岐阜数学教育研究
2003,Vol.2, 116-127

スーパーサイエンスハイスクール講座「自然の中の数列」実践報告

坪井健司[1], 愛木豊彦[2]

現在, 生徒の「科学技術離れ」,「理数科離れ」が問題となっている。その原因の一つとして, 数学が日常生活からかけ離れているという生徒の認識があげられる。そこで, 数学の有用性を実感させるため, 自然から生じる事象を例に用いた数列, 特に漸化式を扱った教材の提案を行う。ここでは, スーパーサイエンスハイスクールに指定された高校で行った授業実践の結果及び今後の課題について, 今回用いた問題・課題や生徒の感想を交え報告する。

＜キーワード＞課題学習, SSH, 数列, 漸化式, 一般化

1. はじめに

生徒の「科学技術離れ」「理科離れ」が指摘されている状況に対処し, 科学好き, 理科好きな児童生徒を増やすために, 文部科学省は平成 14 年度より「科学技術・理科大好きプラン」を開始した。スーパーサイエンスハイスクール (以下,SSH) はその事業の 1 つとして, 平成 14 年度に開始された。その内容・目的は科学技術, 理科・数学教育を重点的に行う高校を SSH として指定し, 理科教育・数学教育に関する研究を推進させることである。

数学離れが起きている原因として考えられるものの中で, ここでは特に次の 2 つに着目した。

(A) 学習内容と現実との乖離
(B) 授業形態

数学は研究の場面等で実際の現象を扱っているにもかかわらず, 高校数学で扱う問題はほぼ全ての領域において抽象化されたものとなっている。そのため, 数学は抽象的で, 役立たないと思っている高校生が少なくない。そこで, 数学における学習内容と現実との乖離が数学嫌いを生む原因の一つと考えた。

また, 高等学校においては学習内容の多さや大学入試の存在によって, 小中学校の授業のように生徒が主体的に問題解決に向かう場面を設定しにくい。問題も解法も教える側が与えることが多いのである。数学の魅力の一つに自分のアイデアを活かして問題を解決できることがあるが, 上で述べたような授業形態ではその魅力を感じることができない。このことが数学離れに拍車をかけているのではないか。そう考えて (B) を原因としてあげた。

これらに対処するため, 文部科学省が提示した SSH に関する 4 つの研究課題のうち, 本研究では数学教育の立場から以下の 2 点について考察することにした。

(1) 大学や研究機関と連携し, 大学の教員や, 研究者が学校で授業を行うなどの関係機関との連携の研究
(2) 論理的思考力, 創造性や独創性をいっそう高めるための研究

前述したように, 高校数学における学習内容が現実 (研究の問題) に密着していることを感得できるような教材が必要となってきている。そのような問題は, 大学や研究機関が中心

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

となって扱っているため題材の提供が可能である。また教材化の過程においては生徒の実態を把握している高校教員の力が必要となってくる。そこで, 大学や各研究機関と連携し, 研究の問題を単純化した教材を開発することで, 数学が現実に密着していることを生徒に実感させせようとした。つまり, 原因 (A) を解消するために研究課題 (1) を取り上げたのである。

本授業実践においては, 自ら問題を発見し, 解決できるような授業形態にすることで, 自分のアイデアを活かせるようにした。言い換えると原因 (B) に対し研究課題 (2) を対応させたのである。

以上をまとめると, 本実践のねらいは次の 2 点に集約される。
(a) 数学が日常事象に深くかかわっていることを実感できる。
(b) 自ら問題を作り, 解くという問題解決能力を高める。

本稿の内容はすでに坪井・愛木 [1] で述べたものであるが, そこでは教材の意図等の解説が十分ではなかったので, ここで詳しく論じることにした。身近な現象を扱う授業実践には, 岩崎・愛木 [2] などがある。

2. 教材について

１コマ１００分として１日目の計３コマで数列の導入から数列の極限までを扱った。また, ２日目の計２コマを課題追究の時間とした。以下, 数列を取り上げた理由とねらいとの関連について述べる。

