グラフ 2 参照)



[グラフ 2]

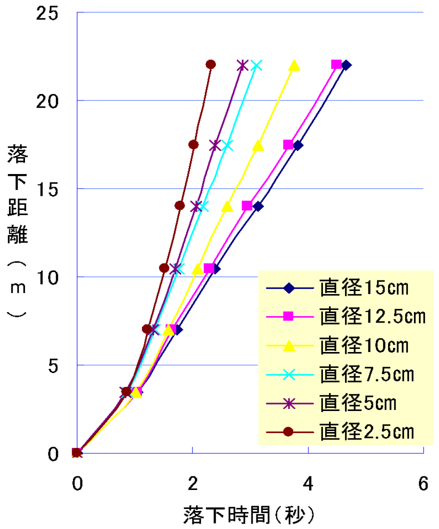
6.2.　2 時間目

表 2 は，子ども達に提示した 7 階からの落下距離と時間の表である。

落下距離（m）	0	3.5	7	10.5	14	17.5	22
直径 15	0	1.03	1.73	2.4	3.13	3.83	4.66
直径 12.5	0	1.03	1.63	2.3	2.97	3.67	4.5
直径 10	0	1	1.57	2.1	2.6	3.13	3.76
直径 7.5	0	0.87	1.34	1.77	2.17	2.6	3.1
直径 5	0	0.83	1.3	1.7	2.07	2.4	2.87
直径 2.5	0	0.87	1.23	1.53	1.8	2.03	2.33

[表 2]

この表をグラフにすると，次のグラフ 3 のようになる。



[グラフ 3]

では，生徒が注目した点，考察方法などをグループごとにまとめる。

1 班 ◯ 全体の平均落下速度と底面積
- 比で考える。
- 倍数で考える。
- 差で考える。

2 班 ◯ グラフ
- 全員で表をグラフにし，そこから「直径が大きいほどグラフが開く」,「スピードが遅くなる。」と考察した。

3 班 ◯ グラフ
- 2 次関数から 1 次関数への変化が，直径が小さい方が遅いことに気づいた。

◯ 落下距離ごとの時間
- 直径が小さい程落下速度は速いと考え，その後抵抗の変化に注目した。

◯ 落下距離ごとの速度
- 表を書いて検証しようとする。

4 班 ◯ グラフ
- 筒のグラフ同士の幅に注目した。

◯ 直径の差と，1m あたりの時間の差

7. アンケートの分析

今回は，1 時間目には感想を書いてもらい，2 時間目にはアンケートを取った。そこから，子ども達が本教材に対してどのように感じたのかを分析する。

まず，1 時間目の活動について，7 階からの落下という表にはない値を予想できた子どもとできていない子どもの感想をいくつか取り上げ，その相違点を述べる。

予想できた子ども

- 2 次関数かな，と思ったが，2 乗しても定数が求められなかった。1 次関数で考えたら上手くいったので驚いた。
- 距離と時間では 1 次関数であるようで混乱した。変化の割合がわかれば求められた。
- 比例するはずがないと思ったが，比例するような形になった。若干苦戦したが，結局は比例の形で考えた。

- 今まで習ったことをいろいろ使った。点を結ぶと一直線上にならんだ。原点を通らなかったので，そこはどうなっていたのかわからなかったので曲線で結んだ。なぜそこだけ2次関数になったのかはわからなかった。
- 一見簡単そうだったが，同じ間隔で落下していなかったので，難しかった。
- なぜグラフが途中から直線になるのかよくわからなかった。

予想できなかった子ども

- 0m〜3.5mのところでの増え方と，その後3.5mごとの増え方が違っているのがなぜか考えていたら，深みにはまってしまった。どうして2次関数にならないのかとても不思議だった。
- まさか，そうだとは思わなかった。当て外れだった。もうちょっと考えたかった。
- はじめは，規則性が簡単に見つかると思ったが，速さの変化が不規則で困ってしまった。
- あまりいい考えが浮かばなかった。なぜ2次関数にならないのだろう。

6節で紹介したように，2次関数ではないと感じると，1次関数や比例の関係になると考えて既習事項を使って予想していった。実際に測定した実験データであるため誤差が生じている。感想から，値のずれを四捨五入したりグラフを描く際にほぼどの点も通るように直線を書くなど，概数で考えた子どもは予想できたことがわかる。誤差だとみなさずに細かく考えていった子どもは予想までたどり着けなかった。「実験データだから誤差があるよ。」という声かけが必要であった。

どちらの子どもにも共通していることは，「なぜ，2次関数にならなかったのか。」という「問い」である。この「問い」が自然に子ども達から出てきた。その理由を聞いたところ,「理科で習った。」「斜面の運動と同じと聞いた。」という答えが返ってきた。子ども達の意識と現実世界のずれは,「なぜだろう？」という問いを生み出しやすく，問題解決に積極的になるといえるのではないだろうか。

次に，2時間目について，アンケート調査から分析する。アンケートの内容は，以下のようである。

①2日間の授業で，おもしろいと感じたところはありますか？それはどこですが？

②「関数」はどんなところで使えると思いますか？

③小学校では算数，中学校では数学を学んできましたが，どうして学ぶのだと考えますか？

この3つの質問に対する感想をいくつか紹介する。

まず，①については,

- 一見して規則性のなさそうな物に，規則性を見つけたとき。
- 同じような数をどこまでを等しいと考えるかによって，結果が違ってしまう点。
- グラフを書いているときに，グラフ同士で似ているところなどがあったとき。
- わからない数を予想するところ。
- どこに注目して考えれば良いか，自分なりに考えられること。
- 世間一般で言われているような結果 (重くても軽くても落下時間は同じ) にならない所。