1. 数列の導入に関する提案

   教科書では, 多くの場合等差数列を数列の導入としている。等差数列は１次関数とみることもでき, 中学校でも同様のことを扱っているので, 生徒にとって理解しやすい題材である。しかし, ここでは統計資料から得た数の並びを数列とみることを導入の題材とした。その理由は数列の良さである二つの分離量の関係を関数としてみることができることを理解することで, 数列を学習する必然性を伝えられると考えたからである。その題材は人口の変化という身近なものであり, ねらい (a) の達成を目指した。

2. つまずきの多い領域であること

   数列を苦手とする生徒は少なくない。そこで, つまずきを減少させるため, 実際の現象を元にした学習（ねらい (a)）を取り上げた。これにより, 数列を身近に感じるとともに, 興味関心が高まると予想される。また, それが学習意欲に繋がり, つまずきを減少させるのに有効であると考えた。

3. 漸化式により, 様々な自然現象が記述可能であること

   これは, ねらい (a) そのものである。また, 数列を具体的事象と関連付けることで新たな概念が導入された背景を理解しやすい。例えば, 人口を数列で表した場合, その極限の考察は将来の人口予測に相当する。このように, 数列と現象との間の関係を明確にすることができる。これにより, 生徒自ら問題を発見しやすくなり, ねらい (b) を実現できると考えた。

3. 実践と結果

3.1. 授業の概略

実施日:平成１５年7月２８，２９日
場　所:岐阜県立岐山高等学校
参加者:高校１年生（４３名）
この参加者は全て事前の公示で集まった希望者である。
＜１日目＞
１００分の講義を演習を交え，３コマ行っ

た。学生８名が補助として入り, きめ細やかに指導を行った。

1 コマ目

- 数列の定義
- 等比数列の定義

2 コマ目

- 等比数列の和
- 漸化式の解法

3 コマ目

- 漸化式の解法
- 数列の極限

＜2 日目＞

問題を選択式にすることで, 自分の好きなことについて追究することができ, 数学に対する興味関心を高めることができると考えた。そこで,6 問（解答つき）の中から好きな問題を 1 問選択させ, 同じ問題を選択した生徒同士でグループを作り, グループ追究を中心として, １００分の授業を 2 コマ行うことにした。問題は後述するようにかなり高度なものであるため, 解答を読んで理解するための時間をできる限り多くをとった。そして理解できたグループから課題 (解答なし) に取り組んだ。ねらい (b) を実現させるため, 課題は式を作るための条件や数値等を自分で決めることができるようオープンなものにした (第 3.3 節参照)。

1 コマ目

- 選択した問題の理解
- 課題追究

2 コマ目

- 全体発表

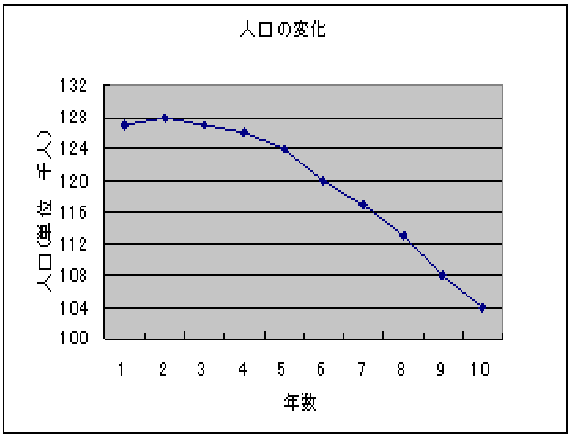
ここでは，各グループに分かれて, 各問題の解答を理解したあと課題追究を行った。その後, 各グループで取り組んだ課題について, ホワイトボードに書き, 説明する方法で発表を行った。生徒は, 問題の解法のみならず, 実際に調べた課題, 課題に対する答えや予想等を積極的に発表し, 発表時間が予定を大きく上回り１４０分という長いものになった。

次節で 1 日目の内容及び 2 日目で扱った問題, 課題, 課題に対する生徒の解答を紹介する。

3.2. 1 日目の内容

＜導入＞

下のグラフと表は，ある村の人口の変化の様子を表したものである。



人口の変化

年	1	2	3	4	5
人口 (千人)	127	128	127	126	124

現象を折れ線グラフで表すとどのような良い点があるだろうか。また，どのような欠点があるだろうか。中学校で学習した 1 次関数との関係についても考えてみよう。

長所　変化がわかりやすい。
先が予測できる。
途中の値を求めることができる。

短所　数字が読み取りにくい。
人口の値が正確ではない。(小数, 無理数を取りうる)

(意図) 連続関数 (折れ線グラフ) 的な見方では, 正確に表せないものがあることを知り, 数列で表現することの良さを知るためにこのような導入を行った。

＜数列の定義＞

問 1.1
(1) 前ページの表で,n 年の人口の $\frac{1}{2}$ を b_n とする。b_3,b_4 を求めなさい。
(2) 前ページの表で $(n+1)$ 年の人口から n 年の人口を引いたものを c_n とする。c_1, c_2, c_3 を求めなさい。
$\boxed{1}$ ある草は,1 日に 2mm ずつ伸びるという。この草を観察することにした。
　n 日目の草の長さを $a_n$mm とする。
(1)a_2=5 のとき,a_3 を求めなさい。
(2) この草の伸び方を式で表しなさい。
(3)$a_1 = \alpha$ のとき,a_n を n と α で表しなさい。
問 1.2
　第 n 項が次の式で表される数列の，第 1 項から第 3 項までを求めよ。
(1)$a_n = 2n + 1$ (2)$a_n = 2^n$
(3)$a_{n+1} = 2a_n + 1, (n \geqq 1), a_1 = 1$
(意図) データをもとにし数列の一般項を定義した。また, 課題において漸化式が使われているため, 最初の段階から漸化式に繋がるような問題にした。
＜等比数列＞
$\boxed{2}$ あるバクテリアは，1 日で 1 個体が 2 個体に増殖するという。このバクテリアを研究室で飼い始めた。n 日目のバクテリアの個体数を a_n とする。
(1)$a_2 = 3$ のとき, a_3 を求めなさい。
(2)a_{n+1} と a_n の関係を式で表しなさい。
(3)$a_1 = \alpha$ のとき，
(i)a_4 を求めなさい。
(ii)a_n を n と α で表しなさい。
問 1.3
(1) 初項 2，公比 3 の等比数列の第 n 項を求めよ。
(2) 第 3 項が 20, 第 5 項が 80 である, 等比数列の第 n 項を求めよ。
(意図) 漸化式を解くには等比数列に帰着させて考えることが重要であるので, 性質を踏まえて等比数列を扱った。そして, いつでも漸化式の見方ができるよう等比数列を漸化式で定義した。
＜等比数列の和＞
$\boxed{3}$ 某会社では，ある年から，牛肉の販売量が年に 2% ずつ増えているという。n 年目の販売量を a_n とする。
(1)1 年目の販売量を α として，n 年目の，販売量を求めよ。
(2)1 年目から 5 年目までの販売量の合計を求めよ。
(3)1 年目から n 年目までの販売量の合計を求めよ。
問 1.4
(1) 初項 2, 公比 3 の等比数列の第 7 項までの和を求めよ。
(2)$0.\dot{9}$ が 1 であることを示せ。
(意図) 漸化式の解法において, 必要なので取り上げた。
＜漸化式＞
$\boxed{4}$ 今 1 メートルの木がある。この木の高さは, 前年の木の高さの $\frac{1}{2}$ 倍に 1 メートルを加えたものになる。1 年目の木の高さを $a_1 = 1$,2 年目の木の高さを a_2,n 年目の木の高さを a_n とするとき，この数列を n を使った式で表しなさい。
(考え方)
a_{n+1} と a_n の関係を式で表すと，
$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$
次の表を完成させて,a_n に関する規則を見つけよう。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										

問 1.5
　$a_{n+1} = 3a_n - 4$,$a_1 = 1$ で表される数列を n を使った式で表しなさい。
(意図) 課題追究をするために中心となる考え方であるので丁寧に扱った。また, 一般項を推