今回は，実際に実験したデータであるため，グラフを書くときに概数で考えるなどの既習事項を活用しないと落下時間を予測できない。そこに，自分の注目する値を決め，考察していくことで，規則性を発見できることに喜びを感じたり，また一般的な結果とは違うことに驚きを感じる子どもが多かった。しかし，中には,

- いまいち，規則性がつかめなかったので，あまりおもしろくなかった。

という感想もあり，規則性がつかみづらいところにおもしろさを感じた子どもと，つまらなさを感じた子どもがいることが判明した。

②については，以下のような感想があった。

- 座標を用いることで誰でも理解することができる。
- どのように変化しているのか，発見したいとき。
- データを集めてそれを何かの根拠にしたいとき。

また,「世の中にある何でも関数にできるんじゃないか。関数にすれば法則性がつかみやすいような気がする。」という意見もあった。このように，子ども達は，関数の有用性を感じていることがわかった。

③の質問に対しては，

- 学ぶとおもしろくなるから。
- 自分の知識を広げるため。
- ある程度の計算は社会に出ても買い物で使える。
- 生活していくのに必要だと思ったから。数学はおもしろいから。

と，漠然と良さを感じている子どももいれば，次のように，

- 数学は好奇心を満足させてくれると思う。
- 自分で疑問に思ったことを，自分なりに解明する力をつけるため。
- 正しい物の見方を身につけるため。
- 様々な自然現象の解決に役立つから。
- 思考力をつけるため。

といった，1節であげたような，数学教育の有用性にせまるような考えも出た。

しかし，

- 必要な計算ができるようになるため。
- 計算などから数を求めることをきたえるため。

などの「計算力」に目が向いている子どももいた。

8. 考察

6, 7節から，今回の実践によって，既習事項をもとに実際の実験データを考察する活動で子ども達に数学の有用性を感得させる，というねらいはほぼ達成できたと考えられる。

従ってここでは，子どもの思考過程の中でつまずきが見られた点をあげ，それについての反省点を述べる。

1点目は，実験データの考察時におけるつまずきである。1時間目においては，実験から得られたデータであったので，値が単純化されていないため，落下距離と時間の関係を見つけることができない子どもが数人見られた。これは，普段理想化された値を扱っているために，単純化 (四捨五入)・場面の置き換え (表→グラフ) などの抽象化能力（数学的な見方・考え方) が活用できていないためと考えられる。感想にも「規則性がつかめなくてあまりおもしろくなかった。」と書いた子どもがいるが，今までの知識・技能を場合・条件に応じて取捨選択できる能力の育成が必要である。これも，この能力が上手に活用できていないからだと考える。

2点目は，グループ交流におけるつまずきである。2時間目においては，グループでの交流がうまくできなかった。1時間目で行った追求の考えの根拠に従って，それぞれが個人追求から入ってしまったために，お互いの考えを聞くというグループ追求につながりにくかった。机間指導において考えを交流するよう対策を行ったが，個人のプリントには考えが書かれているが，どうしてそう考えたのか根拠をはっきりさせて表現することに苦手意識があると感じた。子ども達の多くは，個々

の数学的知識や技能の能力は高いが，コミュニケーション能力は弱いと感じた。

3点目は，速さの概念についてである。落下距離と落下時間の関係の表を提示することによって，変化の割合・単位量あたりの大きさなどの考え方により，短い距離で考えると速さがどんどん変化していくことに目を向けさせ，落下の様子を目に見える形で表現できることも実感させたかった。1時間目では，子ども達はこのような既習事項を用いていたが，2時間目では，ほぼ全てのグループが，落下速度を全体の落下距離における平均の速度ととらえていることがわかった。

9. 今後の課題

考察を踏まえて，今後の課題を述べる。まず，1点目は，通常授業におけるこの教材の実践である。本当に数学離れをなくすなら，通常の授業でこの教材を扱うべきである。選択数学であっても，困難を感じた子が数人いた。よって，課題をしぼり，提示するデータの量の工夫，さらには，授業者の支援の方法の工夫が必要である。

2点目は，グループ追求の手段の工夫である。8節にも述べたが，個人追求は積極的に行うが，グループでの課題追求ができない子どもの姿が見られた。自分が考えていることや感じたことを話すことは，自己の見直し，コミュニケーション能力につながり，社会で生きていくために必要な能力である。よって，この力を伸ばす手段の工夫が必要である。

3点目は，速度についての子どもの捉え方を調べることである。単位量あたりの大きさの考え方から，瞬間の速さにも目がいけば，3節で述べたように，高校の微積分へとつなげることも可能である。

以上3点の課題が，今回の授業実践から浮き彫りになった。

この授業を終えての子ども達の感想を一部紹介する。

- 落下したものの結果をうまくグラフに表したことはいいが，関数にできなかったのが今回の中で一番くやしかった。
- 物が落ちるということが結構複雑だということがわかった。
- 身近なことでも数値化することによって調べられるということがよくわかった。

最後に，今回授業実践にあたり，多大なご協力をいただきました千葉大学教育学部附属中学校の皆様に，深く感謝いたします。

引用文献

[1] 数学教育学研究会，1993，新数学教育の理論と実際〈中学校〉，聖文社.
[2] 国立教育研究所，1997，中学校の数学教育・理科教育の国際比較，東洋館出版社.
[3] 数学教育学研究会，2001，新版数学教育の理論と実際〈中学校・高校〉，聖文社.
[4] 文部省，1999，中学校学習指導要領解説数学編，大阪書籍株式会社.
[5] 長崎栄三，2001，算数・数学と社会・文化のつながり，明治図書.