測する方法は数学的帰納法により証明をしなければならないが, 時間の都合で推測しただけでも正解とした。

＜数列の極限＞

$\boxed{5}$芋煮会

日本一の芋煮会では，一回に３万食分の芋煮を作る。ここで作られる芋煮は, 訪れた人全員に平等に分けられる。

今, この芋煮会に訪れた人を n 人とし, このときの１人あたりの食事量を a_n とする。

(1)a_n を n を使った式で表しなさい。

(2) この芋煮会に訪れる人がどんどん多くなっていくと,1 人あたりの食事量はどうなっていきますか。

問 1.6

数列の第 n 項が以下の式で与えられるとき,n を限りなく大きくしていくとこれらの数列はどんな数に近づいていきますか。

(1)$\dfrac{n+2}{n-1}$ (2)$\dfrac{n+2}{n^2-1}$ (3)$\dfrac{2^n+3^n}{3^n}$

(意図) 課題追究に, 収束に関する問題を入れたため, 簡単な極限についてのみ扱った。

3.3. 2 日目の内容

問題番号の横にこの問題を選んだ生徒数を記した。

問題１ (ウサギの数理モデル)（６名）

今，一つがいの子ウサギがいる。このウサギは 1ヶ月で親になり，親ウサギは毎月一つがいの子どもを産む。nヶ月目のウサギのつがいの数を a_n とするとき，ウサギのつがいの数にはどのような関係があるか。また, nヶ月目にはウサギは全部で何つがいになるか。

(解答)

nヶ月目に子ウサギが b_n つがい, 親ウサギが c_n つがいいるとする。

このとき,$n+1$ヶ月目に子ウサギ, 親ウサギが何つがいになるかを考える。子ウサギは,1ヶ月前の親のつがいの数に等しいので

$b_{n+1} = c_n \cdots ①$

親ウサギは,1ヶ月前の親のつがいに,1ヶ月前の子どものつがいを加えたものに等しいので

$c_{n+1} = b_n + c_n \cdots ②$

②より,$c_{n+2} = b_{n+1} + c_{n+1}$

これと,①から,$c_{n+2} = c_n + c_{n+1} \cdots ③$

また, ①から,$b_{n+2} = c_{n+1}$

これと,①, ② から,

$$b_{n+2} = b_n + c_n = b_n + b_{n+1} \cdots ④$$

③ + ④ より,

$$(b_{n+2} + c_{n+2}) = (b_{n+1} + c_{n+1}) + (b_n + c_n)$$

ここで $a_n = b_n + c_n$ より,$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

また,1ヶ月目,2ヶ月目に子ウサギ, 親ウサギが何つがいいるかを考えると

$b_1 = 1, b_2 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1$ より,

$a_1 = 1, a_2 = 1$

従って, ウサギのつがいの数には,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1, a_2 = 1$$

という関係がある。

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ とすると} \\ a_{n+2} &= (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \end{aligned}$$

よって,$\alpha + \beta = 1, -\alpha\beta = 1,$

これを解いて,

$$\begin{aligned} -\alpha(1-\alpha) &= 1 \\ \alpha^2 - \alpha - 1 &= 0 \\ \alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき,$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

よって, このとき,

$$\begin{aligned} & a_{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)a_{n+1} \\ = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)a_n\right) \end{aligned}$$

ここで,$d_n = a_{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)a_n$ とすると

$d_{n+1} = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)d_n$

$d_1 = a_2 - \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)a_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
よって,d_n は
初項 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 公比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列になる。
従って,$d_n = \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$
$a_{n+1} - \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)a_n = \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n \cdots ⑤$
また，$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき,
$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
よって, このとき

$$\begin{aligned} & a_{n+2} - \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)a_{n+1} \\ = \;& \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(a_{n+1} - \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)a_n\Big) \end{aligned}$$

ここで,$e_n = a_{n+1} - \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)a_n$ とすると,
$e_{n+1} = \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)e_n$
$e_1 = a_2 - \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)a_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
よって,e_n は,
初項 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, 公比 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列になる。
従って, $e_n = \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$
$a_{n+1} - \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)a_n = \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \cdots ⑥$
⑤, ⑥から a_{n+1} を消去して

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

課題：
● 親が自分の生んだ子どもが親になると同時に死ぬという条件をつけたとき, ウサギのつがいの数の関係はどうなるだろうか。
（生徒の解答）

	1	2	3	4	5	6	7	8
親	0	1	1	1	2	2	3	4
子	1	0	1	1	1	2	2	3

この表からわかるように, 漸化式を作るまでには至らなかったが, 親ウサギ, 子ウサギの数がどのように変わっていくかを正確に把握することができていた。

問題２ (生物モデル)（１１名）
シャーレである細菌を繁殖させることにした。１日目の細菌の重さを a_1,n 日目の重さを a_n とする。
ここで, 次のことを仮定する。
1. 細菌が少ないときは,1 日あたりの増加量も少ない。
2. 細菌が増えるにつれ,1 日あたりの増加量も増える。
3. 細菌の量には限り P がある。
4. シャーレの大きさは決まっているので, 細菌の量がある値をこえると, あまり増えなくなる。ゆえに,1 日の細菌の増加量も減る。
以上のことを次の数式で表現する。

$$(1\text{ 日あたりの増加量}) = A(1-A)$$

ここで,A は前日の細菌の量を表す。従って,a_n の漸化式は次のようになる。

$$a_{n+1} = a_n(1-a_n) + a_n$$

つまり, 細菌の量の限度 P を１とした。
$a_1 = \dfrac{1}{2}$ のとき,a_n を n を使った式で表せ。

(解答)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n(1-a_n) + a_n \\ a_{n+1} &= -a_n^2 + 2a_n \end{aligned}$$

$a_{n+1} - \alpha = -(a_n - \alpha)^2$ とすると,

$$a_{n+1} = -a_n^2 + 2\alpha a_n - \alpha^2 + \alpha$$

これを満たす α は１なので
$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)^2$ となる。
ここで,$a_n - 1 = b_n$ とおくと,$b_1 = -\dfrac{1}{2}$

$b_{n+1}=-b_n^2$ と表すことができる。
次に, 数列 b_n を考える。

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
b_3 &= -b_2^2=-\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2=-\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
b_4 &= -b_3^2=-\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^2=-\left(\frac{1}{2}\right)^8
\end{aligned}$$

同じように考えて,
$n\geq 2$ のとき, $b_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$
$n=1$ のとき,$-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2^0}=\frac{1}{2}$ となる。
従って,

$$b_n=\begin{cases} -\frac{1}{2}(n=1) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}(n\geq 2)\end{cases}$$

$a_n-1=b_n$ より,
$n\geq 2$ のとき,$a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$
$n=1$ のとき $a_n=\frac{1}{2}$
従って求める数列は,

$$a_n=\begin{cases} \frac{1}{2}(n=1) \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}(n\geq 2)\end{cases}$$

課題：
•n が大きくなっていくとどうなるだろうか。
（生徒の解答）
n が大きくなると 1 に近づく。
• 初項を変えたらどうなるだろうか。
（生徒の解答）
初項がどうであろうと 1 に近づく。
• 別のモデルも作ってみよう。
（生徒の解答）
①限度を変える。
$a_{n+1}=a_n(\square-a_n)+a_n$
②式を変える。
$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(1-a_n)+a_n$

問題 3 (ヤコビ法)（５名）

連立方程式の近似解を次のようにして，求める方法をヤコビ法という。

$$\begin{cases} 5x+2y=12 \\ x+2y=4 \quad (x=2, y=1)\end{cases}$$

$x_{n+1}=\frac{-2y_n+12}{5}$, $y_{n+1}=\frac{-x_n+4}{2}$
$x_1=0, y_1=0$ とすると x_n は 2，y_n は 1 に近づく。
(証明)
$\alpha=2, \beta=1$ とおくと,
$\alpha=\frac{-2\beta+12}{5}$, $\beta=\frac{-\alpha+4}{2}$ と変形できる
これと上の漸化式から,

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-\alpha &= \frac{-2y_n+12}{5}-\frac{-2\beta+12}{5} \\
&= \frac{-2}{5}(y_n-\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1}-\beta &= \frac{-x_n+4}{2}-\frac{-\alpha+4}{2} \\
&= \frac{-1}{2}(x_n-\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2-\alpha &= \frac{-2}{5}(y_1-\beta) \\
x_3-\alpha &= \frac{-2}{5}(y_2-\beta) \\
&= \left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)(x_1-\alpha)
\end{aligned}$$

と表すことができる。また,

$$\begin{aligned}
y_2-\beta &= \frac{-1}{2}(x_1-\alpha) \\
y_3-\beta &= \frac{-1}{2}(x_2-\alpha) \\
&= \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-2}{5}\right)(y_1-\beta)
\end{aligned}$$

となるので

n が偶数のとき,

$$\begin{cases} x_n-\alpha=\left(\frac{-2}{5}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}(y_1-\beta) \\ y_n-\beta=\left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{-2}{5}\right)^{\frac{n}{2}-1}(x_1-\alpha)\end{cases}$$

n が奇数のとき,

$$\begin{cases} x_n-\alpha=\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(x_1-\alpha) \\ y_n-\beta=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{\frac{n-1}{2}}(y_1-\beta) \end{cases}$$

よって $\lim_{n\to\infty}(x_n-\alpha)=0, \lim_{n\to\infty}(y_n-\beta)=0$
x_n は 2 に，y_n は 1 に近づく。
課題：
• どんなときでもヤコビ法は使えるのだろうか。予想を立て，それを証明してみよう。

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

（生徒の解答）
生徒 A
$a<b$ かつ $c<d$ のとき, ヤコビ法が使えると予想し, 具体的な数字に対して計算した。そして, ヤコビ法が使えることを示した。
生徒 B
n が偶数のとき,

$$\begin{cases} x_n-\alpha=\left(\dfrac{-b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{-c}{d}\right)^{\frac{n}{2}-1}(y_1-\beta) \\ y_n-\beta=\left(\dfrac{-c}{d}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{-b}{a}\right)^{\frac{n}{2}-1}(x_1-\alpha) \end{cases}$$

n が奇数のとき,

$$\begin{cases} x_n-\alpha=\left(\dfrac{-b}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\dfrac{-c}{d}\right)^{\frac{n-1}{2}}(x_1-\alpha) \\ y_n-\beta=\left(\dfrac{-c}{d}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\dfrac{-b}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}}(y_1-\beta) \end{cases}$$

より，$-1<\dfrac{-b}{a}<1$ かつ $-1<\dfrac{-c}{d}<1$
のとき，ヤコビ法が使える。

問題４（「戦」の数理モデル）（１４名）
n 日目の X 軍の兵士数を x_n，Y 軍の兵士数を y_n とする。
仮定:1 日で自軍の兵士数の半分の数の敵を減らすことができる。

つまり，
$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{1}{2}y_n \\ y_{n+1}=y_n-\dfrac{1}{2}x_n \end{cases}$$

$x_1=1, y_1=1$ として x_n, y_n を求める。
(解答)
$x_{n+1}+\alpha y_{n+1}=\beta(x_n+\alpha y_n)$ とおいてみる。

$$x_{n+1}+\alpha y_{n+1}=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x_n+\left(\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\right)y_n\right)$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} &= \alpha \\ \alpha &= \pm 1 \end{aligned}$$

$\alpha=1$ のとき $\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=-1$ のとき，$\beta=\dfrac{3}{2}$
$x_{n+1}+y_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+y_n)$
$x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{3}{2}(x_n-y_n)$
$a_n=x_n+y_n$ とおくと，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ より,
$a_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
$b_n=x_n-y_n$ とおくと, $b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n$ より,
$b_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}b_1=0$, よって $x_n=y_n$
以上より,$x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=y_n$
従って, $\lim_{n\to\infty}x_n=0, \lim_{n\to\infty}y_n=0$
課題：
• 最初の兵力を変えたら, 結果はどうなるだろうか。
（生徒の解答）
生徒 A
初項が大きい方が勝つ。
生徒 B
一方が他方の 2 倍以上であるとき,1 日で終わる。
生徒 C
初項が異なると一方は負になり (捕虜が増える), 他方は増えつづける。
生徒 D
兵士が増えつづけることはないので, 初項は同じ数でなければいけない。
生徒 E
初項が, 同じ数のとき, 最終結果は変わらない。

• 攻撃力を変えたら, 結果はどうなるだろうか。
（生徒の解答）
生徒 A
あまり変化はない。
生徒 B
だんだん 0 に近づく。

問題 5 (確率への応用)（6 名）

2 つの箱 A,B を用意する。A と B それぞれの箱に,1 から 6 までの整数がかかれたカードを入れておく。A と B それぞれの箱から 1 枚ずつカードをひき, 数字を確認してから元に戻す。A(k),B(k) を，A,B のそれぞれの箱から,k 回目に取り出したカードにかかれている数とする。ここで,
$T(n)$=A(1)B(1)+A(2)B(2)+$\cdots$+A(n)B(n)
とする。このとき,$T(n)$ が奇数になる確率を P_n とするとき，P_{n+1} と P_n の間にどのような関係があるか。P_n を n を使った式で表すとどうなるか。

また, カードをひく回数を多くしていくと P_n はいくつに近づくか。
(解答)

$(n+1)$ 回目に奇数となるときを考えると，n 回目に偶数になったとき，奇数を選び，n 回目に奇数になったとき，偶数を選べばよい。
n 回目に奇数となっている確率が P_n で，数は奇数と偶数しかないので，n 回目に偶数となっている確率は $1 - P_n$ となる。

また，1 回ひいて奇数となる確率 P_1 は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ となる。
従って，1 回ひいて偶数となる確率は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ となる
よって，

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{3}{4}P_n + \frac{1}{4}(1 - P_n) \\ P_{n+1} &= \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

P_n を求める。

$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}$ において，
$P_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(P_n - \alpha)$ とすると，

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{\alpha}{2}$$

よって，$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ つまり,$\alpha = \frac{1}{2}$ とすると,
$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Big(P_n - \frac{1}{2}\Big)$ ここで,$Q_n = P_n - \frac{1}{2}$ とすると,$Q_{n+1} = P_{n+1} - \frac{1}{2}$ なので,
$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n$
$Q_1 = P_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
よって，Q_n は, 初項 $-\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列になる
従って,$Q_n = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} Q_1$

$$\begin{aligned} Q_n &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\cdot\Big(-\frac{1}{4}\Big) = -\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1} \text{より} \\ P_n - \frac{1}{2} &= -\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1} \\ P_n &= \frac{1}{2} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_n &= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

従って, この数列は,$\frac{1}{2}$ に近づく。
課題：
•A,B に入っているカードの番号をずらすとどうなるだろうか。
（生徒の解答）
偶数と奇数の数は変わらないので変わらない。
•A,B に入っている奇数のカードと偶数のカードの割合が違うとどうなるだろうか。
（生徒の解答）
奇数が 3 枚，偶数が 2 枚入っていたとする。
$P_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{7}{25}\Big)^n \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$
偶数が多くても $\frac{1}{2}$ になると思う。

問題６ (分数の形の漸化式)（１名）
$a_1=4, a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ のとき,a_n を n を使った式で表せ。また, この数列は収束するか。
(解答)
$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ において,a_{n+1}, a_n を α に置き換えた方程式を考える。

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{4\alpha+8}{\alpha+6}\\ \alpha^2+2\alpha-8 &= 0\\ \alpha &= -4,2\end{aligned}$$

ここで,$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}$ を考えると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4} &= \frac{\frac{4a_n+8}{a_n+6}-2}{\frac{4a_n+8}{a_n+6}+4}\\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{a_n-2}{a_n+4}\Big) \text{となる。}\end{aligned}$$

ここで $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ とおくと,$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n$
$b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+4}=\dfrac{1}{4}$
よって,b_n は初項 $\dfrac{1}{4}$, 公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列になる。
従って, $b_n=\Big(\dfrac{1}{4}\Big)^n$
よって,$\dfrac{a_n-2}{a_n+4}=\Big(\dfrac{1}{4}\Big)^n$

$$\begin{aligned}\frac{a_n-2}{a_n+4} &= \Big(\frac{1}{4}\Big)^n\\ a_n &= \frac{2\cdot 4^n+4}{4^n-1}\end{aligned}$$

従って, 求める数列は $a_n=\dfrac{2\cdot 4^n+4}{4^n-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+4}{4^n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(2+\frac{6}{4^n-1}\Big)\\ &= 2\end{aligned}$$

よって, この数列は 2 に収束する。
課題
● 初項がどんな値でもこの数列は収束するだろうか。
（生徒の解答）
初項を α とおいて一般項を求め, 初項がどんな値でも 2 に収束することを示した。

3.4. アンケート結果

授業の難易度について
難しかった $\cdots$41 名（43 名中）
感想

- 戦の問題として, 色々他の要素が加わったらどうなるかを考えていた。
- 生物の食物連鎖間では, どのような数列が展開されているのだろう。
- 自分で課題を見つけ, 自分なりに解いていけることが良かった。
- $0.\dot{9}=1$ は数学的に解けば 1 だけど何かひっかかる。$0.\dot{9}=1$ とおいてしまっていいのだろうか。
- なぜ, 全て $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n=\frac{1}{2}$ になったのか。
- 数学に対して，興味関心が深まった。
- 数学で, 表せそうにないことが, 今回数列という形でできたことには, 興味関心が深まった。
- 問題を解こうとする意欲が前よりも深まった。
- 問題が解けたときは, うれしかった (達成感があった)。
- 一つの問題に対して, 解き方が色々あって面白い。
- 数学は奥が深く, 面白いと思った。

- 数学の楽しさを実感し，さらに数学が好きになった。
- 長い時間をかけて解くのは, 楽しい。
- 身近な問題ばかりだから, 考えるのが楽しい。
- 数学って, こんな計算もあるんだなと感心しました。
- 自分で考える力がついた。
- 自分なりにもっと追究してみたいと思った。
- 問題をいろいろな観点から見れるようにしたい。
- 数列に隠されている秘密を見つけ出したいと思った。
- フィボナッチ数列について調べたい。
- 色々なことを証明していきたいと思った。
- 自分で法則を見つけたい。
- もっと色んな定理を使って, 身の回りにある自然現象を証明したい。
- 新しい数学を知ることができた。
- 数学の世界が一気に広まった。
- なるほどと思うことが沢山あった。
- 数学は, まだまだ知らないことが多くて, これからも学んでいきたいと思った。
- 数学は, 地味で, やることのないものだと思っていたが, やることが多くてすごいと思った。
- 数学は, なんの役に立つのかと思っていたけど, 身近なところでも使われているんだなと思った。
- 日常生活に数学が使われているんだなあと思った。
- 日常に有意なものが含まれると思ったのですごい。
- 自然の中には沢山の数列があることがわかった。
- 数列は色々なことに応用できるので, もっと勉強したいと思った。
- 数学は, 色々なことを式で表せてすごいと思うし, 発展させることができることを改めて実感した。
- 現実で使えるようにしたい。
- 今回の学習を今後の学習に生かしたい。
- 自信がなくなったのが本音。
- よくわからなかったので少し自信がなくなった。

4. 考察と今後の課題

「数学は, なんの役に立つのかと思っていたけど, 身近なところでも使われているんだなと思った。」という感想などからわかるように生徒は, 今まで役に立たないと思っていた数学が身近なところで使われていることを知り, 日常事象に深くかかわっていることを実感でき, ねらい (a) を達成できたのではないかと考える。また, 問題 2 の課題「他のモデルも作ってみよう」に対する生徒の解答から問題を作る経験もできていた。さらには,「色々なことを証明したい」という感想などからもねらい (b) も達成できたと判断した。

アンケートの結果からわかるように, 生徒はこの内容を難しいと感じたようである。これ

は, 数学が好きな生徒を増やすという本研究の主旨からみれば逆効果である。しかし, 難しくてわからなかったというわけではない。生徒の様子や発表の様子から, 十分に理解していたことがうかがえる。つまり,「分かったが, 難しかった」のである。このことは, １日目の内容の多さに起因すると考えられる。よって, 生徒ができるだけ難しいと感じないよう, １日目の内容を厳選し, 考える時間をできるだけ多くとれるように授業を構成し直す必要がある。

課題追究用の問題は, 数が多すぎたかもしれない。何故なら, 自ら追究した問題について, 熱心に発表する姿が見られたのに対し, 他の問題については全く追究を行っていないので理解度や興味関心が低く, 他グループの発表を殆ど聞いていなかったからである。

また, 発表において, 練習の時間をとることができず, 分かりやすい発表とはならなかった。さらに, 発表時間が長かったため, 生徒の集中力が途中で切れてしまった。よって, 十分に練習時間を取り, 興味関心をもてるような発表にできるように, 時間配分にも十分に気をつけて授業を構成する必要がある。

そして, これからも数列以外の分野でもこのような課題学習を行う教材を考えていきたい。

最後に, 授業実践にあたり, 多大なご協力を頂いた岐山高等学校の皆様に感謝いたします。

引用文献

[1] 坪井健司･愛木豊彦, 数学セミナー (SSH) における講座「数列」の実践報告, 秋季例会発表論文集,2003,114-116

[2] 岩崎美奈・愛木豊彦, 現象を数学的にとらえる教材の提案, 岐阜数学教育研究,2002,Vol,64-74.